

## Особенности применения эндохронной теории пластичности для изучения деформирования геоматериалов и строительных материалов

### Peculiarities of the application of endochronic theory of plasticity to study the deformation of soils and building materials

**д.т.н., профессор Мельников Борис Евгеньевич**  
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет  
kafedra@ksm.spbstu.ru  
Санкт-Петербурге  
Российская Федерация

**D. Sc, Professor Boris Evgenievich Melnikov**  
Saint-Petersburg State Polytechnical University  
kafedra@ksm.spbstu.ru  
Saint-Petersburg  
Russian Federation

**к.т.н., доцент Чернышева Наталия Вячеславовна**  
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет  
chernat0000@mail.ru  
Санкт-Петербурге  
Российская Федерация

**Ph. D, Associate professor Natalia Vyacheslavovna Chernysheva**  
Saint-Petersburg State Polytechnical University  
chernat0000@mail.ru  
Saint-Petersburg  
Russian Federation

**ст.преподаватель Подгорная Надежда Вячеславовна**  
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет  
nadezdapodgornaya@gmail.com  
Санкт-Петербурге  
Российская Федерация

**Assistant professor Nadezda Vyacheslavovna Podgornaya**  
Saint-Petersburg State Polytechnical University  
nadezdapodgornaya@gmail.com  
Saint-Petersburg  
Russian Federation

**ст.преподаватель Чигарева Ирина Николаевна**  
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет  
ya.irina2311822@yandex.ru  
Санкт-Петербурге  
Российская Федерация

**Assistant professor Irina Nikolaevna Chigareva**  
Saint-Petersburg State Polytechnical University  
ya.irina2311822@yandex.ru  
Saint-Petersburg  
Russian Federation

**Ключевые слова:** теория пластичности, эндохронный подход, мера внутреннего времени, определяющие соотношения, строительные материалы.

В работе приведен аналитический обзор основополагающих и современных работ, посвященных эндохронной теории пластичности.

На основе анализа основных положений эндохронной теории пластичности сделан вывод о рациональности применения этой теории при расчете напряженно-деформированного состояния геоматериалов и строительных материалов.

Актуальность разработок неклассических теорий пластичности, ориентированных на расчет деформирования геоматериалов и строительных материалов, определяется, в частности, отказом от построения поверхности нагружения по допуску на величину остаточной деформации, что крайне затруднительно для указанных материалов.

**Key words:** theory of plasticity, endochronic approach, the intrinsic time measure, constitutive equations, building materials.

This article contains an analytical overview of the basic and modern works on endochronic theory of plasticity.

Rationality of this theory using for stress-strain state of soils and building materials studying is concluded by means of analysis of the basic tenets of endochronic theory. This non-classic theory of plasticity is useful for strain analysis of such materials because it is not based on the construction of the loading surface for admission to the residual strain. Such a construction is very difficult for these materials.

В ряде работ (например, [1]), высказывается мнение о том, что применение эндохронной теории пластичности рационально для исследования деформирования грунтов и строительных материалов. Рассмотрим некоторые особенности эндохронной теории пластичности.

Построение определяющих соотношений без использования одного из базовых принципов классической теории пластичности – концепции поверхности текучести осуществляется в рамках эндохронной теории пластичности, предложенной Валанисом К. С. [2] в 1971 году. Связь между напряжениями и деформациями в этой теории осуществляется на основе введения функционала наследственного типа, позволяющего описывать нагружение и разгрузку единой системой уравнений.

В случае начально изотропного материала и изотермических условий деформирования определяющие уравнения эндохронной теории пластичности могут быть представлены в виде

$$\mathbf{S} = 2 \int_0^z M(z-z') \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial z'} dz' . \quad (1)$$

Для интегрального ядра  $M(z)$  принимается представление

$$M(z) = \mu \sum_{k=1}^n C_k e^{-\alpha_k z} , \quad (2)$$

$$C_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^n C_k = 1, \quad \alpha_k \geq 0, \quad (3)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига.

Внутреннее время  $z$  определяется на основе меры  $\zeta$ , которая представляет собой длину пути, пройденного состояниями материала в пятимерном пространстве приведенных деформаций  $\boldsymbol{\eta}$ , являющихся линейной комбинацией девиаторов тензоров деформации  $\mathbf{e}$  и напряжения  $\mathbf{S}$

$$dz = \frac{d\zeta}{f(\zeta)} , \quad (4)$$

$$d\zeta = \sqrt{\frac{2}{3}} d\boldsymbol{\eta} \cdot d\boldsymbol{\eta} , \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{e} - \frac{\chi}{2\mu} \mathbf{S} , \quad (6)$$

где  $\chi$  – дополнительный параметр модели,  $\chi \in [0;1]$ .

Теория не использует в общем случае понятие поверхности нагружения, и неупругие деформации находятся через скалярную неубывающую переменную  $z$ , которая называется "внутренним временем". В настоящее время в качестве меры  $dz$  обычно используют следующее выражение:

$$dz = f(\xi)^{-1} d\xi, \quad d\xi = \left\| de - \frac{\chi}{2\mu} dS \right\| \quad (7)$$

где  $S$ ,  $e$  – девиаторы тензоров напряжений и полных пластических деформаций;  $\mu$  – модуль сдвига;  $0 \leq \chi \leq 1$ ;  $f$  – функция упрочнения.

Определяющие уравнения для начально изотропного материала в эндохронной теории пластичности могут быть записаны в виде

$$S = \int_0^z J(z, z') \frac{\partial e}{\partial z'} dz', \quad (8)$$

где  $J$  – ядро, определяющее свойства материала.

Конкретизация вида ядра приводит к соотношениям

$$S = 2 \int_0^z M(z, z') \frac{\partial e}{\partial z'} dz', \quad (9)$$

При этом для интегрального ядра  $M(z)$  обычно принимают зависимость

$$M(z) = \mu \sum_{k=1}^n C_k \exp(-\alpha_k z); \quad (10)$$

$$C_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^n C_k = 1, \quad \alpha_k \geq 0.$$

Чаще всего предполагается, что объемные деформации могут быть найдены из закона Гука

$$tr \sigma = 3Ktr \epsilon, \quad (11)$$

где  $tr \sigma$ ,  $tr \epsilon$  – шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $K$  – объемный модуль упругости.

Связь и отличия эндохронной теории пластичности от теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина показаны в [3, 4]. Если в последней из названных теорий геометрия процесса деформирования учитывается зависимостью от нее ядра, то в первой явным образом это никак не учитывается. Этот дефект предлагается устранить в работе [3] заданием

$$dz = f(s, \{\beta\}) ds,$$

где  $f$  – функция упрочнения,  $\{\beta\}$  – совокупность параметров, обеспечивающих учет сложности процессов деформации,  $s$  – длина дуги траектории деформации.

При этом отмечается, что для установления вида функции  $f$  и параметров необходимо дополнительное исследование. Для задания  $f$  и  $\{\beta\}$  предлагается использовать гипотезу локальной определенности.

Следует иметь в виду, что при  $f=1$  соотношения эндохронной теории совпадают с уравнениями Прандтля–Рейса [5].

Эндохронная теория пластичности имеет термодинамическое обоснование [2], что объясняет, почему удается удовлетворительно описать такие явления как нелинейная разгрузка, гистерезис, эффект перекрестного упрочнения, явление нырка, циклической ползучести и релаксации [5, 6]. В этой же работе даны условия,

$$J(z, z') \geq 0, \quad \frac{\partial J(z, z')}{\partial z} < 0, \quad \frac{\partial J(z, z')}{\partial z'} > 0 \quad (12)$$

$$\frac{d\Phi}{dz} \geq \mu > 0, \quad \Phi(z) = \int_0^z J(z, z') dz',$$

при которых материал устойчив (в смысле неравенства  $d\sigma \cdot d\varepsilon \geq 0$ ), удовлетворяет свойству запаздывания и краевая задача имеет единственное решение.

Хотя обычно появление эндохронной теории пластичности связывают с упомянутыми работами Валаниса К. С. [2, 7] и другими его работами, следует иметь в виду, что мера (7) фактически предложена в [8], а уравнение

$$\sigma = \int_0^z D(\xi - \xi') \frac{d\varepsilon}{d\xi'} d\xi', \quad (13)$$

где  $z$  - мера внутреннего времени, предложено Шейпери Р., о чем говорится в работе [5].

Существуют определенные сложности экспериментального определения постоянных, входящих в выражение интегрального ядра  $M(z - z')$ , однако опыт расчетов, выполненных, например в [9, 10], показывает удовлетворительное соответствие с данными экспериментов при ограничении малым числом членом аппроксимирующего ряда. В работе [9] предложена простая методика определения постоянных.

Для численной реализации определяющие уравнения удобнее представить в дифференциальной форме, которая приспособлена для применения итерационно-инкрементальных процедур:

$$dS = 2\mu e - 2\mu h(z) dz, \quad (14)$$

$$\text{где } h(z) = -\frac{1}{\mu} \int_0^z \frac{\partial M(z - z')}{\partial z} \frac{\partial e}{\partial z'} dz'.$$

Численная реализация соотношений эндохронной теории пластичности определяется ее следующими особенностями.

Интегрально-параметрическая связь между напряжениями и деформациями (9) позволяет применить метод продолжений (метод последовательных нагружений) [11], который дает возможность проводить пошаговое интегрирование.

Для решения уравнения эволюции (7), которое в общем случае не голономно, также необходимо пошаговое интегрирование.

Неустраняемая дифференциальная нелинейность соотношений ведет к сужению класса методов продолжения (отказ от уточнений по методу Ньютона и его модификаций), но к возможности уточнений по методу последовательных приближений. Построение решения при использовании определяющего уравнения в форме (14) может быть выполнено в соответствии с методом начальных деформаций или, после преобразования этого уравнения, – по методу начальных напряжений.

По-видимому, ни одна из активно развивающихся в настоящее время теорий пластичности не подвергается такой критике как эндохронная теория пластичности. Наиболее полный комплекс выявленных противоречий этой теории представлен в статье Ключникова В. Д. [12], основными из которых являются следующие:

– Указанная выше дифференциальная нелинейность соотношений ведет к необходимости решения слабо изученных в математическом отношении уравнений, что не отрицает предположение об относительной простоте зависимостей. Автор указанной статьи придерживается точки зрения, что в "рамках сингулярной пластичности, способной не только качественно, но и количественно описать известные к настоящему времени эффекты пластичности (см. например, [13]), присутствующая дифференциальная нелинейность является устранимой".

– Из факта существования пучка мгновенных упругих догрузок автор делает вывод о справедливости для этих путей дифференциально–линейных соотношений и тогда "любое соотношение эндохронной теории пластичности является заведомой аппроксимацией действительной ситуации и может быть как приемлемой, так и нет".

– Показана возможность реализации в рамках эндохронной теории эффектов деформирования, не наблюдаемых у реальных материалов.

В исследованиях [14] и др. показано, что прогнозы эндохронной теории пластичности соответствуют результатам знакопеременного нагружения (сплав В96) и ступенчатого нагружения (Р, М – опыты на стальных образцах). На основании опытов, в которых программы нагружения (в том числе сложные) задаются в деформациях, сделан вывод [14] об их удовлетворительном соответствии предсказаниям эндохронной теории пластичности. В работе [15] выполнено сравнение некоторых многоповерхностных теорий и теорий, использующих внутренние переменные, с эндохронной теорией.

Следует иметь в виду, что численные исследования, выполненные Гелером В. [16], указывают на существенные отличия в прогнозах эндохронной теории пластичности и теории Бакхауза Г. [17, 18] в случае циклического нагружения стали типа St38. К сожалению, у Гелера В. [16] отсутствует сопоставление с опытом.

Несмотря на отмеченные весьма важные возражения, вычеркивать эту теорию из рассмотрения было бы неправомерно, хотя бы по той причине, что она обладает рядом достоинств и существует целая школа ученых, активно работающих в этом направлении. Судя по их результатам, основной сферой применения этих теорий является неупругое деформирование таких сред как геоматериалы.

Особенности численной реализации эндохронной теории пластичности рассмотрены в работе [19].

По-видимому, надо прислушаться к конструктивной критике и дальнейшими исследованиями выявить область ее применения и рациональность включения в вычислительный процесс.

Современное состояние и актуальные области применения эндохронной теории пластичности рассмотрены в статьях [5, 19, 20, 21].

Применение теории, не использующей понятие поверхности нагружения (текучести) эффективно при описании геоматериалов и строительных материалов, т.к. построение такой поверхности по какому-либо допуску для указанных материалов крайне сложно. Это связано, в частности, с особенностями их деформирования, описанными, например, в статьях [22, 23]. Ряд наблюдаемых эффектов может быть связан с накоплением повреждений.

## Литература

1. Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П. Эндохронная теория пластичности, обобщающая теорию Сандерса-Клюшниковца // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1(36). С. 82-86.
2. Valanis K. C. A theory of viscoplasticity without a yield surfaces. Pt. I-II // Arch.Mech.stosow. 1971. Vol. 23. No. 4. Pp. 517-551.
3. Динариев О. Ю., Мосолов А. Б. О виде функционала пластичности в теории упругопластических процессов // Механика твердого тела. 1989. №1. С. 169-175.
4. Ленский В. С. Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1978. Вып. 5. С. 65-96.
5. Кадашевич Ю. И., Мосолов А. Б. Эндохронные теории пластичности: основные положения, перспективы развития // Механика твердого тела. 1989. №1. С. 161-168.
6. Ву, Яо, Ужу. Изучение эндохронных определяющих уравнений применительно к осевому нагружению и кручению с управлением по пластической деформации // Теоретические основы инженерных расчетов. 1986. №3. С. 72-84.
7. Valanis K. C., Fan J. Experimental verification of endochronic plasticity in spatially varying strain fields // Plasticity today: modelling, meth. And apl. London-New York. 1985. P. 153-174.
8. Кадашевич Ю. И. О различных вариантах тензорно-линейных соотношений в теории пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. Вып.6. С. 39-45.
9. Упругопластическое деформирование стали 45 при сложном нагружении / Вавакин А. С., Викторов В. В., Мосолов А. Б., Степанов Л. П. // Препринт ИПМ АН СССР. 1988. №359. 36 с.

10. Valanis K. C. Fundamental consequences of a new intrinsic time measure. Plasticity as a limit of endochronic theory // Arch.Mech.stosow. 1980. V.32. №2. P. 171-191.
11. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
12. Ключников В. Д. О законах пластичности для частного класса путей нагружения // Прикладная математика и механика. 1957. Т.21. №4. С. 533-543.
13. Попов Л. Г. Обобщение модели Работнова на пятимерное пространство девиаторов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1987. №5. С. 126-134.
14. Кучер Н. К. [и др.] Уравнения состояния эндохронной теории пластичности при переменных нагружениях // Проблемы прочности. 1989. №5. С. 30-35.
15. Im S., Watanabe O., Atluri S. N. Observations on phenomenological plasticity theories and constitutive modelling of finite deformation elastoplasticity based upon an interval time concept // Constitut. Model Deformat.: Proc. Army Res. Off. Workshop Const. Models. Blacsburg, Va. 1986. Philadelphia, Pa. 1987. Pp. 85-108.
16. Gohler W. Vergleich von Verfestigungsansätzen durch numerische Simulation beliebiger Belastungsvorgänge // Technische Mechanik. 1985. 6. H2. Pp. 66-71.
17. Backhaus G. Vergleich einiger Ansätze zur Erfassung der Verformungsanisotropie und einfache Spannungs - Verzerrungs-Beziehung // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 1976. №56. Pp. 513-525.
18. Backhaus G. Deformations Gesetze. Berlin: Akademie-Verlag, 1983. 328 p.
19. Семенов А. С. Особенности конечно-элементной реализации эндохронной теории пластичности // Труды ЛГТУ. 1991. №441. С. 31-37.
20. Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П. Описание эффектов второго порядка в рамках эндохронной теории неупругости для больших деформаций. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2010. № 6. С. 123-136.
21. Кадашевич Ю. И., Мосолов А. Б. Современное состояние эндохронной теории пластичности // Проблемы прочности. 1991. №6. С. 3-12.
22. Гольдин А. Л., Нгуен Фьонг Зунг. Построение траектории напряжений для ненасыщенного грунта при консолидированно-недренированных испытаниях в стабилометре // Инженерно-строительный журнал. 2012. №9(35). С. 35-40.
23. Бондарь И. С. Сдвиговые испытания связных грунтов при различных траекториях нагружения // Инженерно-строительный журнал. 2012. №7(33). С. 50-57.

## References

1. Kadashevich Yu. I., Pomytkin S. P. Endochronic theory of plasticity generalizing Sanders-Klushnikov theory // Magazine of Civil Engineering. 2012. No.1 (36). Pp. 82-86. (rus)
2. Valanis K. C. A theory of viscoplasticity without a yield surfaces. Pt. I-II // Arch.Mech.stosow. 1971. Vol. 23. No. 4. Pp. 517-551.
3. Dinariev O. Yu., Mosolov A. B. O vide funkcionala plastichnosti v teorii uprugoplasticheskikh processov // Mechanics of Solids. 1989. No. 1. Pp. 169-175.
4. Lenskiy V. S. Sovremennye voprosy i zadachi plastichnosti v teoreticheskom i prikladnom aspektah [Modern questions and problems of plasticity in theoretical and applied aspects] // Uprugost' i neuprugost'. M.: MGU Publishing, 1978. Vol. 5. Pp. 65-96. (rus)
5. Kadashevich Y. I., Pomytkin S. P. Description of second-order effects within the framework of endochronic inelasticity for large deformations // Mechanics of Solids. 1989. No. 1. Pp. 161-168. (rus)
6. Vu Yao Uzhu. Izucheniye endokhronnykh opredelyayushchih uravnenij primenitel'no k osevomu nagruzheniu i krucheniyu s upravleniyem po plasticheskoy deformatsii // Teoreticheskiye osnovy inzhenernykh raschetov. 1986. No. 3. Pp. 72-84. (rus)
7. Valanis K. C., Fan J. Experimental verification of endochronic plasticity in spatially varying strain fields // Plasticity today: modelling, meth. And apl. London-New York. 1985. P. 153-174.
8. Kadashevich Y. I. O razlichnykh varianah tenzorno-lineynykh sootnoshenij v teorii plastichnosti. L.: LGU Publishing, 1967. Vol. 6. Pp. 39-45. (rus)
9. Uprugoplasticheskoye deformirovaniye stali 45 pri slozhnom / Vavakon A. S., Viktorov V. V., Mosolov A. B. Stepanov L. P. // Preprint IPM AN SSSR. 1988. No. 359. 36 p. (rus)

10. Valanis K. C. Fundamental consequences of a new intrinsic time measure. Plasticity as a limit of endochronic theory // Arch.Mech.stosow. 1980. V.32. №2. P. 171-191.
11. Oden J. *Konechnye element v nelinejnoj mehanike sploshnyh sred* [Finite elements in nonlinear mechanics of continuous media]. M.: Mir, 1976. 464 p. (rus)
12. Klushnikov V. D. *O zakonah plastichnosti dlya chastnogo klassa putej nadguzheniya* // *Prikladnaya matematika i mehanika*. 1957. Vol. 21. No. 4. Pp. 533-543. (rus)
13. Popov L. G. *Obobsheniye modeli Rabotnova na pyatimernoye prostranstvo deviatorov* // *Izvestiya AN SSSR*. 1987. No. 5. Pp. 126-134. (rus)
14. Kucher N. K. [et. al.] *Uravneniya sostoyaniya endokhronnoj teorii plastichnosti pri peremennyh nagruzheniyah* // *Strength of Materials*. 1989. No. №5. Pp. 30-35. (rus)
15. Im S., Watanabe O., Atluri S.N. Observations on phenomenological plasticity theories and constitutive modelling of finite deformation elastoplasticity based upon an interval time concept//*Constitut. Model Deformat.: Proc. Army Res. Off. Workshop Const. Models*. Blacsburg, Va. 1986. Philadelphia, Pa. 1987. P. 85-108.
16. Gohler W. Vergleich von Verfestigungsansatzen durch numerische Simulation beliebiger Belastungsvorgange// *Technische Mechanik*. 1985. 6. H2. Pp. 66-71.
17. Backhaus G. Vergleich einiger Ansätze zur Erfassung der Verformungsanisotropie und einfache Spannungs - Verzerrungs-Beziehung// *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. 1976. №56. S. 513-525.
18. Backhaus G. *Deformations Gesetze*. Berlin: Akademie-Verlag, 1983. 328 s.
19. Semenov A. S. *Osobennosti konechno-elementnoj realizatsii endokhronnoj teorii plastichnosti* // *Trudy LGTU*. 1991. No. 441. Pp. 31-37. (rus)
20. Kadashevich Y. I., Pomytkin S. P. Description of second-order effects within the framework of endochronic inelasticity for large deformations. *Mechanics of Solids*. 2010. Vol. 45. № 6. Pp. 865-875.
21. Kadashevich Y. I., Mosolov A. B. Modern state of endochronous theory of plasticity // *Strength of Materials*. 1991. No. 6. Pp. 3-12.
22. Goldin A. L., Nguyen Fuong Dzung. Plotting the stress-path for unsaturated soil during consolidated undrained tests in stabilometer // *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No. 9(35). Pp. 35-40. (rus)
23. Bondar I. S. Shift tests of cohesive soils under the various loading trajectories // *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No. 7(33). Pp. 50-57. (rus)

**Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (12-08-00-943а)  
и гранта компании British Petroleum**

**This article is performed with financial support of a grant of  
Russian Federal Property Fund (12-08-00-943a)  
and British Petroleum's grant**