

Применение функций Крылова А. Н. для решения задач строительной механики

Application of Krylov's functions for solving structural mechanical problems

к.т.н., доцент Колосова Галина Сергеевна
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
+7 (921) 566 1321; gala.kolosova2013@yandex.ru
Санкт-Петербург
Российская Федерация

Ph. D, Associate Professor Galina Sergeevna Kolosova
Saint-Petersburg State Polytechnical University
+7 (921) 566 1321; gala.kolosova2013@yandex.ru
Saint-Petersburg
Russian Federation

к.т.н., доцент Куроедов Владимир Васильевич
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
+7 (921) 924 4340; smitu@cef.spbstu.ru
Санкт-Петербург
Российская Федерация

Ph. D, Associate Professor Vladimir Vasiljevich Kuroyedov
Saint-Petersburg State Polytechnical University
+7 (921) 924 4340; smitu@cef.spbstu.ru
Saint-Petersburg
Russian Federation

Ключевые слова: дифференциальное уравнение четвертого порядка, функции Крылова А. Н., балки на основании Винклера, метод конечных элементов, аппроксимирующие функции, матрица жесткости элемента, цилиндрическая оболочка, «краевой эффект».

Приводится построение матрицы жесткости конечного элемента изгибаемой балки на основании Винклера. В пределах элемента для искомой функции прогиба балки применяется не приближенная аппроксимация, а используется точное решение дифференциального уравнения задачи, определяемого функциями Крылова А. Н.

На примерах демонстрируется эффективность разработанного элемента. Проводится аналогия между дифференциальным уравнением изгиба балки на основании Винклера и дифференциальным уравнением равновесия изгибаемой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении. Численно и аналитически исследуется явление «краевого эффекта», описываемого функциями Крылова А. Н., в зацементированной по торцу оболочке.

Key words: fourth order differential equations, Krylov's functions, beams based on Winkler, finite element method, the approximating functions, stiffness matrix element, cylindrical shell, "edge effect."

The constructed finite element stiffness matrix of a flexible beam based on Winkler. Within the item to the desired function beam deflection applied not approximate approximation and using an exact solution of the differential equation of the problem, defined functions Krylov.

Examples demonstrate the effectiveness of the developed element. An analogy between the differential equations of the bending beam under Winkler and the differential equation of equilibrium of a flexible cylindrical shell under axisymmetric loading. Study the behavior of displacements and forces in the shell. We show by example the phenomenon of edge effect, built on the basis of functions Krylov.

1. Введение

Статья посвящена вопросу применения аналитических и численных методов в задачах расчета сооружений. В настоящее время большинство задач строительной механики решается методом конечных элементов (МКЭ) [1, 6, 14, 20, 25, 27, 28]. Разработано огромное количество элементов для решения различных задач механики. Применяемые в элементах аппроксимации отвечают лишь общим принципам

механики сплошных сред. Компоненты матриц жесткости элементов определяются численным интегрированием. Это вносит определенные погрешности в решение. С другой стороны, в строительной механике аналитически решено большое количество задач. В данной статье предлагается вариант улучшения конечно-элементного решения за счет использования аналитического решения при построении матрицы жесткости. Предложен конечный элемент для решения задачи изгиба балки на основании Винклера [13]. Функция прогибов определяется решением Крылова А. Н. [13, 30]. Интегрирование при построении матрицы жесткости выполняется точно. Подчеркивая актуальность применения аналитических решений, в статье показывается, как то же решение Крылова А. Н. используется для анализа численного расчета круговой цилиндрической оболочки [3, 12].

2. Обзор литературы

Развитие метода конечных элементов как численного метода решения задач расчета сооружений идет по пути усложнения применяемых математических моделей [2, 4, 7 - 9, 11, 15, 16, 23, 26, 29]. Этот метод реализован во многих промышленных программных комплексах, таких как: SCAD, ANSYS, NASTRAN, PLAXIS, SOFiSTiK, ЛИРА [5, 10, 21]. Используемые в комплексах конечные элементы строятся на базе приближенной аппроксимации неизвестной функции в пределах элемента, что приводит к погрешностям решения. В данной статье рассматривается другой, более эффективный подход к построению конечного элемента, когда вид искомой функции в пределах элемента определяется точным решением дифференциального уравнения задачи, а погрешность возникает только при решении системы уравнений равновесия для всей расчетной области.

Предлагаемое использование аналитического решения в реализации процедуры метода конечных элементов отсутствует в литературных источниках. Актуальность данной работы вызвана стремлением совершенствовать процедуру МКЭ путем приближения конечно-элементной модели к реальной работе сооружения.

3. Постановка задачи

Задачами настоящей статьи являются:

1. разработка конечного элемента на базе аналитического решения дифференциального уравнения, определяемого функциями Крылова А. Н.;
2. решение задачи изгиба балки на основании Винклера методом конечных элементов с применением созданного элемента;
3. исследование "краевого эффекта" в осесимметричной задаче изгиба цилиндрической оболочки на базе функций Крылова А. Н.

4. Функции Крылова А.Н.

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение:

$$B \frac{d^4 w_0}{dx^4} + k w_0 = 0 \quad (1)$$

Аналитическое решение этого уравнения имеет вид [13, 30]:

$$w_0(x) = C_0 V_0(\beta x) + C_1 V_1(\beta x) + C_2 V_2(\beta x) + C_3 V_3(\beta x) \quad (2)$$

Здесь:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4B}}, \dots C_0, C_1, C_2, C_3 \dots - \text{неопределенные коэффициенты,}$$

$V_i(\beta x)$ – функции Крылова А. Н., определяемые соотношениями:

$$V_0(\beta x) = ch \beta x \cdot \cos \beta x = \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} \cdot \cos \beta x \quad (3)$$

$$V_1(\beta x) = \frac{1}{2\beta} (ch \beta x \cdot \sin \beta x + sh \beta x \cdot \cos \beta x) = \frac{1}{2\beta} \left(\frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} \cdot \sin \beta x + \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} \cdot \cos \beta x \right) \quad (4)$$

$$V_2(\beta x) = \frac{1}{2\beta^2} sh \beta x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2\beta^2} \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} \cdot \sin \beta x \quad (5)$$

$$V_3(\beta x) = \frac{1}{4\beta^4} (ch \beta x \cdot \sin \beta x - sh \beta x \cdot \cos \beta x) = \frac{1}{4\beta^4} \left(\frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} \cdot \sin \beta x - \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} \cdot \cos \beta x \right) \quad (6)$$

Далее покажем, как используется решение (2) для исследования таких различных задач строительной механики как изгиб балки на основании Винклера и осесимметричный изгиб круговой цилиндрической оболочки. При этом задачи будем решать и аналитически, и численно методом конечных элементов.

5. Изгиб балки на упругом основании

Обратимся к уравнению изгиба балки на основании Винклера [13, 19, 30]:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + Kw = q(x) \quad (7)$$

Здесь $w(x)$ – функция прогибов балки, EJ – изгибная жесткость балки, K – коэффициент жесткости основания, $q(x)$ – действующая на балку внешняя нагрузка.

Общее решение этого уравнения складывается из решения $w_0(x)$ соответствующего однородного уравнения:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + Kw = 0 \quad (8)$$

и частного решения $w_1(x)$, определяемого заданной нагрузкой $q(x)$ [30]:

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x)$$

Однородное уравнение (8) совпадает с уравнением (1) при $B = EJ$ и $k = K$ следовательно, $w_0(x)$ определяются зависимостью (2), где $\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4 \cdot EJ}}$. Получение частного решения $w_1(x)$ при произвольной нагрузке на балку весьма сложно.

Как отмечалось, в настоящее время основным методом решения задач строительной механики является метод конечных элементов [6, 17, 18, 23, 26]. При этом для аппроксимации неизвестной функции на элементе обычно используются линейная, квадратичная или кубическая функции [14, 25]. Для решения задачи изгиба балки на винклеровском основании в данной работе построен элемент на базе точного решения (2) уравнения изгиба в пределах элемента. Такой элемент имеет два узла с двумя степенями свободы в каждом: прогибом и углом поворота (рис.1). Вектор узловых перемещений элемента [25]:

$$U_{\text{элемента}} = \begin{bmatrix} w_i \\ w'_i \\ w_j \\ w'_j \end{bmatrix}$$



Рис. 1. Конечный элемент балки

Матрица жесткости элемента строится методом, применяемым в строительной механике [15, 27, 29]. Подход основан на том, что если закрепить от возможных перемещений оба узла элемента, а затем последовательно полагать одну из компонент вектора узловых перемещений равной единице и определять усилия в узлах элемента, то эти усилия составят столбцы матрицы жесткости элемента. Во

всех рассматриваемых вариантах перемещения точек элемента $w(x)$ определяются зависимостью (2). Неопределенные коэффициенты в решении (2) находятся из четырех вариантов граничных условий, представленных в таблице 1:

Таблица 1

Вариант	Узел i ($x=0$)		Узел j ($x=L$)	
	w	w'	W	w'
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

Полученная в каждом случае функция $w(x)$ точно описывает перемещения точек элемента. Следовательно, определенные по ней узловые усилия, являющиеся компонентами матрицы жесткости, точно удовлетворяют уравнениям равновесия элемента. Полученная матрица жесткости элемента имеет вид:

$$\frac{EJ}{\Delta} \begin{bmatrix} 4\beta^4 V_2 V_3 + V_0 V_1 & V_1^2 - V_2 V_0 & -V_1 & V_2 \\ & V_1 V_2 - V_0 V_3 & -V_2 & V_3 \\ \text{симметрично} & & 4\beta^4 V_2 V_3 + V_0 V_1 & V_2 V_0 - V_1^2 \\ & & & V_1 V_2 - V_0 V_3 \end{bmatrix},$$

где $\Delta = V_2^2 - V_1 V_3$. Аргументом всех функций является βL .

Кроме построения матрицы жесткости для использования элемента необходимо построить вектор узловых усилий, обусловленных распределенными нагрузками, действующими на элемент. Рассмотрим случай только равномерно-распределенной нагрузки. Для приведения ее к эквивалентным узловым усилиям [6, 14] решается задача изгиба защемленной в узлах балки при действии равномерно распределенной нагрузки. Общее решение уравнения изгиба в этом случае имеет вид [30]:

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x) = w_0(x) + \frac{q}{K},$$

где $\frac{q}{K}$ - частное решение, соответствующее нагрузке q ; $w_0(x)$ определяется зависимостью (2), в которой коэффициенты вычисляются из граничных условий:

$$x=0 \quad w=0, w'=0; \quad x=L \quad w=0, w'=0; .$$

Используя известные зависимости [25] для определения усилий в балке:

$$Q(x) = -EJ \frac{d^3 w}{dx^3}, \quad M(x) = -EJ \frac{d^2 w}{dx^2},$$

получаем следующие выражения для усилий в узлах:

$$P_{2i} = -P_{2j} = EJ \frac{q}{K\Delta} (V_0 V_2 + 4\beta^4 V_3^2),$$

$$P_{1i} = P_{1j} = EJ \frac{q}{K\Delta} (V_0 V_1 - V_1^2 + 4\beta^4 V_3 V_2),$$

6. Пример расчета балки на основании Винклера

С использованием разработанного элемента были решены задачи изгиба балки длиной 30 м, жесткостью на изгиб $EJ = 1 \cdot 10^6 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$, опирающейся на основание Винклера с коэффициентом жесткости $K = 400 \text{ кН}/\text{м}^3$. По длине балка разбита на три конечных элемента. Рассмотрены два варианта нагружения:

- 1) сосредоточенная сила $P = 100 \text{ кН}$ на правом конце,
- 2) сосредоточенный момент $M = 200 \text{ кНм}$ на правом конце.

Полученные в результате расчетов значения прогибов (мм) приведены в Таблице 2, где они сравниваются с точным решением (2) уравнения (7) при соответствующих граничных условиях и решением той же задачи МКЭ с кубической аппроксимацией на элементе [20].

Таблица 2

X (м)	Вариант нагружения					
	Точное решение	1		Точное решение	2	
		Решение МКЭ			Решение МКЭ	
		Новый элемент	Элемент с кубической аппроксим.		Новый элемент	Элемент с кубической аппроксим.
0	-0,5650	-0,5650	-0,5591	-0,2818	-0,2818	-0,2716
10	-3,349	-3,349	-3,345	-1,8722	-1,8722	-1,8646
20	10,193	10,193	10,112	-1,1777	-1,1777	-1,1799
30	50,328	50,328	50,152	-10,004	-10,004	-9,9864

Результаты демонстрируют эффективность построенного конечного элемента, так как даже на сетке из трех элементов достигается точное решение задачи, а численное решение с кубической аппроксимацией на элементе имеет определенную погрешность. Из таблицы видно, что при действии на край балки сосредоточенной силы или момента наблюдается быстрое затухание перемещений от точки приложения усилия, что свойственно решениям, построенным на базе функций Крылова А. Н.

Особенно важно это свойство функций Крылова А. Н. для описания явления «краевого эффекта» в оболочках, когда в небольшой области тела наблюдается резкое изменение перемещений и усилий, которое плохо моделируется численными методами.

Исследуем «краевой эффект» на примере круговой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние резервуара, находящегося под действием внутреннего постоянного давления. Он образован цилиндрической оболочкой [3, 22] постоянной толщины, защемленной по нижней границе (рис. 2)

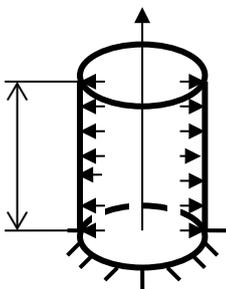


Рис. 2. Цилиндрическая оболочка под действием постоянного давления

Отметим, что в случае действия осесимметричной нагрузки неизвестные усилия, деформации и перемещения в цилиндрической оболочке не зависят от полярного угла. Это приводит к упрощению системы уравнений равновесия оболочки [12, 22], которая с учетом только внутреннего давления q

сводится к неоднородному линейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = q, \quad (9)$$

где w – перемещение вдоль радиуса оболочки, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость оболочки, h – толщина оболочки, R – радиус оболочки, q – внешняя нагрузка, E – модуль упругости материала оболочки, ν – коэффициент Пуассона.

Общее решение этого уравнения складывается из решения соответствующего однородного уравнения w_0 и частного решения w_1 :

$$w = w_0 + w_1,$$

В качестве частного решения может быть принят прогиб, полученный по безмоментной теории [12]:

$$w_1 = \frac{qR^2(1-\nu^2)}{Eh} \quad (10)$$

Далее ищем решение однородного уравнения:

$$D \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w_0 = 0. \quad (11)$$

Очевидно, что данное уравнение аналогично уравнению (1). Введем обозначение

$$4\beta^4 = \frac{Eh}{R^2 D} = \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h^2}. \quad (12)$$

Тогда исследуемое уравнение примет вид:

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} + 4\beta^4 w_0 = 0. \quad (13)$$

Решение однородного уравнения (13) в случае расчета оболочек удобно записать в форме, построенной на базе функций Крылова А. Н. (3)–(6), но несколько отличной от вида решения (2) [3, 22]:

$$w_0 = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad (14)$$

Отметим, что функция w_0 состоит из двух частей: первой с коэффициентом $e^{\beta x}$, быстро убывающей по мере удаления от края $x = L$, и второй с коэффициентом $e^{-\beta x}$, быстро убывающей по мере удаления от края $x = 0$. При достаточной длине оболочки обе части выражения для прогиба имеют самостоятельное значение. Общее решение исходного неоднородного уравнения (9) принимает вид:

$$w = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{qR^2(1-\nu^2)}{Eh} \quad (15)$$

Константы интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из четырех граничных условий. Причем на каждом крае (торце) цилиндра могут быть поставлены по два граничных условия [3, 12]:

$$x = 0: \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad (16)$$

$$x = L: \quad M_1 = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad Q_1 = -D \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \quad (17)$$

Как отмечалось выше, прогиб оболочки представляет собой по форме две пары быстро затухающих периодических функций. Каждая пара затухает по мере удаления от верхнего или нижнего края.

Используя это свойство решения при записи граничных условий в длинной цилиндрической оболочке (высота $> 2\frac{\pi}{\beta}$) в выражении для w нужно брать лишь одну часть общего решения, соответствующую рассматриваемому краю.

Таким образом, при постановке граничных условий для каждого края достаточно длинной цилиндрической оболочки, получим по два независимых алгебраических уравнения для определения лишь двух произвольных постоянных вместо системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными в общем случае, когда влиянием краев друг на друга пренебречь нельзя.

Рассмотрим расчет резервуара со следующими параметрами:

$$n=0.2 \quad E=2 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2 \quad h=0.12\text{м}, \quad L=4\text{м}, \quad R=2\text{м}$$

Резервуар находится под внутренним давлением $q=20 \text{ кН/м}^2$, параметр $\frac{\pi}{\beta}=1.1814$, т.е. высота резервуара $L > 2\frac{\pi}{\beta}$. Следовательно, в выражении для прогиба используем одну ветку из выражения (14) для функции $w_0(x)$, описывающую перемещения, затухающие к верхнему краю, где усилия равны нулю:

$$w = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{qR^2(1-\nu^2)}{Eh}. \quad (18)$$

Параметр β , согласно (12), равен:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot (1-\nu^2)}{E \cdot h}} = 2.6592. \quad (19)$$

Произвольные постоянные C_3 и C_4 определим из граничных условий на защемленном крае:

$$x=0: \quad w=0, \quad \frac{dw}{dx}=0 \Rightarrow C_3=C_4=-3.2 \cdot 10^{-5}.$$

Следовательно, прогиб, соответствующий решению однородного уравнения представляет собой быстро затухающую при удалении от нижнего края периодическую функцию:

$$w_0(x) = e^{-2.6592x} (C_3 \cos 2.6592x + C_4 \sin 2.6592x) = -3.2 \cdot 10^{-5} e^{-2.6592x} (\cos(2.6592x) + \sin(2.6592x))$$

Графики функций $w_0(x)$ и $w(x)$ изображены на следующем рисунке:

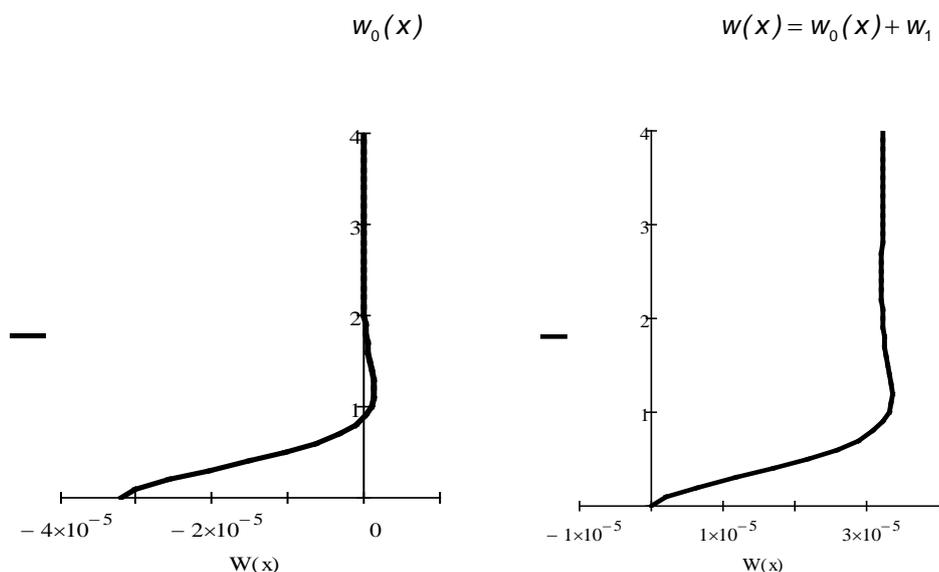


Рис. 3. Прогибы оболочки, соответствующие решению однородного и неоднородного уравнений

Внутренние усилия в оболочке при заданной формулой (18) функции $w(x)$ определяются выражениями (17), откуда получаем:

$$M(x) = 2 \cdot C_4 D \beta^2 e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x)$$

$$Q(x) = -2 \cdot D \beta^3 e^{-\beta x} [(C_3 + C_4) \cdot \cos \beta x + (-C_3 + C_4) \cdot \sin \beta x]$$

Графики $M(x)$ (кНм) и $Q(x)$ (кН) представлены на рисунке 4:

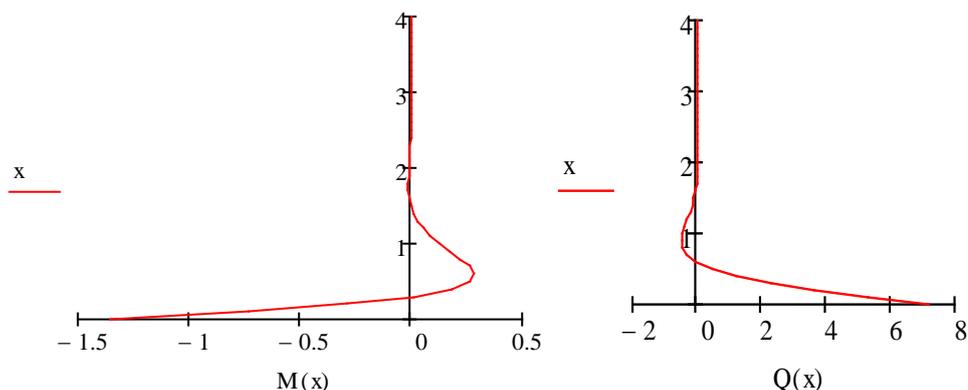


Рис. 4. Внутренние усилия по высоте оболочки

Кольцевое усилие N_2 изменяется следующим образом [12,22]:

$$N_2(x) = [-3.2 \cdot 10^{-5} e^{-2.6592x} (\cos(2.6592x) + \sin(2.6592x)) + \frac{20 \cdot R^2 \cdot (1-\nu^2)}{E \cdot h}] \cdot \frac{E \cdot h}{R \cdot (1-\nu^2)}$$

Графики изменения усилий $N_2(x)$ (кН) и $N(x)$ (кН):

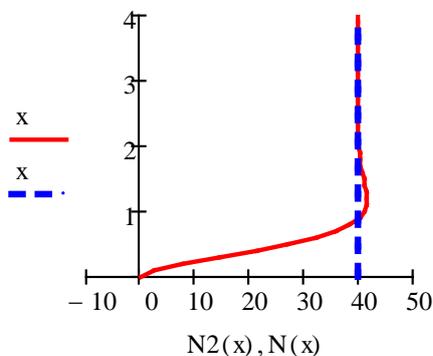


Рис.5. Кольцевые усилия по высоте оболочки

Обозначенная пунктиром эпюра $N(x) = 40$, соответствующая расчету по безмоментной теории [3, 12, 22], отличается от решения по моментной теории (сплошная линия) только у заделки. Здесь нагрузка воспринимается, в основном, за счет возникновения моментов и поперечных сил.

Таким образом, усилия в оболочке рассматриваемого резервуара в области, удаленной от защемления могут быть определены по безмоментной теории [12, 22]. В области же, примыкающей к заделке, возникают краевые усилия $M(x)$ и $Q(x)$ изгибного состояния которые влияют на перераспределение усилий безмоментного состояния оболочки. Поведение функций $M(x)$ и $Q(x)$ определяется с помощью функций Крылова А. Н.

Наблюдаемое на эпюрах быстро затухающее напряженно-деформированное состояние оболочки, обусловленное ее изгибом вблизи защемления, называется «краевым эффектом» [3, 12, 22]. Такие резкие изменения усилий плохо моделируются МКЭ [6, 27].

Сравним, например, аналитическое и численное решения для функции моментов в области $0 \leq x \leq 0.7$:

Таблица 3

X(м)	M (аналитическое решение)	M (решение SCAD, шаг сетки 0,1м)
0	-1.36	-1.07
0.1	-0.73	-0.5
0.2	-0.28	-0.13
0.3	0.01	0.11
0.4	0.18	0.24
0.5	0.26	0.29
0.6	0.31	0.29
0.7	0.26	0.25

Как видно из таблицы погрешность численного решения при $x=0$ составляет 30%, причем в сторону уменьшения усилия. Численное решение методом конечных элементов всегда сглаживает сложное поведение искомой функции, и для получения ее экстремальных значений нужно проводить серию расчетов с уменьшаемым шагом сетки.

7. Заключение

Полученные выше результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. На базе аналитического решения дифференциального уравнения, определяемого функциями Крылова А. Н., предложен новый конечный элемент. Матрица жесткости элемента вычислена точно и не имеет обычной погрешности МКЭ, связанной с приближенной аппроксимацией неизвестной функции и с численным интегрированием в пределах элемента.

2. Конечноеэлементное решение задачи изгиба балки на основании Винклера продемонстрировало эффективность разработанного элемента по сравнению с традиционным элементом с кубической аппроксимацией. Численное решение на базе нового элемента совпадает с точным решением задачи.

3. Исследование "краевого эффекта" в осесимметричной задаче изгиба цилиндрической оболочки на базе функций Крылова А. Н. показало, что зоны быстрого изменения усилий плохо моделируются методом конечных элементов.

Литература

1. Агапов В. П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2004. 247 с.
2. Агапов В. П., Бардышева Ю. А., Минаков С. А. Учет физической и геометрической нелинейности в расчетах железобетонных плит и оболочек переменной толщины методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. № 5. С. 62-66.
3. Амосов А. А. Техническая теория тонких упругих оболочек. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2009. 303 с.
4. Babu Gunda J., Gandule R. New rational interpolation functions for finite element analysis of rotating beams // International Journal of Mechanical Sciences. 2008. Vol. 50. No. 3. Pp. 578-588.
5. Басов К. А. ANSYS для конструкторов. М.: ДМК Пресс, 2009. 248 с.
6. Бате К. Ю. Методы конечных элементов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 1022 с.
7. Burman E., Linke A. Stabilized finite element schemes for incompressible flow using Scott Vogelius elements // Applied Numerical Mathematics. 2008. Vol. 58. No. 11. Pp. 1704-1709.
8. Дьяков С. Ф., Лалин В. В. Построение и анализ конечных элементов тонкостенного стержня открытого профиля с учетом деформаций кручения и сдвига // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Охрана окружающей среды, транспорт, безопасность жизнедеятельности. 2011. № 2. С.130-140.

9. Ермакова А. В. Взаимосвязь метода дополнительных конечных элементов и других численных методов расчета конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 5. С. 28-33.
10. SCAD Office. / Карпиловский В. С. Криксунов Э. З., Маляренко А. А., Микитаренко М. А., Перельмутер А. В., Перельмутер М. А. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2004. 590 с.
11. Клочков Ю. В., Николаев А. П., Шубович А. А. Анализ геометрически нелинейной оболочки вращения на основе МКЭ с вариативным формированием матрицы упругости на шаге нагружения // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 3. С. 40-44.
12. Колкунов Н. В. Основы расчета упругих оболочек. М.: Высшая школа, 1987. 256 с.
13. Крылов А. Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. М.: Академия наук СССР. 1931. 80 с.
14. Лалин В. В., Колосова Г. С. Численные методы в строительстве. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. 71 с.
15. Лалин В. В., Рыбаков В. А. Конечные элементы для расчета ограждающих конструкций из тонкостенных профилей // Инженерно-строительный журнал. 2011. №8. С. 69-80.
16. Лалин В. В., Рыбаков В. А., Морозов С. А. Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем // Инженерно-строительный журнал. 2012. Т. 27. № 1. С. 53-73.
17. Lou T., Xiang Y. Numerical analysis of second-order effects of externally prestressed concrete beams // Structural engineering and mechanics. 2010. v. 35. №5. P. 631-643.
18. Milind T. R., Date P. P. Analytical and finite element modeling of strain generated in equal channel angular extrusion // International Journal of Mechanical Sciences. 2012. V. 56. № 1. P. 26-34.
19. Moret I., Novati P. A rational Krylov method for solving time-periodic differential equations // Applied Numerical Mathematics. 2008. V. 58. №3. P. 212-222.
20. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: Изд-во «Сталь», 2002. 600 с.
21. Перельмутер А. В. Программные средства и нормативные документы. М.:СКАД СОФТ, 2008. 580 с.
22. Погорелов В. И. Строительная механика тонкостенных конструкций. СПб.: Изд-во БХВ-Петербург, 2007. 302 с
23. Покровский А. А. О методе перемещений в МКЭ с отделением смещений твердого тела // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 4. С. 2-4.
24. Покровский А. А. Об описании НДС конечного элемента среды // Строительная механика и расчет сооружений. 2009. № 3. С. 55.
25. Розин Л. А. Стержневые системы как системы конечных элементов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. 237 с.
26. Tarar W., Scott-Emuakpor O. Herman Shen M.-H. Development of new finite elements for fatigue life prediction in structural components // Structural engineering and mechanics. 2010. Vol. 35. №6. Pp. 659-676.
27. Трушин С. И. Метод конечных элементов. Теория и задачи. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2008. 256 с.
28. Федоров М. П., Константинов И.А., Лалин В.В. Информационно-компьютерные технологии в строительстве. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2009. 288 с.
29. Яваров А. В., Колосова Г. С., Куроедов В. В. Напряженно-деформированное состояние подземных трубопроводов // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2013. №1. С. 1-10.
30. Якимов С. К. Расчет балок на упругом основании. Ленинград, 1971. 175 с.

References

1. Agapov V.P. *Metod konechnykh elementov v statike, dinamike i ustoichivosti konstruksii*. M.: Izd-vo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2004. 247 p. (rus)
2. Agapov V.P., Bardysheva Iu.A., Minakov S.A. *Uchet fizicheskoi i geometricheskoi nelineinosti v raschetakh zhelezobetonnykh plit i obolochek peremennoi tolshchiny metodom konechnykh elementov* // *Stroitel'naiia mekhanika i raschet sooruzhenii*. 2010. No. 5. Pp. 62-66. (rus)
3. Amosov A.A. *Tekhnicheskaiia teoriia tonkikh uprugikh obolochek*. M.: Izd-vo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2009. 303 p. (rus)
4. Babu Gunda J., Gandule R. New rational interpolation functions for finite element analysis of rotating beams // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2008. Vol. 50. No. 3. Pp. 578-588.
5. Basov K. A. *ANSYS dlia konstruktorov*. M.: DMK Press, 2009. 248 p. (rus)

6. Bate K.Iu. *Metody konechnykh elementov*. M.: FIZMATLIT, 2010. 1022 p. (rus)
7. Burman E., Linke A. Stabilized finite element schemes for incompressible flow using Scott Vogelius elements // *Applied Numerical Mathematics*. 2008. Vol. 58. No. 11. Pp. 1704-1709.
8. D'iakov S. F., Lalin V. V. *Postroenie i analiz konechnykh elementov tonkostennogo sterzhnia otkrytogo profilia s uchetom deformatsii krucheniia i sdviga* // *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Okhrana okruzhaiushchei sredy, transport, bezopasnost' zhiznedeiatel'nosti*. 2011. No. 2. Pp.130-140. (rus)
9. Ermakova A. V. *Vzaimosviaz' metoda dopolnitel'nykh konechnykh elementov i drugikh chislennykh metodov rascheta konstruksii* // *Stroitel'naia mekhanika i raschet sooruzhenii*. 2012. No. 5. Pp. 28-33. (rus)
10. Karpilovskii V.S. / Kriksunov E.Z., Maliarenko A.A., Mikitarenko M.A., Perel'muter A.V., Perel'muter M.A. / SCAD Office. M.: *Izd-vo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov*, 2004. 590 p. (rus)
11. Klochkov Iu.V., Nikolaev A.P., Shubovich A.A. *Analiz geometricheski nelineinoi obolochki vrashcheniia na osnove MKE s variativnym formirovaniem matritsy uprugosti na shage nagruzeniia* // *Stroitel'naia mekhanika i raschet sooruzhenii*. 2011. No. 3. Pp. 40-44. (rus)
12. Kolkunov N.V. *Osnovy rascheta uprugikh obolochek*. M.: *Vysshaia shkola*, 1987. 256 p. (rus)
13. Krylov A.N. *O raschete balok, lezhashchikh na uprugom osnovanii*. M.: *Akademiia nauk SSSR*.1931. 80 c. (rus)
14. Lalin V.V., Kolosova G.S. *Chislennye metody v stroitel'stve*. SPb.: *Izd-vo SPbGTU*, 2001. 71 p. (rus)
15. Lalin V.V., Rybakov V.A. *Konechnye elementy dlia rascheta ograzhdaiushchikh konstruksii iz tonkostennykh profilei* // *Magazine of civil engineering*. 2011. No. 8. Pp. 69-80. (rus)
16. Lalin V. V., Rybakov V. A., Morozov S. A. The finite elements research for calculation of thin-walled bar systems // *Magazine of civil engineering*. 2012. Vol. 27. No. 1. Pp. 53-73.
17. Lou T., Xiang Y. Numerical analysis of second-order effects of externally prestressed concrete beams // *Structural engineering and mechanics*. 2010. v. 35. №5. P. 631-643.
18. Milind T. R., Date P. P. Analytical and finite element modeling of strain generated in equal channel angular extrusion // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2012. V. 56. № 1. P. 26-34.
19. Moret I., Novati P. A rational Krylov method for solving time-periodic differential equations // *Applied Numerical Mathematics*. 2008. V. 58. №3. P. 212-222.
20. Perel'muter A.V., Slivker V.I. *Raschetnye modeli sooruzhenii i vozmozhnost' ikh analiza*. Kiev: *Izd-vo «Stal'»*. 2002. 600 p. (rus)
21. Perel'muter A. V. *Programmnye sredstva i normativnye dokumenty*. M.: *SKAD SOFT*, 2008. 508 p. (rus)
22. Pogorelov V.I. *Stroitel'naia mekhanika tonkostennykh konstruksii*. SPb.: *Izd-vo BKhV-Peterburg*, 2007. 302 c. (rus)
23. Pokrovskii A.A. *O metode peremeshchenii v MKE s otdeleniem smeshchenii tverdogo tela* // *Stroitel'naia mekhanika i raschet sooruzhenii*. 2011. No. 4. Pp. 2-4. (rus)
24. Pokrovskii A.A. *Ob opisani NDS konechnogo elementa sredy* // *Stroitel'naia mekhanika i raschet sooruzhenii*. 2009. No. 3. Pp. 55. (rus)
25. Rozin L.A. *Sterzhnevye sistemy kak sistemy konechnykh elementov*. L.: *Izd-vo LGU*, 1975. 237 p. (rus)
26. Tarar W., Scott-Emuakpor O. Herman Shen M.-H. Development of new finite elements for fatigue life prediction in structural components // *Structural engineering and mechanics*. 2010. Vol. 35. №6. Pp. 659-676.
27. Trushin S.I. *Metod konechnykh elementov. Teoriia i zadachi*. M.: *Izd-vo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov*, 2008. 256 p. (rus)
28. Fedorov M.P., Konstantinov I.A., Lalin V.V. *Informatsionno-komp'iuternye tekhnologii v stroitel'stve*. SPb.: *Izd-vo SPbGPU*, 2009. 288 p. (rus)
29. Yavarov A. V., Kolosova G. S., Kuroedov V. V. Stress-strain state of buried pipelines // *Construction of unique buildings and structures*. 2013. No. 1. Pp. 1-10. (rus)
30. Iakimov S.K. *Raschet balok na uprugom osnovanii*. Leningrad, 1971. 175 p. (rus)