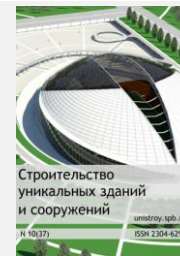




Construction of Unique Buildings and Structures



journal homepage: www.unistroy.spb.ru



Колебания стержневой системы с одной степенью свободы

В.А. Тарасов¹, М.Ю. Барановский², И.А. Дуванова³, И.Д. Сальманов⁴, Ю.Е. Павлушкина⁵

ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», 195251,
Россия, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

Информация о статье

УДК 69.07

Научная статья

История

Подана в редакцию 31 мая 2015
Принята 11 июня 2015

Ключевые слова

динамика сооружений,
гармоническое воздействие,
коэффициент динамичности,
свободные колебания,
вынужденные колебаний,
колебания с учётом затухания,
MathCAD,
численные методы решения

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассматривается поведение статически-определимой стержневой системы с одной степенью свободы при различных видах колебаний: - свободных незатухающих колебаниях; - свободных затухающих колебаниях; - вынужденных колебаниях без учёта затухания; - вынужденных колебаниях с учётом затухания. Рассмотрение каждого из данных колебаний по отдельности, а также исследование влияния на колебания различных факторов являются двумя основными задачами настоящей статьи. Задачи решаются численным методом – методом Рунге-Кутты, реализованном в программе MathCAD. Характерным результатом, на котором построено сравнение и анализ влияния коэффициента неупругого сопротивления материала (конструкции) и частоты внешнего воздействия, являются графики переменного по времени перемещения сосредоточенной массы. Внешнее воздействие – гармоническое.

Содержание

1.	Введение	54
2.	Обзор иностранной и отечественной литературы	54
3.	Физическая постановка задачи	54
4.	Математическая постановка задачи	56
5.	Методика решения задачи	60
6.	Реализация выбранной методики	61
7.	Предварительные расчеты	61
8.	Свободные незатухающие колебания	64
9.	Свободные затухающие колебания	65
10.	Вынужденные колебания без учёта затухания	68
11.	Вынужденные колебания с учётом затухания	72
12.	Коэффициент динамичности	73
13.	Выводы	75

¹ Контактный автор:
+7 (952) 201 0537, vtarasov3766@yandex.ru и (Тарасов Владимир Александрович, магистрант)
² +7 (921) 407 7354, bm_y@mail.ru (Барановский Михаил Юрьевич, магистрант)
³ +7 (921) 799 6988, duvanova.i@mail.ru (Дуванова Ирина Александровна, магистрант)
³ +7 (911) 843 3426, ildussalmanov@gmail.com (Сальманов Ильдус Динисламович, студент)
³ +7 (967) 510 5967, pearlblack@mail.ru (Павлушкина Юлия Евгеньевна, студент)

1. Введение

Динамика сооружений – это раздел строительной механики, посвященный методам расчёта сооружений от действия внешних динамических воздействий. Динамической считают ту нагрузку, которая изменяет своё значение, направление или место приложения в относительно-короткий промежуток времени. Динамические воздействия вызывают существенные силы инерции, которые являются дополнительной нагрузкой на сооружение.

Характерным для работы строительных конструкций при динамических воздействиях является возникновение колебаний под влиянием сил инерции. Вызванные динамическим воздействием внутренние усилия, перемещения, деформации и напряжения также являются функциями времени. Возникает движение масс сооружения, которое может продолжаться и после прекращения действия нагрузки, оно получает колебательный характер.

Часто расчёт на явно динамические воздействия проводят как статический на амплитудные значения нагрузок. Динамику процесса в этом случае учитывают умножая (обычно увеличивая) все полученные результаты на коэффициент динамичности, β . Значения этого коэффициента известно не всегда. Сначала приходится исследовать динамические характеристики сооружения.

В данной работе для расчёта была выбрана статически-определимая стержневая система, как наиболее простая и наглядная с точки зрения расчёта.

Динамической нагрузкой является воздействия от работы двигателя (вибрационная нагрузка). **Вибрационная нагрузка** возникает при равномерном вращении вследствие неизбежной неточности в распределении масс. Иногда, как и в нашем случае (двигатель), неуравновешенность масс и эксцентриситет оси их вращения предусмотрен заранее.

В данной статье рассмотрены 4 основных типа колебаний стержневых систем:

- свободные незатухающие колебания;
- свободные затухающие колебания;
- вынужденные колебания без учёта затухания;
- вынужденные колебания с учётом затухания.

Для решения дифференциального уравнения движения, в программе MathCAD был использован численный **метод Рунге-Кутты**. Для оценки его точности в данной же программе были построены графики точного решения заданных уравнений.

При рассмотрении свободных затухающих колебаний рассматривается влияние коэффициента неупругого сопротивления материала на скорость затухания колебаний. Для большей правдоподобности и наглядности сравнивается скорость затухания свободных колебаний в системах из 3-х различных материалов: из железобетона, из прокатной стали и из дерева.

В последней части данного исследования подсчитывается **коэффициент динамичности**, β , как отношение динамического перемещения к статическому. Данный коэффициент сравнивается с коэффициентом динамичности, посчитанным по формуле, полученной из аналитического решения.

2. Обзор иностранной и отечественной литературы

Расчёту строительных систем на гармонические колебания посвящены множество книг и научных трудов.

Среди российских и советских учёных и инженеров можно выделить Айзенберга Я.Н., Гвоздева А.А., Бирбраера А.П., Шульмана С.Г., Рабиновича И.М., Барштейна М.Ф., Коренева Б.Г., Тимошенко С.П. и многих других. [1], [3-4], [8], [10], [14-16], [18-20].

Методам численного решения задач динамики сооружений также посвящено множество статей [2] и книг [5], в том числе реализации решения задач механики в компьютерной среде MathCAD. [6].

При работе над данной статьёй также использовалась научная литература и публикации сотрудников Инженерно-строительного института, СПбПУ на тему строительной механики, динамики сооружений и строительных конструкций. [7], [9], [11-13], [17], [21-22].

3. Физическая постановка задачи

Для исследования выбрана статически-определимая железобетонная балка с работающим оборудованием (двигателем), представлена на рисунке 1. Сечение балки прямоугольное, представлено на рисунке 2. Материал сечения балки – бетон класса В25, имеет удельный вес $\gamma_b=24,525 \text{ кН/м}^3$, модуль упругости $E=3 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2$, коэффициент Пуассона $\mu=0,2$.

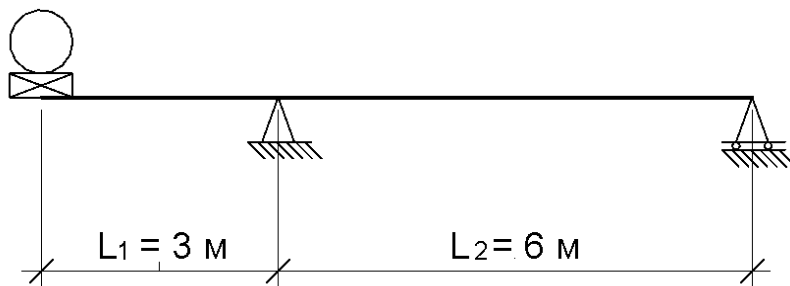


Рисунок 1. Физическая модель

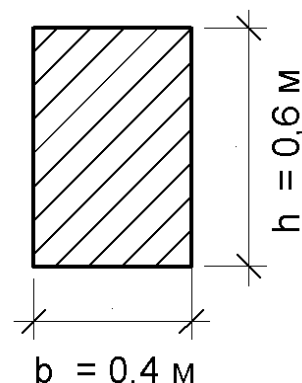


Рисунок 2. Сечение балки

Исходные данные по размерам конструкции и по работающему оборудованию приведены в таблице 1.

Таблица 1. Исходные данные

Наименование	Ед. измерения	Значение
Длина 1-го пролёта (L_1)	м	3
Длина 2-го пролёта (L_2)	м	6
Высота сечения балки (h)	м	0,6
Ширина сечения балки (b)	м	0,4
Эксцентриситет (e)	м	0,009
Вес двигателя	кН	60
Вес ротора	кН	30
Кол-во оборотов	об/мин	500

Единицы измерения, используемые в работе, представлены в таблице 2.

Таблица 2. Единицы измерения

Физическая величина	Единицы измерения
Масса	кг
Вес, сила	Н
Линейные размеры	м
Техническая частота	Гц
Время	с

Будем считать, что двигатель, воздействия на балку, создаёт гармоническое воздействие по закону:

$$P(t) = P_0 \cdot \sin(\theta \cdot t) \quad (1)$$

где θ -частота двигателя, t -время.

Цель работы: исследовать влияние коэффициента неупругого сопротивления материала, а также частоты внешнего гармонического воздействия на поведение динамической расчётной схемы.

4. Математическая постановка задачи

Любая математическая постановка задачи начинается с обозначения некоторых допущений, которые применяются для упрощения расчёта. Эти упрощения не должны, однако, приводить к неточностям в решении, сверх допустимых.

В данном исследовании были приняты следующий допущения и ограничения:

- 1) В рассматриваемой задаче продольный размер много больше поперечных, что даёт нам отнести рассматриваемую задачу к механике стержней;
- 2) Будем считать перемещения малыми по сравнению с первоначальными размерами сооружения, следовательно, деформации тоже малы. Это позволяет:
 - А) Использовать линейные геометрические уравнения, связывающие перемещения и деформации;
 - Б) Составлять уравнения равновесия для недеформированной системы, пренебрегаю малыми, упругими перемещениями точек приложения внешних сил;
- 3) Материал стержневых систем является сплошным, однородным, изотропным, относительно жёстким, а также следует закону Гука, т.е. соблюдается линейная зависимость усилий и перемещений;
- 4) Исключаются из рассмотрения конструктивно-нелинейные системы, например системы с односторонними связями. Конструктивно-линейная задача – это задача в процессе решения которой не меняются граничные условия;
- 5) Т.к. система считается геометрически, физически и конструктивно линейна, то для неё справедлив принцип независимости действия сил:

Напряжения (деформации), вызванные системой (группой) сил, равны сумме напряжений (деформаций), вызванных каждой силой в отдельности;

- 6) Справедлива гипотеза плоских сечений и не сжимаемости волокон;
- 7) Справедлив принцип Д'Аламбера, который гласит, что если к активным силам, действующим на механическую систему и реакциям наложенных на неё связей, приложить силы инерции, то получится уравновешенная система.

Из континуальной системы (системы с распределённой массой по всей длине стержней) перейдём к дискретной. Для этого сосредоточим распределённую массу элементов в характерных точках и узлах расчётной схемы. Таким образом, получим динамическую расчётную схему. Рассмотрим поставленную задачу, как задачу с одной динамической степенью свободы.

При определении динамических степеней свободы используются следующие допущений:

- пренебрегается деформация стержня при растяжении/сжатии;
- не учитывается поворот сосредоточенной массы.

Динамическая расчётная схема представлена на рисунке 3.

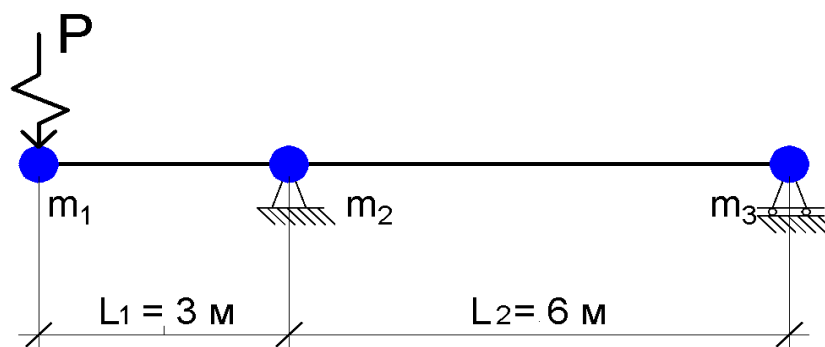


Рисунок 3. Динамическая расчётная схема

В связи с тем, что 2 и 3 сосредоточенные массы не имеют динамических степеней свободы, то для расчёта нам понадобится лишь значение 1-й точечной массы.

Согласно принципу Д'Аламбера система на которую воздействует динамическая нагрузка будет находиться в равновесии под действием следующих сил:

- Внешнее динамическое воздействие (от работы двигателя):

$$P(t) = P_0 \cdot \sin(\theta \cdot t) \quad (2)$$

- Восстанавливающая сила R – это упругая реакция системы, стремящаяся вернуть массу в положение статического равновесия:

$$R(t) = -k \cdot u(t) \quad (3)$$

где k -коэффициент жёсткости системы по направлению динамической степени свободы, m -величина сосредоточенной массы, колеблющейся по направлению данной степени свободы;

- Сила инерции I , численно равная произведению массы на ускорение и направленная противоположно ускорению:

$$I(t) = -m \cdot \ddot{u}(t) \quad (4)$$

Сила неупругого или вязкого сопротивления F . По теории вязкого сопротивления Фойгта. Согласно этой теории сила неупругого сопротивления пропорциональна скорости движения массы m :

$$F(t) = -c \cdot \dot{u}(t) \quad (5)$$

где c -коэффициент вязкости. Коэффициент вязкости – это сила вязкого сопротивления, соответствующая единичной скорости массы.

Расчетная схема со всеми действующими на неё силами представлена на рисунке 4.

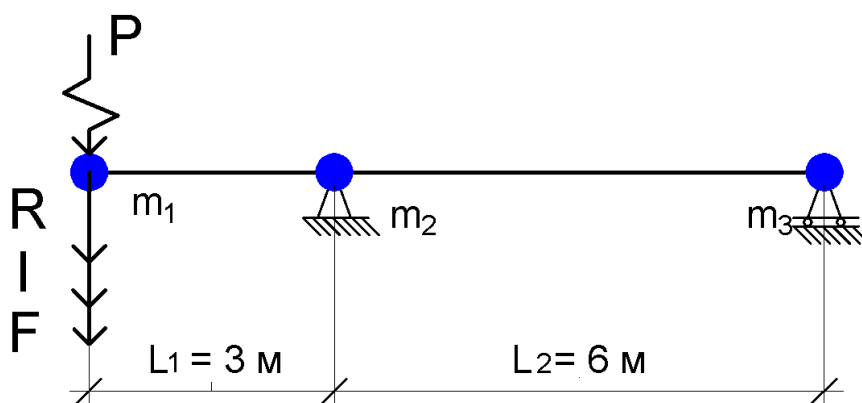


Рисунок 4. Динамическая расчётная схема со всеми силами

Уравнение движения для данной задачи имеет вид:

$$I(t) + F(t) + R(t) + P(t) = 0 \quad (6)$$

Или, с учётом ранее введённых обозначений:

$$-m \cdot \ddot{u} - c \cdot \dot{u} - k \cdot u + P_0 \cdot \sin(\theta \cdot t) = 0 \quad (7)$$

$$m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = P_0 \cdot \sin(\theta \cdot t) \quad (8)$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, решением которого будет являться переменное перемещение сосредоточенной массы по направлению динамической степени свободы. Решим это уравнение численным методом.

Для непосредственного решения полученного дифференциального уравнения выбранной методикой численного интегрирования необходимо вначале привести дифференциальное уравнение 2-го

порядка к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка, а так же ввести некоторые обозначения и определить некоторые зависимости.

Приведём данное уравнение к однородному, поделив на массу и выполнив линейные преобразования:

$$\ddot{u} - \frac{c}{m} \cdot \dot{u} - \frac{k}{m} \cdot u = \frac{P_o}{m} \cdot \sin(\theta \cdot t) \quad (9)$$

Введём новую функцию:

$$v(t) = \dot{u}(t) \quad (10)$$

Тогда исходное уравнение преобразуется в следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = V(t) \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \dot{V}(t) + \frac{c}{m} \cdot V(t) + \frac{k}{m} \cdot u(t) = \frac{P(t)}{m} \end{cases} \quad (12)$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} u(0) = u_0 = u_{cm} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} V(0) = V_0 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Где u_{cm} – прогиб балки от статически-приложенной центробежной силы.

Введём некоторые обозначения:

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad (15)$$

где ω - круговая (циклическая) частота, также называемая собственной частотой конструкции. При расчёте линейно-деформируемых конструкций ω является собственной характеристикой расчётной схемы и не зависит от внешнего динамического воздействия. Её нахождение называется модальным анализом. Она может быть найдена по любой, более удобной из следующих формул:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (16)$$

или

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta \cdot m}} \quad (17)$$

где m – величина сосредоточенной массы, k – коэффициент жёсткости в направлении динамической степени свободы, δ - коэффициент податливости по направлению динамической степени свободы.

$$\frac{c}{m} = 2\varepsilon \quad (18)$$

где ε – коэффициент затухания колебаний. Если $\varepsilon=0$, то имеют место незатухающие колебания, если $\varepsilon \neq 0$, то это колебания с учётом затухания.

Известна связь ε с коэффициентом неупругого сопротивления материала γ_n , для которого имеются численные значения:

$$\varepsilon = \gamma_n \cdot \pi \cdot \omega \quad (19)$$

Для каждого материала и типа конструкции, в справочных материалах имеются численные значения коэффициента γ_n .

Для сравнения поведения конструкции при различных коэффициентах затухания (при различных материалах конструкции) численные значения коэффициента неупругого сопротивления материала γ_n представлены в таблице 3.

Таблица 3. Коэффициенты неупругого сопротивления для различных материалов

Материал конструкции	Значение γ_n
Обычный железобетон	0,09
Прокатная сталь	0,025
Дерево	0,05

Для сравнения поведения конструкции при различных частотах возбуждающей нагрузки, будут рассмотрены 3 варианта:

- 1) Дорезонансный – частота внешней возмущающей силы ниже первой собственной частоты;
- 2) Резонанс – явление совпадения частоты внешней возмущающей нагрузки с собственной частотой;
- 3) Пострезонансный период – частота внешнего воздействия выше первой собственной частоты.

В ходе работы будет рассмотрено 4 типа колебаний:

- 1) Свободные незатухающие колебаний;
- 2) Свободные затухающие колебаний;
- 3) Вынужденные колебания без учёта затухания;
- 4) Вынужденные колебания с учётом затухания.

5. Методика решения задачи

Для решения полученного дифференциального уравнения будем использовать численный метод Рунге-Кутты для системы дифференциальных уравнений первого порядка. Метод будет реализован в программе MathCAD.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \end{array} \right. \quad (21)$$

Область определения функций $0 \leq t \leq t_k$;

Начальные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = x_0 \end{array} \right. \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = y_0 \end{array} \right. \quad (23)$$

Численные методы подразумевают под собой дискретизацию задачи и её решения. В результате решения мы получаем не непрерывную функцию, а лишь последовательные её дискретные значения, в выбранных расчётных точках. Точность численного метода напрямую зависит от шага дискретизации.

В нашей задаче весь рассматриваемый участок времени делится на n участков с величиной промежутка Δt .

Формула Рунге-Кутты для системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i+1} = x_i + \frac{\Delta t}{6} \cdot (F_1 + 2 \cdot F_2 + 2 \cdot F_3 + F_4) \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{6} \cdot (G_1 + 2 \cdot G_2 + 2 \cdot G_3 + G_4) \end{array} \right. \quad (25)$$

где F_1 и G_1 вычисляются по следующим формулам 26-32:

$$F_1 = f(t_i, x_i, y_i) \quad (26)$$

$$F_2 = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot F_1, y_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot G_1\right) \quad (27)$$

$$F_3 = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot F_2, y_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot G_2\right) \quad (28)$$

$$F_4 = f(t_i + \Delta t, x_i + \Delta t \cdot F_3, y_i + \Delta t \cdot G_3) \quad (29)$$

$$G_1 = g(t_i, x_i, y_i) \quad (30)$$

$$G_2 = g\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot F_1, y_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot G_1\right) \quad (31)$$

$$G_3 = g\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot F_2, y_i + \frac{\Delta t}{2} \cdot G_2\right) \quad (32)$$

$$G_4 = g(t_i + \Delta t, x_i + \Delta t \cdot F_3, y_i + \Delta t \cdot G_3) \quad (33)$$

Данный численный метод даёт решение системы дифференциальных уравнений с погрешностью $\Delta MPK \sim c \cdot \Delta t^4$, где Δt – шаг интегрирования.

6. Реализация выбранной методики

В данной работе для реализации метода Рунге-Кутты использована программа MathCAD.

Метод Рунге-Кутты реализуется в данной программе с помощью функции $Rkadapt(y, t_0, t_k, n, D)$, где y – вектор начальных приближений,

t_0 – начало участка интегрирования (в нашей задаче это 0 секунд – начало отсчёта времени),

t_k – конец участка интегрирования (в нашей задаче будем задавать его кратно периоду собственных колебаний),

n – число точек, где ищется решение, не считая начальной. В начальной точке решение известно из начального условия,

$D(t, y)$ – функция, выдающая в виде вектора из m элементов значения первых производных неизвестных функций. t – независимая переменная (в нашем случае время), y – решение.

В результате решения задачи Коши получается матрица результатов Z .

Структурно матрица Z состоит из 3 столбцов и строк $n+1$:

1-й столбец – значения координат узлов (в нашем случае значение времени каждой точки, соответствующей границе двух участков Δt_i и Δt_{i+1} .)

2-й столбец – значение искомой функции в узлах.

3-й столбец – значение первой производной в узлах.

Для того, чтобы самостоятельно выбирать шаг численного интегрирования можно использовать функцию $rkfixed$.

Т.к. мы используем функцию $Rkadapt$, то задача Коши решается с автоматическим выбором шага, а результаты выдаются в узловых точках, соответствующих параметру n .

Также в программе MathCAD с помощью функций построения графиков строятся графики искомых переменных перемещений, являющиеся искомым решением системы 2-х линейных дифференциальных уравнений, а, следовательно, и исходного дифференциального уравнения 2-го порядка.

7. Предварительные расчеты

Прежде чем приступить к рассмотрению различных типов колебаний произведём модальный анализ конструкции, а так же определим параметры возбуждающего динамического воздействия и граничные условия для данной математической постановки задачи.

Исходные данные для модального анализа:

- 1) Длины пролётов балки $l_1=3,0$ м; $l_2=6,0$ м;
- 2) Вес двигателя $G_{ог}=60000$ н;
- 3) Модель упругости материала балки $E=3 \cdot 10^{10}$ н/м²;
- 4) Размеры поперечного сечения балки $h=0,6$ м; $b=0,4$ м;
- 5) Ускорение свободного падения $g=9,81$ м/с²;
- 6) Объёмный вес материала балки $q_6=24525$ н/м³;

Вес 1 погонного метра балки вычисляется по формуле 34:

$$q_{1н.м.} = h \cdot b \cdot q_6 \quad (34)$$

$$q_{1н.м.} = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 24525 = 5,886 \cdot 10^3 \text{ н/м}$$

Вес сосредоточенной массы и величину сосредоточенной массы найдём соответственно по формулам 34 и 35:

$$G_{m1} = G_{де} + \frac{l_1 \cdot q_{1н.м.}}{2} \quad (34)$$

$$m_1 = \frac{G_{m1}}{g} \quad (35)$$

$$G_{m1} = 60000 + \frac{3 \cdot 5,886 \cdot 10^3}{2} = 6,883 \cdot 10^4 \text{ н}$$

$$m_1 = \frac{6,883 \cdot 10^4}{9,81} = 7,016 \cdot 10^3 \text{ кг}$$

Момент инерции прямоугольного сечения балки вычисляется по формуле 36:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (36)$$

$$I = \frac{0,4 \cdot 0,6^3}{12} = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$$

Жёсткость балки на изгиб вычисляется по формуле 37:

$$E \cdot I \quad (37)$$

$$E \cdot I = 3 \cdot 10^{10} \cdot 7,2 \cdot 10^{-3} = 2,16 \cdot 10^8 \text{ н} \cdot \text{м}^2$$

Податливость по направлению динамической степени свободы вычисляется по формуле 38:

$$\delta = \frac{[l_1^2 \cdot (l_1 + l_2)]}{3 \cdot E \cdot I} \quad (38)$$

$$\delta = \frac{[3^2 \cdot (3 + 6)]}{3 \cdot 2,16 \cdot 10^8} = 1,25 \cdot 10^{-7} \text{ м/н}$$

Собственная циклическая (круговая) частота, техническая частота и период вычисляются соответственно по формулам 38, 39, 40:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta \cdot m_1}} \quad (38)$$

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \quad (39)$$

$$T = \frac{1}{f} \quad (40)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{1,25 \cdot 10^{-7} \cdot 7,016 \cdot 10^3}} = 33,767 \text{ рад/с}$$

$$f = \frac{33,767}{2 \cdot 3,14} = 5,374 \text{ Гц}$$

$$T = \frac{1}{5,374} = 0,186 \text{ с}$$

Исходные данные для определения характеристик внешнего воздействия:

- 1) Скорость вращения ротора двигателя $n=500$ об/мин;
- 2) Эксцентриситет $e=0,009$ м;
- 3) Вес ротора $G_{\text{рот}}=30000$ н;

Циклическая частота вращения двигателя вычисляется по формуле 41:

$$\theta = n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{60} \quad (41)$$

$$\theta = 500 \cdot \frac{2 \cdot 3,14}{60} = 52,36 \text{ рад/с}$$

Амплитудное значение внешней переменной силы вычисляется по формуле 42:

$$P_0 = \frac{G_{\text{рот}}}{g} \cdot e \cdot \theta^2 \quad (42)$$

$$P_0 = \frac{30000}{9,81} \cdot 0,009 \cdot 52,36^2 = 7,545 \cdot 10^4 \text{ н}$$

Определение граничных условий.

За граничные условия примем:

$$\begin{cases} u(0) = u_0 = u_{cm} \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} V(0) = V_0 = 0 \end{cases} \quad (44)$$

Где u_{cm} - прогиб сосредоточенной массы m_1 от статического воздействия центробежной силы, вычисляется по формуле 45:

$$u_{cm} = \delta \cdot P_0 \quad (45)$$

$$u_{cm} = 1,25 \cdot 10^{-7} \cdot 7,545 \cdot 10^4 = 9,431 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Окончательно граничные условия можно записать в виде:

$$\begin{cases} u(0) = u_0 = u_{cm} = 0,0094 & (46) \\ V(0) = V_0 = 0 & (47) \end{cases}$$

8. Свободные незатухающие колебания

На рисунке 5 представлен график зависимости от времени перемещения (прогибов) точки в которой сконцентрирована сосредоточенная масса, по направлению динамической степени свободы.

При свободных колебаниях вначале масса отклоняется от положения равновесия, затем удаляется внешняя нагрузка и происходят колебания. В момент протекания свободных колебаний внешняя нагрузка отсутствует. Так как рассматриваются незатухающие и свободные колебания, то амплитудные значения перемещений не меняются с течением времени.

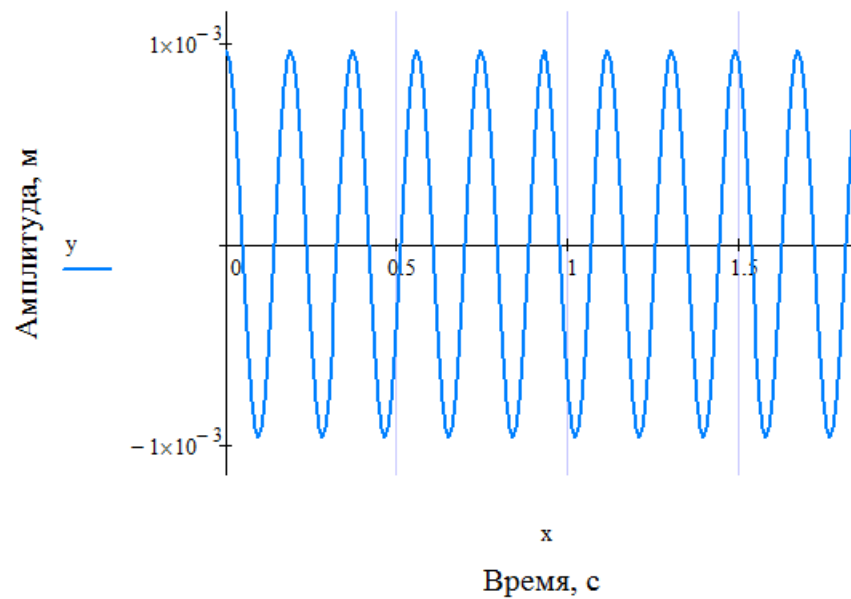


Рисунок 5. График переменного перемещения сосредоточенной массы.

Сравним графически в данном пункте решение, полученное численным методом в MathCAD с аналитическим решением уравнения движения сосредоточенной массы при свободных незатухающих колебаниях.

Аналитическое решение известно из курса «Динамика сооружений» и имеет вид:

$$u(t) = u_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{V_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (48)$$

Построим оба графика на одной координатной плоскости и сравним результаты. Графики показаны на рисунке 6.

Точками показаны точки графика точного решения.

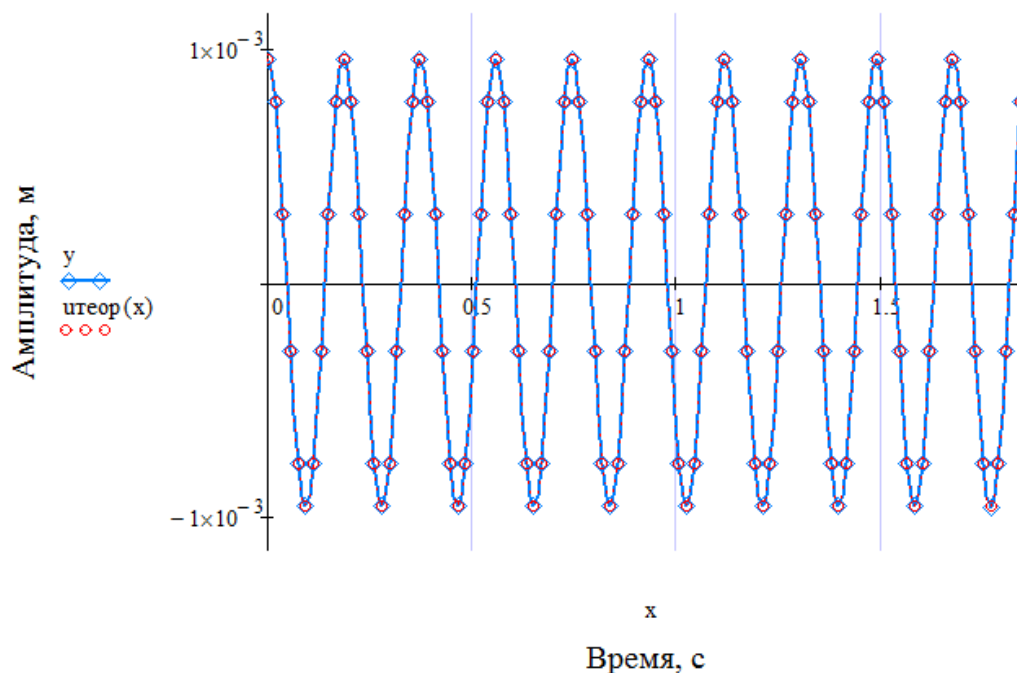


Рисунок 6. Сравнение точного решения с решением численным методом

По результатам решения данной задачи можно сказать, что решение данной задачи численным методом с данной точностью является удовлетворительным, так как результаты решения совпадают с аналитическим решением.

9. Свободные затухающие колебания

В реальных строительных конструкциях свободных незатухающих колебаний никогда не происходит. Обычно имеют место либо свободные (от удара, резкого порыва ветра), либо вынужденные (при постоянном действии рабочего оборудования) затухающие колебания. Рассмотрим в данном пункте свободные затухающие колебания.

Также, как и в первом случае, в данной задаче колебания сосредоточенной массы протекают без внешнего воздействия. Однако в связи с тем, что действуют силы внутреннего неупругого сопротивления, препятствующие сосредоточенной массе отклоняться от положения равновесия, то с течением времени амплитуда свободных колебаний уменьшается, и по прошествии достаточно длительного времени колебания прекращаются (полностью затухают).

Так же как и прочность различна для всех материалов, так же и затухание колебаний в одинаковых конструкциях из разных материалов будет различным. Оно характеризуется коэффициентом неупругого сопротивления, для которого имеются численные значения.

Продублируем таблицу 3 со значениями коэффициентов неупругого сопротивления для различных материалов.

Таблица 3. Коэффициенты неупругого сопротивления для различных материалов

Материал конструкции	Значение γ_n
Обычный железобетон	0,09
Прокатная сталь	0,025
Дерево	0,05

Рассмотрим в данном разделе одинаковые конструкции из различных материалов: из железобетона, металла и дерева.

Однако надо принять во внимание, что при расчёте реальных конструкций при неизменной конфигурации схемы, при применении различных материалов её исполнения, вообще говоря, меняются динамические характеристики расчётной схемы в связи с изменением жёсткости(модуля упругости) и

массы(объёмного веса), которые явно меняются при изменении материала. В данной работе этим изменением пренебрегаем.

На рисунке 7, 8 и 9 представлены соответственно графики зависимости перемещения (прогибов) сосредоточенной массы соответственно для стальной ($\gamma_n=0,025$), железобетона ($\gamma_n=0,09$) и дерева ($\gamma_n=0,05$).

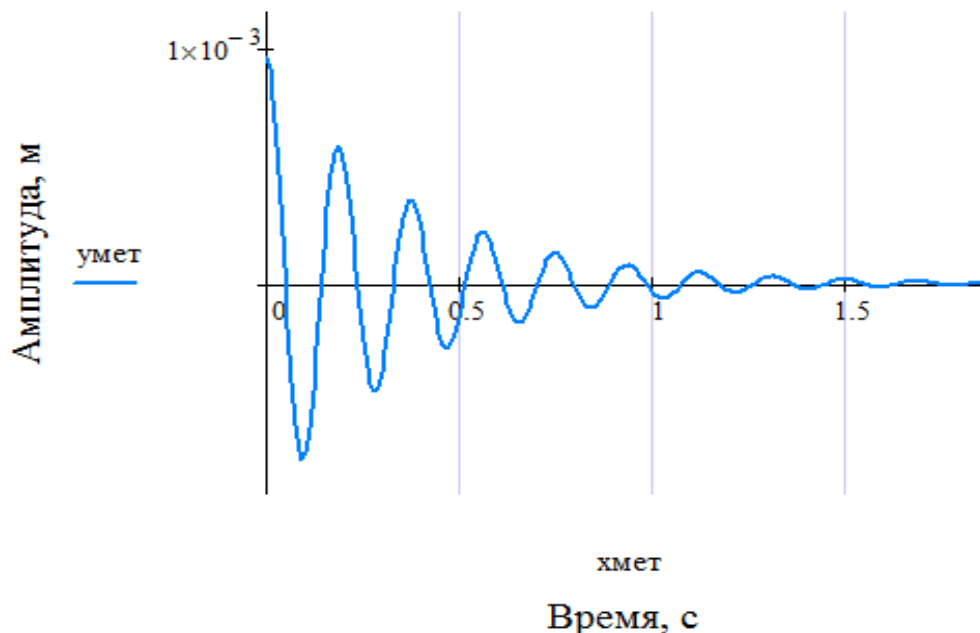


Рисунок 7. Перемещение сосредоточенной массы в стальной балке

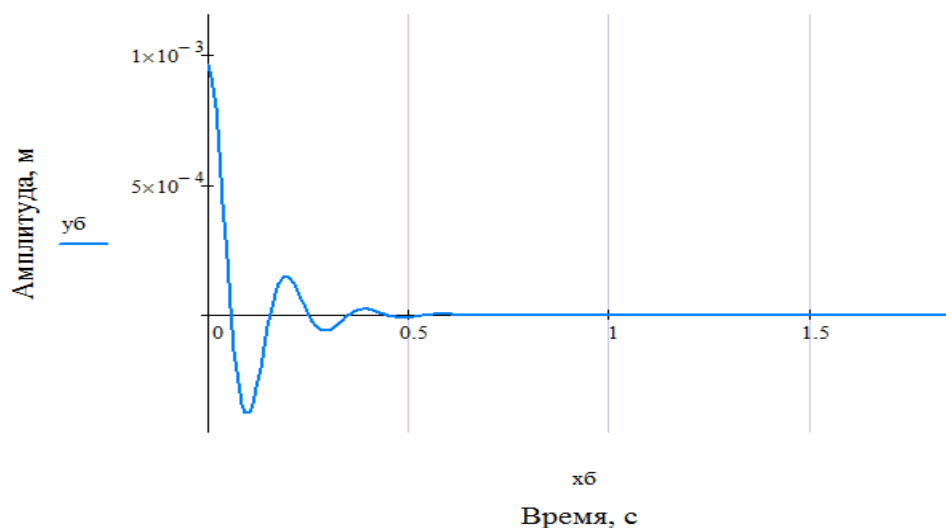


Рисунок 8. Перемещение сосредоточенной массы в бетонной балке

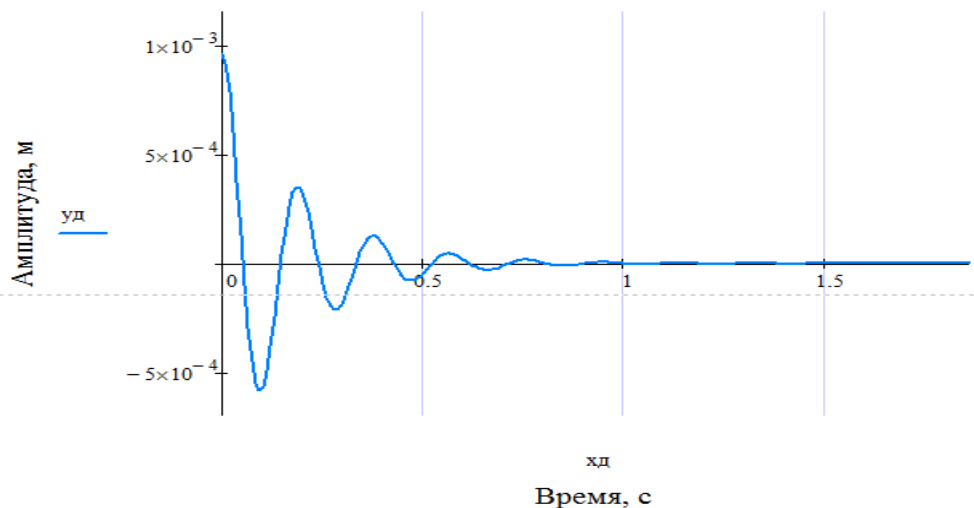


Рисунок 9. Перемещение сосредоточенной массы в деревянной балке

Приведём для сравнения на общей координационной плоскости графики перемещения сосредоточенной массы для стальной и бетонной балки. (Рисунок 10).

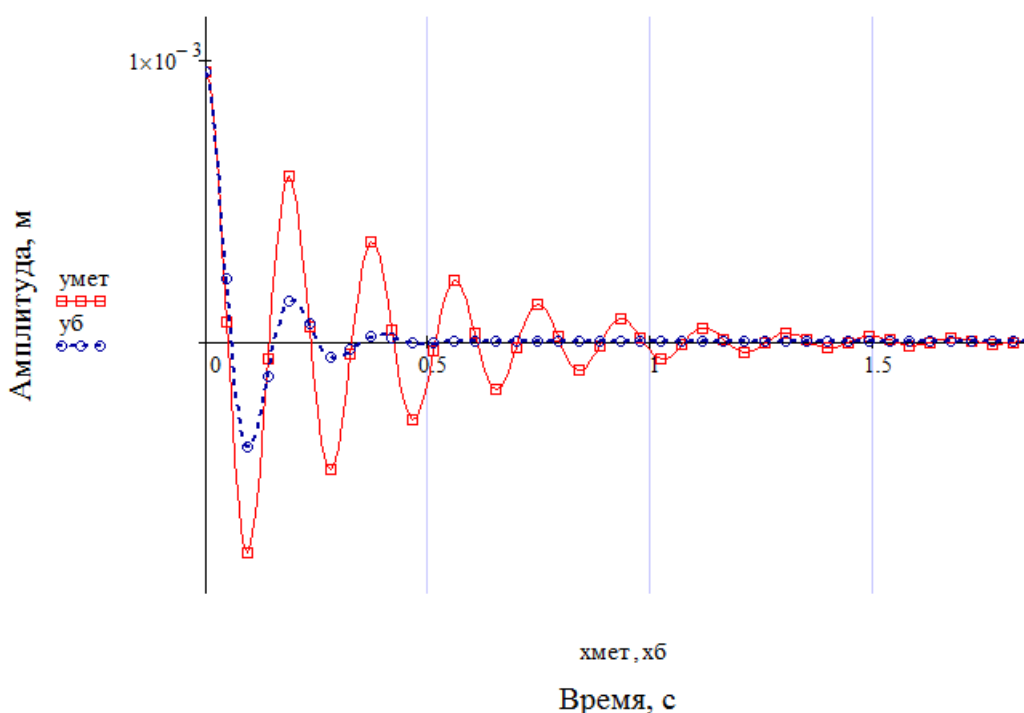


Рисунок 10. Сравнение затухания колебаний стальной и железобетонной балок

Из сравнения видно, что в конструкциях из любых материалов свободные колебания затухают, однако с разной скоростью. Чем выше коэффициент затухания, тем скорее колебания затухают. Например, в железобетонной балке с данными динамическими характеристиками полное затухание колебаний происходит уже к 4-5 периодам колебаний, в то время, как в стальной балке с теми же динамическими характеристиками полное затухание колебаний произойдёт к 11-12 периодам. Следовательно, чем больше коэффициент неупругого сопротивления материала конструкции, тем быстрее в ней затухнут свободные колебания.

10. Вынужденные колебания без учёта затухания

В общем случае внешние воздействия при вынужденных колебаниях (когда возбуждающая нагрузка действует одновременно с протеканием колебаний) можно разделить на 2 группы: гармонические внешние воздействия и не гармонические. В данной работе рассматриваются гармонические возбуждающие нагрузки от работы двигателя. Работающий установленный на балке двигатель заменяется переменной центробежной силой, закон изменения которой:

$$P(t) = P_0 \cdot \sin(\theta \cdot t) \quad (49)$$

где P_0 -амплитудное значение центробежной силы, θ -частота её изменения, t -время.

График переменного перемещения при вынужденных незатухающих колебаниях представлен на рисунке 11. Причём представлен пострезонансный период ($\theta > \omega$).

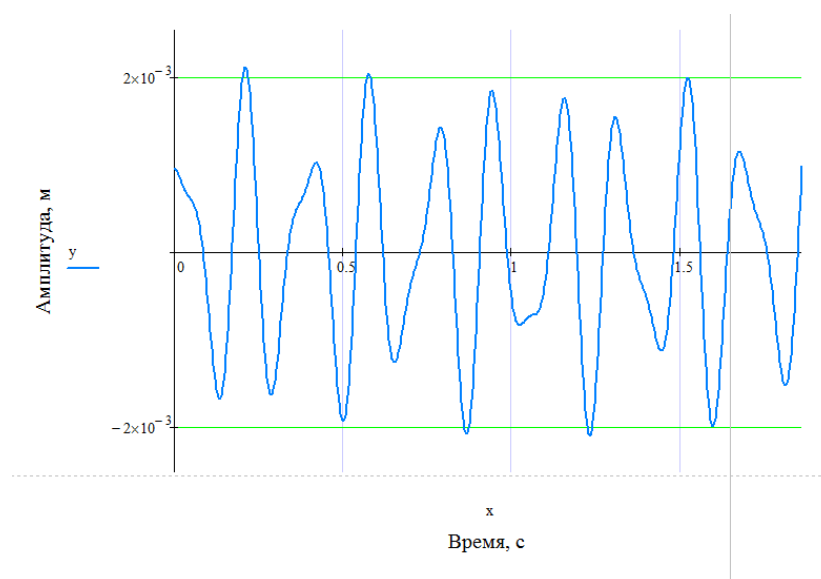


Рисунок 11. График переменного перемещения при вынужденных незатухающих колебаниях (пострезонансный период)

График переменного перемещения при вынужденных незатухающих колебаниях представлен на рисунке 12 представлен дорезонансный период ($\theta < \omega$).

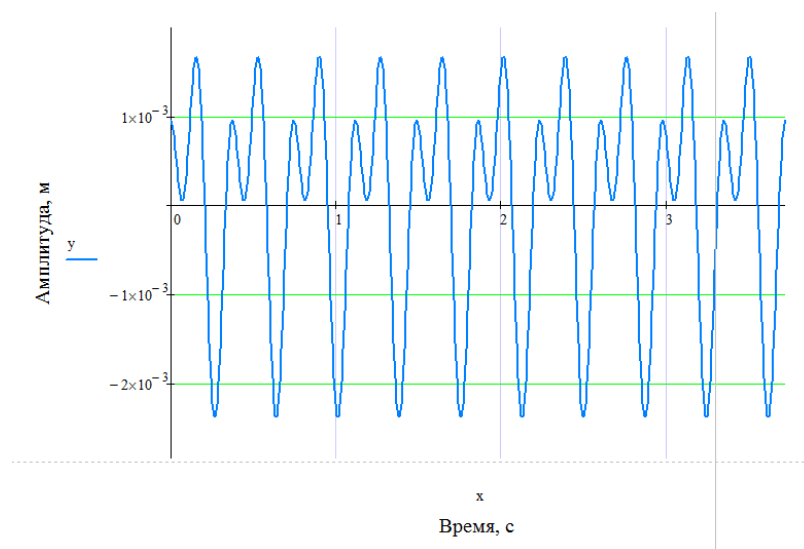


Рисунок 12. График переменного перемещения при вынужденных незатухающих колебаниях (дорезонансный период)

График переменного перемещения при вынужденных незатухающих колебаниях представлен на рисунке 13 представлен резонанс ($\theta = \omega$).

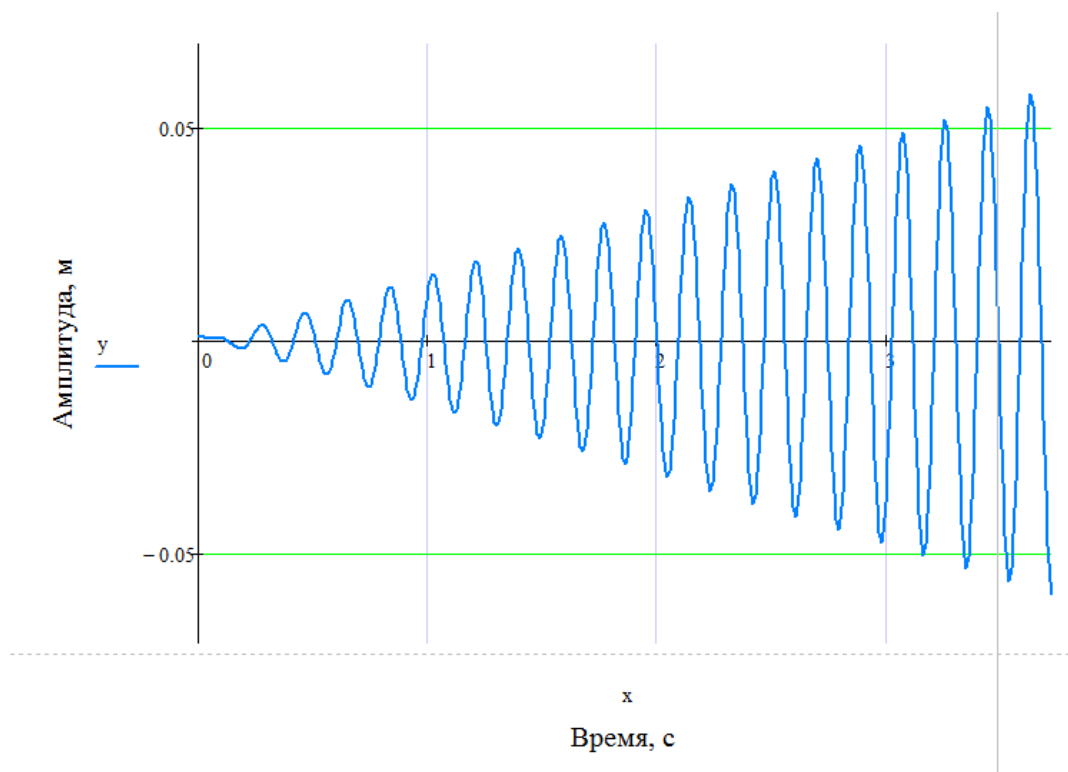


Рисунок 13. График переменного перемещения при вынужденных незатухающих колебаниях (резонанс)

Сравним, например, пострезонансный период с точным решением.

Точным решением данного уравнения (уравнения вынужденных колебаний без учёта затухания) в общем виде является решение уравнения вынужденных затухающих колебаний, с учётом того, что $\varepsilon=0$. Общий вид точного решения имеет вид:

$$\begin{aligned}
 U(t) = & (e^{-\varepsilon t}) \cdot \left[u_{cm} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{(V_0 + \varepsilon \cdot u_{cm})}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) \right] - \\
 & - (e^{-\varepsilon t}) \cdot \left[C \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{(\theta \cdot D + \varepsilon \cdot C)}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) \right] + \\
 & + [C \cdot \cos(\theta \cdot t) + D \cdot \sin(\theta \cdot t)]
 \end{aligned} \tag{50}$$

где, C и D – постоянные интегрирования:

$$C = \frac{-P_0 \cdot 2 \cdot \varepsilon \cdot \theta}{m \cdot \omega^4 \cdot \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right)^2 + 4 \cdot \varepsilon^2 \cdot \frac{\theta^2}{\omega^4} \right]} \tag{51}$$

$$D = \frac{P_0 \cdot (\omega^2 - \theta^2)}{m \cdot \omega^4 \cdot \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4 \cdot \varepsilon^2 \cdot \frac{\theta^2}{\omega^4} \right]} \quad (52)$$

где:

- первые два слагаемых – свободные затухающие колебания, происходящие с частотой ω и зависящие от начальных условий движения.

- вторые два слагаемых - свободные затухающие колебания, происходящие с частотой ω , возникающие после начала движения и называемые сопровождающимися свободными колебаниями, причём они зависят от коэффициента затухания колебаний и от соотношения возбуждающей частоты к собственной.

- последние два слагаемых – чисто вынужденные колебания с частотой θ .

Так как мы рассматриваем вынужденные колебания, но без учёта затухания, то ε во всех слагаемых будет равна нулю, а итоговый график перемещения сосредоточенной массы во времени будет являться суммой графиков 3-х типов не затухающих колебаний:

- 1) Свободных незатухающих колебаний (аналогично 1-й части нашей задачи) – представлен на рисунке 14.
- 2) Свободных сопровождающих незатухающих колебаний – представлен на рисунке 15.
- 3) Чисто вынужденных колебаний – представлен на рисунке 16.

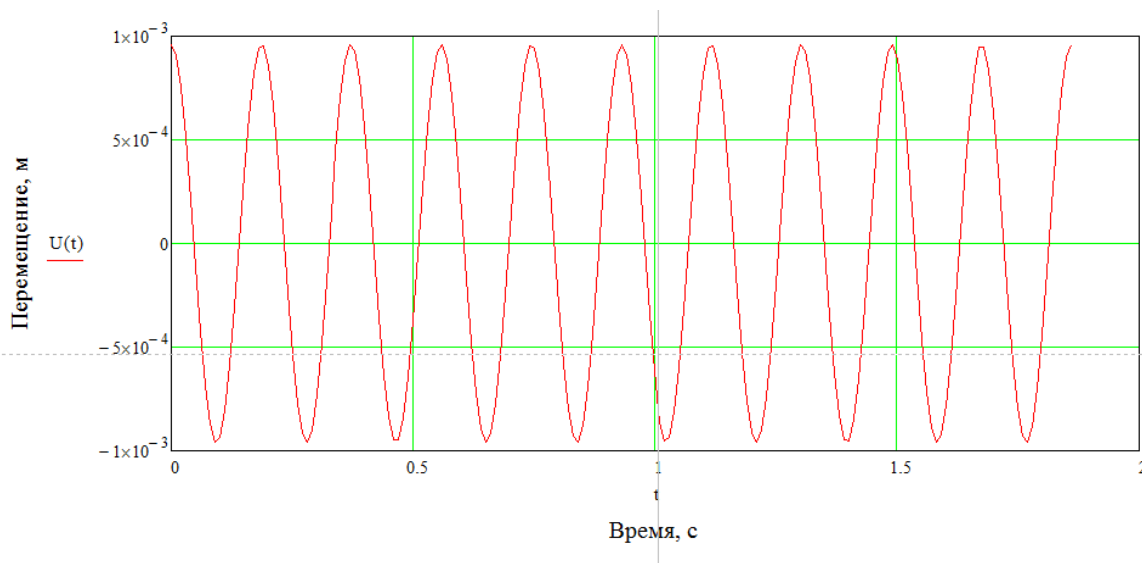


Рисунок 14. Свободные незатухающие колебания

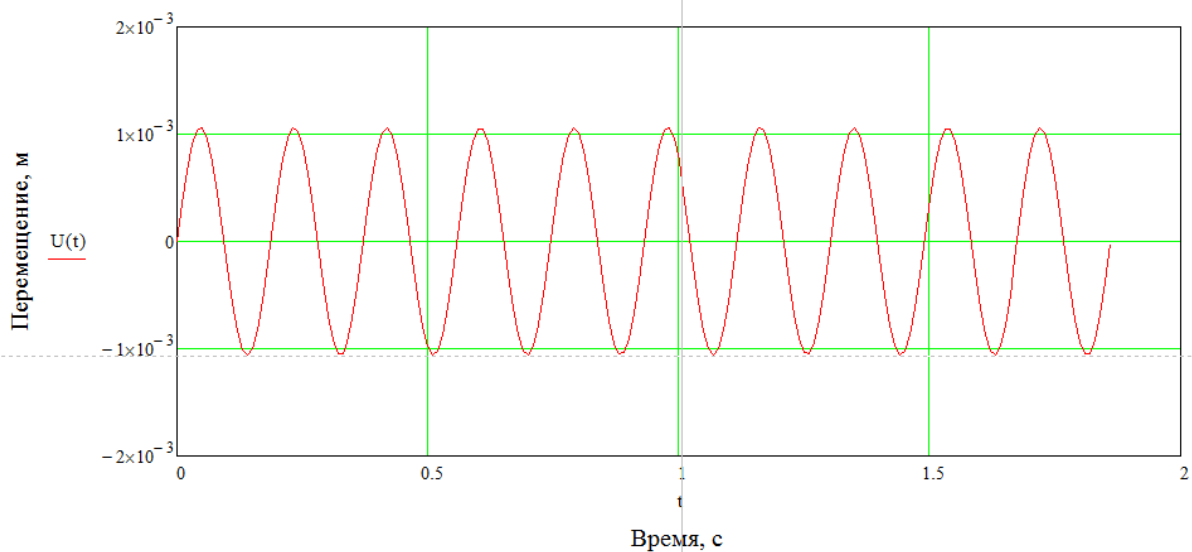


Рисунок 15. Свободные сопровождающие незатухающие колебания

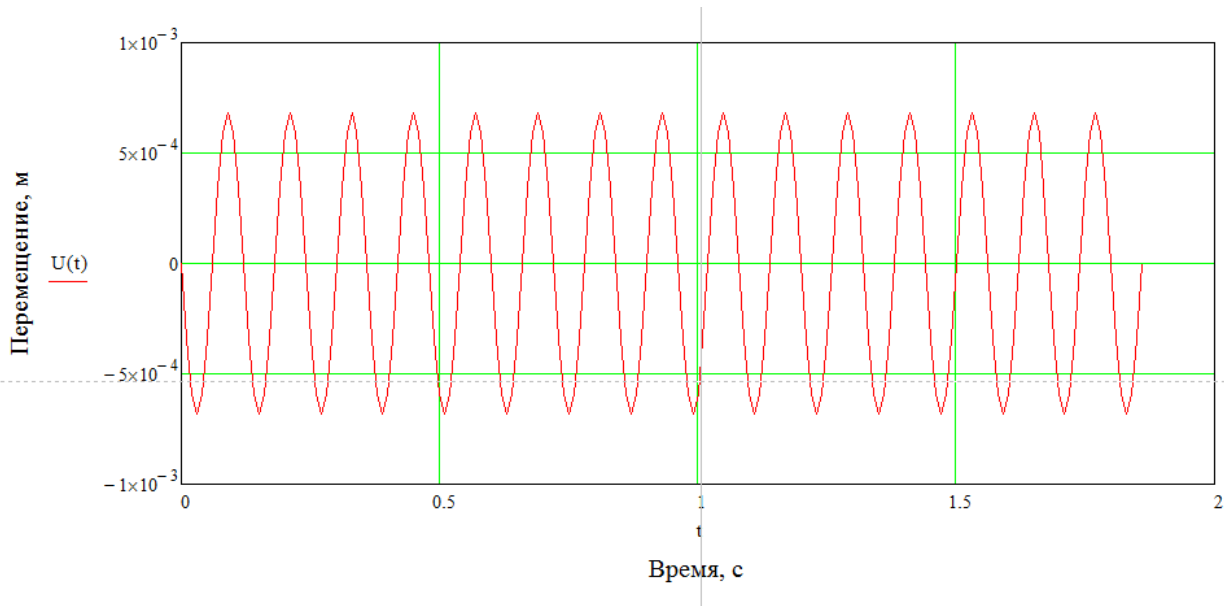


Рисунок 16. Чисто вынужденные колебания

Сумма данных трёх графиков представлена на рисунке 17.

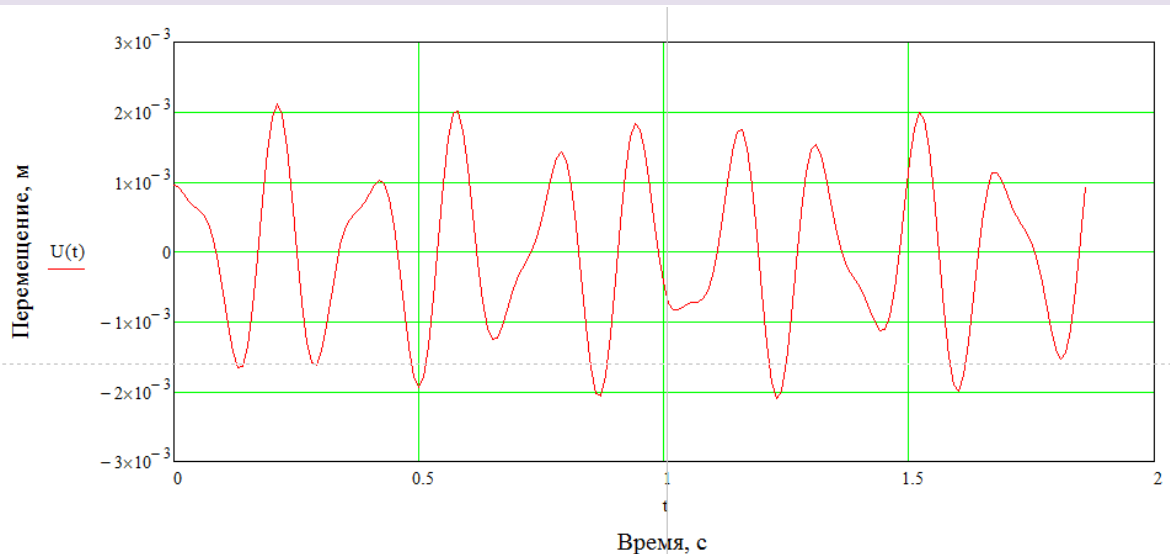


Рисунок 17. Суммарный график вынужденных незатухающих колебаний

Сравнивая рисунок 11 (решение полученной численным методом) и рисунок 17 (аналитическое решение) видно, что решение численным методом получено с достаточной точностью.

Так же из данного пункта件но, что при совпадении частот внешней возбуждающей нагрузки и собственной частоты балки (при резонансе) и при отсутствии затухания амплитуда перемещений (прогибов) сосредоточенной массы увеличивается до бесконечности (в реальности до полного разрушения конструкции).

11. Вынужденные колебания с учётом затухания

В реальном мире имеют место вынужденные колебания с учётом затухания. Любой материал в большей или меньшей степени поглощает энергию колебаний.

На рисунке 18 представлен график зависимости перемещения от времени при вынужденных, затухающих колебаниях, при нерезонансной ситуации.

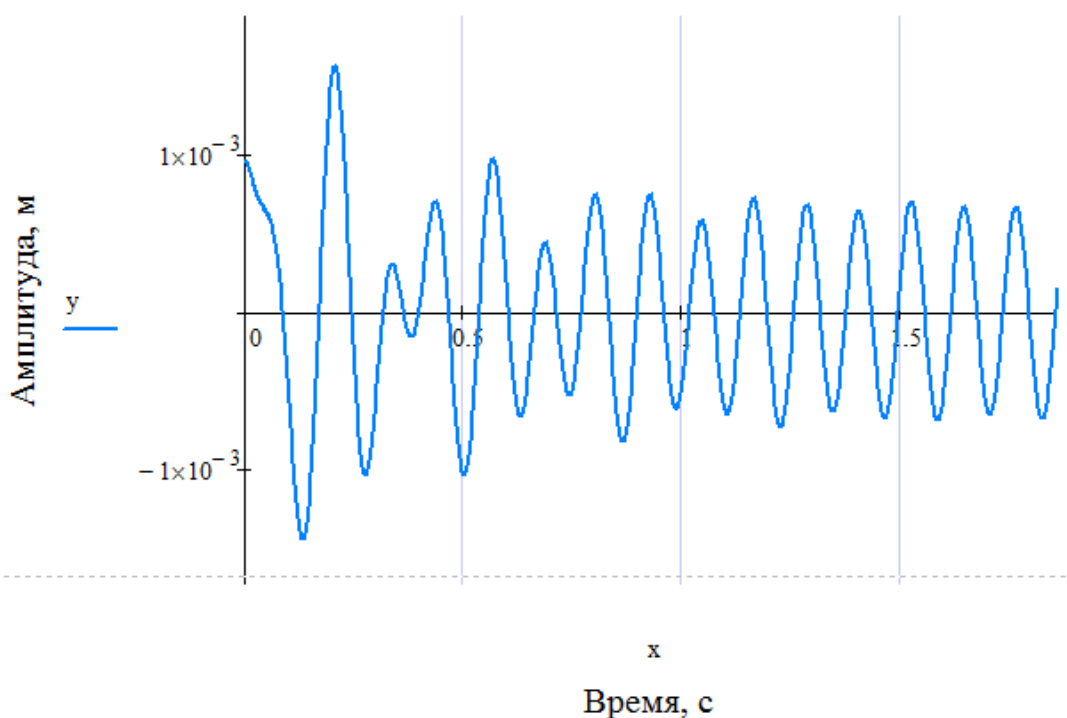


Рисунок 18. Вынужденные колебания с учётом затухания в стальной балке (не резонанс, $\Theta > \omega$)

Видно, что с течением времени собственные свободные и сопровождающиеся колебания затухают и восстанавливаются колебания с частотой равной возбуждающей частоте θ .

При резонансе – рисунок 19 при возрастании общей амплитуды происходит то же самое, устанавливаются вынужденные колебания с частотой θ .

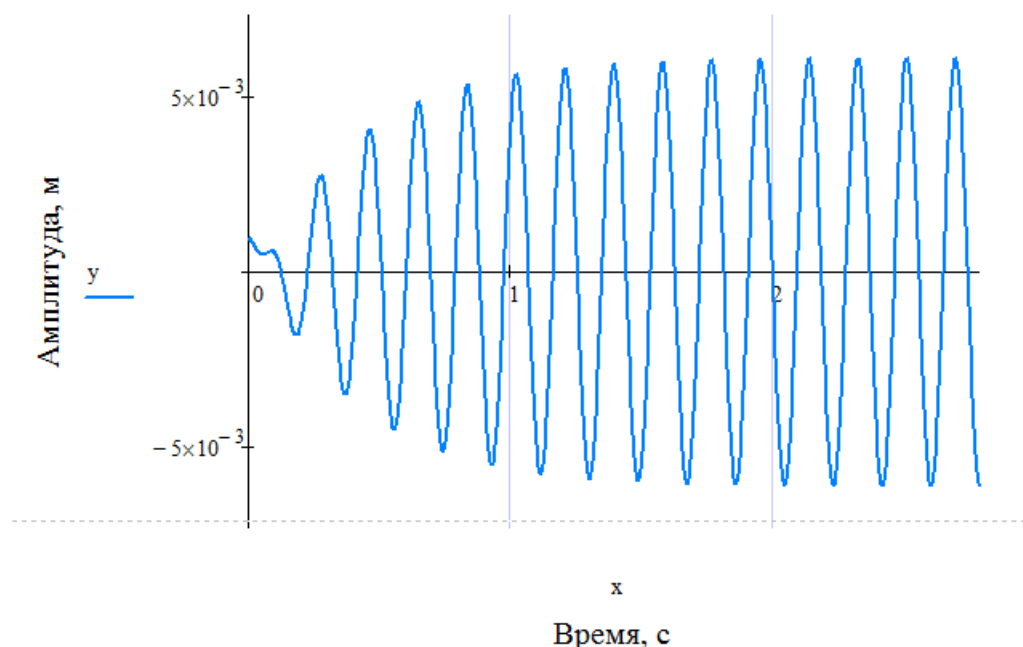


Рисунок 19. Вынужденные колебания с учётом затухания в стальной балке (резонанс)

При сравнении рисунков 18 и 19 видно, что при резонансе амплитуда установившихся вынужденных колебаний значительно (более чем в 5 раз) больше, чем при нерезонансном воздействии.

Во время от начала отсчёта ($t=0$ с) до момента установившихся колебаний ($t \approx 2$ с) происходят неустановившиеся колебания, так называемый переходный процесс.

12. Коэффициент динамичности

Сравним в данном пункте значение динамического коэффициента, полученного численным методом со значением, рассчитываемым по формуле из курса «Динамика сооружений».

По графику на рисунке 20 и по таблице 3 (по которой график и построен) найдём максимальную амплитуду, при установившихся колебаниях.

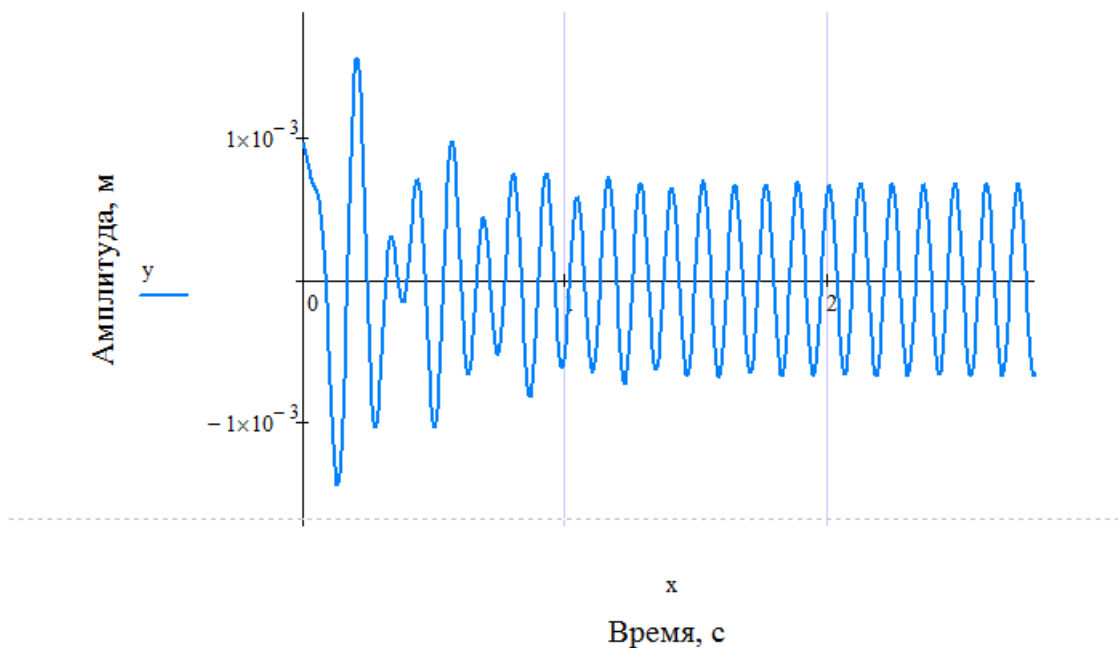


Рисунок 20. Вынужденные затухающие колебания в стальной балке

Таблица 4. Значения функции перемещения при различных t.

	0	1	2
711	1.984	$2.578 \cdot 10^{-4}$	0.032
712	1.987	$3.453 \cdot 10^{-4}$	0.03
713	1.99	$4.254 \cdot 10^{-4}$	0.027
714	1.993	$4.964 \cdot 10^{-4}$	0.024
715	1.996	$5.566 \cdot 10^{-4}$	0.02
716	1.998	$6.049 \cdot 10^{-4}$	0.015
717	2.001	$6.402 \cdot 10^{-4}$	0.01
718	2.004	$6.618 \cdot 10^{-4}$	$5.203 \cdot 10^{-3}$
719	2.007	$6.692 \cdot 10^{-4}$	$7.357 \cdot 10^{-5}$
720	2.01	$6.622 \cdot 10^{-4}$	$-5.055 \cdot 10^{-3}$
721	2.012	$6.41 \cdot 10^{-4}$	-0.01
722	2.015	$6.062 \cdot 10^{-4}$	-0.015
723	2.018	$5.583 \cdot 10^{-4}$	-0.019
724	2.021	$4.985 \cdot 10^{-4}$	-0.023

По данной таблице видно, что при установлении колебаний максимальная амплитуда перемещения равна $6,692 \cdot 10^{-3}$ м.

Динамический коэффициент или коэффициент динамичности показывает во сколько раз динамическое воздействие отличается от статического. Значение динамического коэффициента найдём по формуле 53, вытекающей из его определения:

$$\beta = \frac{U_{\max}^{\text{дин}}}{U^{\text{ст}}} \quad (53)$$

При условии, что максимальное $U_{\max}^{\text{дин}} = 6,692 \cdot 10^{-3}$ м, а $U^{\text{ст}} = 9,431 \cdot 10^{-3}$ м, получим:

$$\beta = \frac{6,692 \cdot 10^{-3}}{9,431 \cdot 10^{-3}} = 0,7096$$

Определим теперь значение динамического коэффициента, используемого в курсе «Динамики сооружений» по формуле 54:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \gamma_n^2 \cdot \frac{\theta^2}{\omega^2}}} \quad (54)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{52,36^2}{33,767^2}\right)^2 + 0,025^2 \cdot \frac{52,36^2}{33,767^2}}} = 0,7118$$

Вычислим ошибку в процентах:

$$\varphi = \frac{|\Delta\beta|}{|\beta_{\min}|} \cdot 100\% \quad (55)$$

$$\varphi = \frac{|0,7118 - 0,7096|}{0,7118} \cdot 100\% \approx 0,3\%$$

Погрешность невелика и возникает из-за того, что при определении максимальной амплитуды по графику мы взяли не истинное её максимальное значение, а лишь близкое к нему. Для повышения точности необходимо использовать функция `rkfixed` и задать такой шаг, чтобы граница 2-х соседних участков вблизи максимума соответствовала этому максимуму.

13. Выводы

- 1) Выбранный метод реализации численного метода решения дифференциальных уравнений движения сосредоточенных масс методом Рунге-Кутты является удовлетворительным и может быть применён на практике для решения инженерных задач, т.к. решение, полученное с его использованием, с достаточной точностью совпадает с точным, аналитическим решением.
- 2) При затухающих колебаниях затухание происходит быстрее при большем коэффициенте неупругого сопротивления материала. Чтобы быстрее погасить свободные колебания в конструкции нужно использовать монолитный железобетон, если же допускается длительное гашение свободных колебаний для материала конструкции можно использовать сталь.
- 3) При вынужденных колебаниях с учётом затухания в любом случае по прошествии определённого времени (времени полного затухания свободных и сопровождающих колебаний) устанавливаются

постоянные колебания, с частотой внешней возмущающей силы. Причём при резонансе амплитуда установившихся колебаний сосредоточенной массы много больше, чем при отсутствии резонанса.

- 4) Решая задачу численными методами ошибка в определении динамического коэффициента приближенно равна 0,3% и не является критичной. Это ещё раз подтверждает целесообразность использования данного метода для расчёта строительных конструкций на практике.
- 5) Так же анализируя результаты рассмотрения вынужденных колебаний без учёта затухания и с учётом затухания очевидно, что решалась не вполне корректная задача. Внешняя возмущающая нагрузка задавалась таким образом, что двигатель начиная с момента времени $t=0$ с сразу же вращался с номинальной частотой θ . В реальности до момента набора двигателем номинальных оборотов происходит его разгон, т.е. частота внешней возмущающей нагрузки меняется (растёт) во времени со значения 0, до номинального. В нашем случае рассматривались колебания с работающим двигателем, без учёта его пуска.

Литература

- [1]. Бирбраер А.Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость. СПб.: Наука. 1998. 254 с.
- [2]. Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. Сборник статей. М.: Наука. 1964.
- [3]. Доев В.С., Доронин Ф.А., Индейкин А.В. Теория колебаний в транспортной механике (под ред. А. В. Индейкина). М.: ФГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте». 2011. 352 с.
- [4]. Горелов Ю.Н. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге – Кутты): учеб. пособие. Самара: Самарский университет. 2006. 48 с.
- [5]. Барштейн М.Ф., Ильичев В.А., Коренев Б.Г. Динамический расчет зданий и сооружений. М.: Стройиздат, 1984.
- [6]. Бертяев В.Д. Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум. СПб: БХВ-Петербург. 2005. 752 с.
- [7]. Булатов Л.А., Бертяев В.Д., Киреева А.Е. Динамическое поведение плоских шарнирных механизмов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2012. №6. С. 23-27.
- [8]. Константинов И.А., Лалина И.И. Строительная механика. Расчет стержневых систем. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2005. 155 с.
- [9]. Киселев В.А. Строительная механика: Специальный курс (динамика и устойчивость сооружений). М.: Стройиздат. 1980.
- [10]. Розин Л.А., Константинов И.А., Смелов В.А. Расчет статически определимых систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. — 228 с.
- [11]. Денисов Г.В., Лалин В.В. О сплошном спектре колебаний балочных элементов конструкции при высокочастотных воздействиях // Инженерно-строительный журнал. 2012. Т. 27. №1. С. 91-97.
- [12]. Vatin N. I, Sinelnikov A. S. Strength and durability of thin-walled cross-sections // Design, fabrication and economy of metal structures. 2013. Pp. 165-170.
- [13]. Зарубин П.Е., Барановский М.Ю., Тарасов В.А. Teklastructures – инновация в создании конструкций // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2013. № 5. С.1-8.
- [14]. Mrdak Ivan, Rakosevic Marina, Zugic Ljiljana, Usmanov Rustam, Murgul Vera, Vatin Nikolay. Analysis of the influence of dynamic properties of structures on seismic response according to Montenegrin and European regulations. 2014. Vol. 633-634. Pp. 1069-1076.
- [15]. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
- [16]. Ватин Н.И., Синельников А.С. Большепролетные надземные пешеходные переходы из легкого холодногнутого стального профиля // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2012. №1. С. 47-52.
- [17]. Лалин В.В. Уравнения нелинейной динамики моментной упругой среды // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 2007. Т. 1. №49. С. 97-105.
- [18]. Индейцев Д.А., Кузнецов Н.Г., Мотыгин О.В., Мочалова Ю.А. Локализация линейных волн. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета. 2007. 342 с.
- [19]. Абдикаримов Р.А., Эшматов Х., Бобаназаров Ш.П., Ходжаев Д.А., Эшматов Б.Х. Математическое моделирование и расчет гидротехнических сооружений типа плотины-пластины с учетом сейсмической нагрузки и гидродинамического давления воды // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 3. С. 59-70.
- [20]. Денисов Г.В. К вопросу о локализации колебаний в строительных конструкциях // Инженерно-строительный журнал. 2012. Т. 31. № 5. С. 60-64.
- [21]. Тарасов В.А., Барановский М.Ю., Павлушкина Ю.Е., Мелещенков Л.С., Шакиров Р.М., Имескенов Т.Л., Загидуллина Э.Г. Сравнение результатов сейсмического расчёта по СНиП II-7-81* 1995 года и по СП 14.13330.2014 // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 1. С. 52-73.
- [22]. Барановский М.Ю., Тарасов В.А. Стандартизированные ферменные конструкции с уклоном 10% пролётами 24, 30, 36 метров // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2014. № 7. С.93-101.

Single degree of freedom frame structure movements

V.A. Tarasov¹, M.Yu. Baranovskiy², I.A. Duvanova³, I.D. Salmanov⁴, Yu.Ye. Pavluskina⁵

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29 Polytechnicheskaya st., St.Petersburg, 195251, Russia.

ARTICLE INFO

Original research article

Article history

Received 31 May 2014
Accepted 11 June 2015

Keywords

dynamics of constructions,
harmonious influence,
dynamism coefficient,
free fluctuations,
compelled fluctuations,
fluctuations taking attenuation into
account,
MathCAD,
numerical methods of the calculation

ABSTRACT

The article reviews a behavior of statically determinate framed structure (или ... framed one-degree structure) with one degree under different types of oscillation: -free undamped oscillations; -free damped oscillations; -constrained oscillations excluding damping; -constrained oscillations including damping. There are two primary objectives are set in the article. First one is the review of each of oscillations separately, and second one is the investigation of influence of different factors on it. Objectives are solved with numerical method of Runge-Kutta realized on Mathcad software. The comparison and the analysis of influence of coefficient of inelastic resistance of material (or construction) and frequency of external action is based on time-varying concentrated mass movement's diagram found as a result. External action is harmonic.

1

Corresponding author:

+7 (952) 201 0537, vtarasov3766@yandex.ru u (Vladimir Aleksandrovich Tarasov, Graduate Student)

2

+7 (921) 407 7354, bm_y@mail.ru (Mikhail Yurievich Baranovskiy, Graduate Student)

3

+7 (921) 799 6988, duvanova.i@mail.ru (Irina Aleksandrovna Duvanova, Graduate Student)

4

+7 (911) 843 3426, ildussalmanov@gmail.com (Ildus Dinislamovich Salmanov, Student)

5

+7 (967) 510 5967, pearlblack@mail.ru (Yuliya Yevgenyevna Pavlushkina, Student)

References

- [1]. Birbrayer A.N. *Raschet konstruksiy na seymostoykost. Spb.* [Calculation of designs on seismic stability – SPb.]: Nauka. 1998. 254 p. (rus)
- [2]. *Chislennye metody resheniya differentsial'nykh i integral'nykh uravnenij i kvadrurnye formuly.* [Numerical methods for solving differential and integral equations and quadrature formulas.] A collection of articles. Moscow: Nauka. 1964. 354 p.
- [3]. Doev V.S., Doronin F.A., Indeikin A.V. *Teorija kolebanij v transportnoj mehanike (pod red. A. V. Indeikina). M.: FGOU «Uchebno-metodicheskij centr po obrazovaniju na zheleznodorozhnom transporte».* 2011. 352 p. (rus)
- [4]. Gorelov Ju.N. *Chislennye metody resheniya obyknovennykh differencial'nykh uravnenij (metod Runge – Kutta): ucheb. posobie. Samara: Samarskij universitet.* 2006. 48 p. (rus)
- [5]. Barshteyn M.F., Ilichev V.A., Korenev B.G. *Dinamicheskij raschet zdaniy i sooruzhenij* [Dynamic calculation of buildings and constructions]. M.: Stroyizdat, 1984. (rus)
- [6]. Bertjaev V.D. *Teoreticheskaja mehanika na baze Mathcad. Praktikum. Uchebnoe posobie. SPb: BHV-Peterburg.* 2005. 752 p. (rus)
- [7]. Bulatov L.A., Bertjaev V.D., Kireeva A.E. *Dinamicheskoe povedenie ploskih sharnirnykh mehanizmov // Izvestija Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tehnicheskie nauki.* 2012. No. 6. Pp. 23-27. (rus)
- [8]. Konstantinov I.A., Lalina I.I. *Stroitel'naya mekhanika. Raschet sterzhnevnykh system* [Construction mechanics. Calculation of rod systems]. Spb.: Izd-vo Politekhn. un-ta. 2005. 155 p. (rus)
- [9]. Kiselev V.A. *Stroitel'naya mekhnika: Spetsialnyy kurs (dinamika i ustoychivost sooruzhenij)* [Construction mekhnika: Special course (dynamics and stability of constructions)]. M.: Stroyizdat, 1980. (rus)
- [10]. Rozin L.A., Konstantinov I.A., Smelov V.A. *Raschet staticheski opredelimykh system* [Calculation of statically definable systems]. L.: Izd-vo LGU. 1984. 228 p. (rus)
- [11]. Denisov G.V., Lalin V.V. *O sploshnom spektre kolebanij balochnykh jelementov konstrukcii pri vysokochastotnykh vozdejstvijah // Magazine of Civil Engineering.* 2012. Vol. 27. No. 1. Pp. 91-97. (rus)
- [12]. Vatin N. I, Sinelnikov A. S. *Strength and durability of thin-walled cross-sections // Design, fabrication and economy of metal structures.* 2013. Pp. 165-170.
- [13]. Zarubin P.Ye., Baranovskiy M., Tarasov V.A. *Tekla structures – innovatsiya v sozdanii konstruksiy* [Tekla structures – an innovation in creation of designs] // *Construction of Unique Buildings and Structures.* 2013. No. 5. Pp. 1-8. (rus)
- [14]. Mrdak Ivan, Rakocevic Marina, Zugic Ljiljana, Usmanov Rustam, Murgul Vera, Vatin Nikolay. *Analysis of the influence of dynamic properties of structures on seismic response according to Montenegrin and European regulations.* 2014. Vol. 633-634. Pp. 1069-1076.
- [15]. Timoshenko S.P. *Kolebanija v inzhenernom dele. M.: Nauka,* 1967. 444 p. (rus)
- [16]. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. *Bolsheproletnyye nadzemnyye peshehodnyye perekhody iz legkogo kholodnognutogo stalnogo profilya* [Wide-span elevated crosswalks from an easy holodnognuty steel profile] // *Stroitelstvo unikalnykh zdaniy i sooruzhenij.* 2012. No. 1. Pp. 47-52. (rus)
- [17]. Lalin V.V. *Uravenenija nelinejnoj dinamiki momentnoj uprugoj sredy // Nauchno-tehnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta.* 2007. Vol. 1. No. 49. Pp. 97-105. (rus)
- [18]. Indejev D.A., Kuznecov N.G., Motygin O.V., Mochalova Ju.A. *Lokalizacija linejnykh voln.* SPb.: Izd-vo Sankt-Peterburgskogo universiteta. 2007. 342 p. (rus)
- [19]. Abdikarimov R.A., Jeshmatov H., Bobanazarov Sh.P., Hodzhaev D.A., Jeshmatov B.H. *Matematicheskoe modelirovanie i raschet gidrotehnicheskikh sooruzhenij tipa plotiny-plastiny s uchetom sejsmicheskoy nagruzki i gidrodinamicheskogo davlenija vody // Magazine of Civil Engineering.* 2011. No. 3. Pp. 59-70. (rus)
- [20]. Denisov G.V. *K voprosu o lokalizacii kolebanij v stroitel'nykh konstrukcijah // Magazine of Civil Engineering.* 2012. Vol. 31. No. 5. Pp. 60-64. (rus)
- [21]. Tarasov V.A., Baranovskiy M.Yu., Pavlushkina Yu.E., Meleshchenkov L.S., Shakirov R.M., Imeskenov T.L., Zagidullina E.G. *Sravneniye rezultatov seysmicheskogo rascheta po SNIIP II-7-81* 1995 goda i po SP 14.13330.2014* [Comparison of the seismic calculation results according to SNIIP II-7-81* 1995 and SP 14.13330.2014] // *Construction of Unique Buildings and Structures.* 2015. № 1. Pp. 52-73. (rus)

[22]. Baranovskiy M., Tarasov V. *Standartizirovannyye fermennyye konstruksii s uklonom 10% proletami 24, 30, 36 metrov* [The standardized farm designs with a bias of 10% flights 24, 30, 36 meters]// Construction of Unique Buildings and Structures. 2014. № 7. Pp. 93-101. (rus)

Тарасов В.А., Барановский М.Ю., Дуванова И.А., Сальманов И.Д., Павлушкина Ю.Е. Колебания стержневой системы с одной степенью свободы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. №10(37). С. 53-80.

Tarasov V.A., Baranovskiy M.Yu., Duvanova I.A., Salmanov I.D., Pavluskina Yu.Ye. Single degree of freedom frame structure movements. Construction of Unique Buildings and Structures, 2015, 10(37), Pp. 53-80. (rus)