

Повышение несущей способности эксплуатируемых сооружений Increase of bearing capacity of operated constructions

к.т.н., доцент Убайдуллоев Маджид Насриевич
Казанский национальный исследовательский технологический университет
+7 (927) 420 2307; madgidpwn@rambler.ru
Казань
Российская Федерация

Ph. D, Associate Professor Madzhid Nasrievich Ubaydulloyev
Kazan State Technological University
+7 (927) 420 2307; madgidpwn@rambler.ru
Kazan
Russian Federation

Ключевые слова: усиление, ремонтные напряжения, монтажные напряжения, моделирование, вариационный метод.

В статье выполнен обзор исследований, посвященных вопросам повышения несущей способности эксплуатируемых сооружений.

Излагаются методы определения несущей способности конструкций, усиливаемых без вывода из напряженного состояния. Приведены модели напряженно-деформированного состояния усиливаемых стержневых конструкций с учетом накапливаемых на каждом этапе ремонтных работ напряжений, деформаций и перемещений.

Key words: strengthening, repair stress, assembly stress, modeling, variation method.

The article reviews the researches devoted to the problems of increasing load – carrying capacity of operated constructions.

The procedures are presented to determine load – carrying capacity of the beam structures, strengthened under load. The models of stress – strain state of strengthening beam structures are given, taking into account stress and the deformations, accumulated at every stage of repair work.

1. Введение

Большинства существующие сооружения в процессе эксплуатации постоянно подвергаются разнообразным и интенсивным внешним воздействиям, что приводит к постепенному снижению их несущей способности. Увеличение нагрузок на существующие конструкции зданий и сооружений, наличие износа и повреждений приводит к необходимости повышения несущей способности конструкций и является основной причиной их усиления.

Проблема усиления актуальна и для многих портовых сооружений. Причалные сооружения в существующих рыбопромысловых портах и хозяйствах нуждаются в усилении как в связи с необходимостью увеличения глубин у причалов, так и вследствие износа и повреждений.

В большинстве случаев прочность сооружений ограничивается несущей способностью их отдельных элементов, поэтому, как правило, в усилении нуждаются не все элементы сооружений, а лишь отдельные наиболее напряженные или поврежденные элементы. Это позволяет добиться значительного повышения несущей способности существующих сооружений при наименьших затратах.

Характерная особенность усиления и ремонта большинства сооружений состоит в том, что они выполняются без полного вывода их из напряженного состояния. Это диктует необходимость особого подхода к методам проектирования и расчета усиления конструкций.

Особенностью ряда гидротехнических портовых сооружений является то, что некоторые из несущих элементов практически недоступны для ремонта и усиления в связи с невозможностью их обнажения в период эксплуатации. Применительно к таким случаям задача отыскания приемлемых способов усиления конструкций является особенно актуальной.

В данной работе приводится обзор выполненных исследований по проблеме повышения несущей способности конструкций, усиливаемых без вывода из эксплуатации.

Исследованиями вопросов прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций, усиливаемых без вывода из напряженного состояния, занимались Беленя Е. И., Донник И. Я., Шепельский М. Я., Ребров И. С. [1 – 4]. Были получены значительные результаты при разработке приближенных методов оценки прочности и жесткости балок.

Вопросы прочности и устойчивости сжатых элементов рассматривались Колесниковым В. М. [5, 6], Иммерманом А. Г. и Десятовым Б. И. [7], Ребровым И. С. [8].

Устойчивость сжатых стержней, усиливаемых введением дополнительной боковой опоры, с целью уменьшения расчетной длины элементов, исследовались Рабольдтом К. [9].

Теоретические и экспериментальные исследования вопросов усиления, а также новые технические решения, приемы и способы производства работ были опубликованы в монографиях [10 – 14], статьях [4 – 19], а также в различных указаниях, инструкциях и рекомендациях.

Анализу нормативных и методических документов по обследованию технического состояния существующих зданий и сооружений посвящены работы [20, 21].

Решению ряда проблем устойчивости и прочности сжатых стержней стальных конструкций, усиленных под нагрузкой, посвящены исследования Реброва И. С. [22 – 24]. В них рассмотрены вопросы напряженно-деформированного состояния центрально и внецентренно сжатых стержней стальных стропильных ферм, симметрично и несимметрично усиленных под нагрузкой. Предложена методика расчета устойчивости усиленных сжатых элементов [23, 24].

Различным вопросам усиления и деформирования нагруженных стальных конструкций были посвящены работы [25, 26].

В настоящее время вопросам определения несущей способности усиливаемых под нагрузкой железобетонных конструкций посвящены работы ряда авторов [27 – 51].

Решению вопросов оценки несущей способности и проектирования усиления железобетонных конструкций посвящены работы Будина А. Я., Астафьева Д. О., Бондаренко В. М., Бондаренко С. В., Санжаровского Р. С., Римшина В. И., Меркулова С. И. и других ученых.

Как известно [51 – 54], напряженное состояние двух одинаковых элементов конструкции при действии одной и той же нагрузки может быть различным в зависимости от последовательности приложения нагрузки и формирования геометрии элемента. Учет этого фактора лежит в основе механики усиления эксплуатируемых сооружений [51, 53], рассматривающей конструкции, геометрия которой меняется под нагрузкой. На основе исследований в этой области, выполненных Будиним А. Я. с сотрудниками, изданы ведомственные нормативные документы, регламентирующие расчетную оценку несущей способности отремонтированных и усиленных строительных конструкций [55 – 57]. Методы расчета отремонтированных и усиленных статически определимых строительных конструкций представлены в монографии [51]. В этой работе описаны методики и результаты исследований по определению несущей способности элементов сооружения, в зависимости от геометрических размеров усиливаемых элементов. Для массивных элементов использованы соотношения механики сплошных сред, для относительно тонких элементов применялась техническая теория изгиба стержней.

В монографии [31] изложены способы расчета усиливаемых сжатых железобетонных конструкций. В этой работе основное внимание уделено проблеме устойчивости элементов железобетонных конструкций.

В работах [43 - 44] теоретически и экспериментально изучено и обобщено усиление железобетонных элементов конструкций способом наращивания сечений. Рассмотрено повышение несущей способности железобетонных элементов стеснением поперечного деформирования.

Авторами статьи [41] предложена методика определения несущей способности усиленных под нагрузкой железобетонных стержней с коррозионными повреждениями, в основу которой положен подход нелинейной теории железобетона Санжаровского Р. С. [31]. Рассмотрен внецентренно сжатый или изгибаемый железобетонный стержень с шарнирно-опертыми концами.

Работы [33 - 34, 47] посвящены экспериментально-теоретическому исследованию и разработке методики проектирования усиления железобетонных конструкций с изменением статической схемы при наиболее полном учете специфики воздействий, свойств материалов и специфики конструктивных решений. В работах [33 - 34, 42, 48] изложены результаты исследований железобетонных балок, усиленных комбинированной системой. В [42] приведена методика расчета, основанная на решении задачи методом сил классической строительной механики с использованием теории железобетона. На основе предлагаемого метода разработан итерационный алгоритм расчета прочности и жесткости усиленных балок, учитывающий физическую нелинейность железобетона.

Исследованию прочности и деформативности усиленных под нагрузкой железобетонных элементов с учетом истории предварительного нагружения, физической нелинейности работы материалов и технологических воздействий в период усиления посвящена работа [35].

Система предварительного натяжения на бетон без сцепления для усиления плит перекрытий является новым способом усиления. Публикации [32, 36, 49, 50] посвящены методу усиления конструкций предварительным напряжением. В статье [36] изложена методика конечно-элементного моделирования и расчета усиления конструкции предварительно напряженными канатами. Установлено, что использование предварительного напряжения позволяет не только усилить конструкцию, но и ликвидировать уже имеющиеся прогибы и трещины. Разработана оригинальная конечно-элементная модель усиливаемого перекрытия, адекватно отражающая процессы работы конструкции и позволяющая получить более точные закономерности поведения конструкции.

Экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния, а также расчетная методика оценки степени восстановления несущей способности статически неопределимых конструкций, усиленных под нагрузкой, представлены в публикациях [58 – 66]. Эти работы выполнены в предположении, что деформации являются упругими. Не рассматривался вопрос влияния пластических деформаций на несущую способность сооружения. Также, не учитывались дополнительные (монтажные) деформации и напряжения, возникающие в ряде случаев в элементах конструкций при проведении ремонтных работ.

В статьях [67 – 69] приведена постановка задачи расчета несущей способности усиливаемых стержней с учетом пластических деформаций.

Разработкой и совершенствованием конструктивных, организационных и технологических решений по восстановлению и усилению несущих железобетонных конструкций занимались ряд научных, проектных и учебных институтов. Решению данной проблемы посвящены исследования и работы целого ряда ученых [70 – 74].

Приведенные в обзоре работы отражают большие достижения в исследованиях напряженного состояния усиливаемых под нагрузкой, деформируемых элементов. Однако, в полной мере, в них не учитывался ряд факторов. В настоящее время, без учета этих факторов, методики расчетов несущей способности усиленных в напряженном состоянии конструкций, не являются достаточно универсальными и полными.

Анализ краткого обзора приведенных публикаций позволяет сформулировать следующие выводы:

- В приведенных работах [5, 6, 7] не рассматривались вопросы влияния усиления отдельных стержней на напряженно-деформированное состояние других элементов конструкции. Для более полного анализа напряженно-деформированного состояния конструкции следует использовать расчетные схемы, позволяющие учитывать взаимодействие элементов, из которых конструкция составлена;

- В указанных ранее методических документах [55, 56] рассматриваются только вопросы расчета статически определимых конструкций при упругих деформациях. Опубликованные в [51, 13, 60 - 66] исследования, выполнены в предположении, что деформации являются упругими. В достаточной мере не рассматривался вопрос влияния пластических деформаций на несущую способность сооружения;

- Не учитывались дополнительные (монтажные) деформации и напряжения, возникающие в ряде случаев в элементах конструкций при проведении ремонтных работ. Как отмечается признанным ученым в области расчета усиленных конструкций Ребровым И. С. в его фундаментальной монографии [24], изложенные в [24] методики по расчету усиленных стержневых систем, можно рассматривать лишь как первое приближение, нуждающееся в дополнительной проверке с помощью численных методов расчета;

- Как известно [31], часто стержневые железобетонные конструкции до и после усиления рассчитываются обычными методами строительной механики упругих систем, а затем производится поэлементный расчет конструкций. Такой способ расчета не учитывает предыстории нагружения, особенности несущей способности и деформативности элементов конструкций, усиленных под нагрузкой;

- В отмеченных в обзоре публикациях, особенности прочности и деформирования конструкций, усиливаемых в напряженном состоянии, изучались, в основном, для отдельных элементов, имеющих, как правило, простейшие формы поперечного сечения. Полученные для классических видов граничных условий решения, позволяют только приближенно оценить несущую способность того или иного элемента, находящегося в составе конструкции;

- Недостаточно изучены особенности, возникающие при применении для усиления материалов с характеристиками, отличными от таковых у основного материала конструкции. При оценке напряженно-деформированного состояния усиливаемых конструкций обязательно необходимо учитывать эти

особенности, так как они, наряду с уровнем существующих начальных напряжений, существенно влияют на эффективность усиления.

– В компьютерных программах, используемых в настоящее время для расчетов, не учитываются ряд особенностей, возникающих при моделировании напряженно-деформированного состояния конструкций, усиленных без вывода из эксплуатации;

– Как известно, повреждения и изменения расчетных схем, эксплуатируемых конструкций в период их ремонта и усиления приводит к возникновению стесненного кручения элементов из тонкостенного профиля. Вопросы влияния деформации сечения в стержневых элементах открытого профиля из-за стесненного кручения, в настоящее время являются недостаточно изученными.

Возможность решения рассматриваемой проблемы обеспечена достижениями в области механики деформируемого твердого тела [75, 76, 77] и механики стержневых систем [78 – 86] и численных методов расчета деформируемых систем [87 – 93].

2. Изменение несущей способности сооружений, усиливаемых без вывода из эксплуатации

Решающим фактором, от которого зависит степень повышения несущей способности усиливаемого без вывода из эксплуатации сооружения, является величина наибольших ремонтных^{*)} напряжений в лимитирующем элементе конструкции [51].

Особенности восстановления несущей способности ремонтируемых сооружений можно показать на следующем примере. Пусть ремонту подвергается находящийся под воздействием изгибающего момента элемент конструкции (рис. 1), в котором образовалось поверхностное повреждение глубиной r_{II} . Наличие повреждения приводит к тому, что вследствие снижения момента сопротивления элемента

конструкции в рассматриваемом сечении напряжения повышаются от σ до σ^p . Если отремонтировать элемент, не выводя его из напряженного состояния, то заполнивший повреждение ремонтный материал при неизменной внешней нагрузке не воспримет напряжений. Иными словами, после ремонта в сечении стенки будет действовать не первоначальное напряжение σ , а повышенное напряжение σ^p .

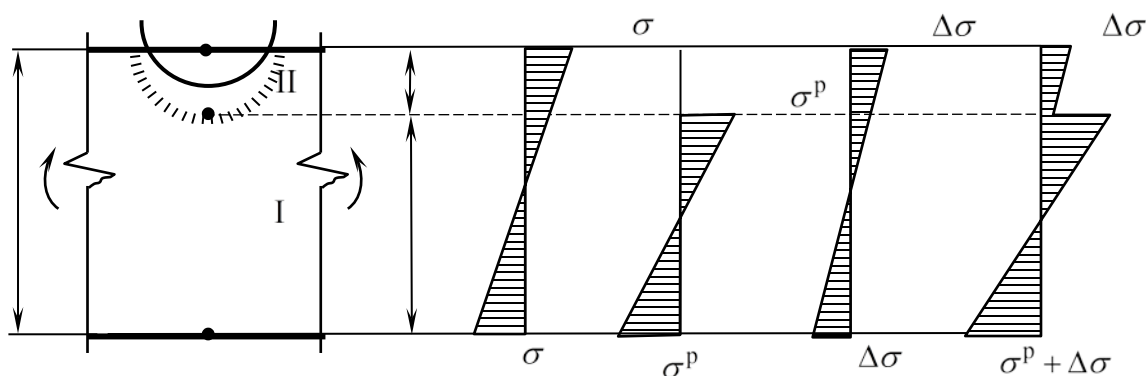


Рис. 1. Схема к определению степени восстановления несущей способности отремонтированного изгибаемого элемента

Эффект ремонта начнет сказываться только в том случае, если нагрузка на элемент будет увеличена. Это возможно лишь тогда, когда значение σ^p меньше предела прочности конструкционного материала.

Таким образом, если напряжения в элементе в период ремонта равны пределу прочности основного материала, несущая способность элемента после ремонта не восстанавливается вообще и ремонт, лишь предотвращает дальнейшее его разрушение. Если σ^p меньше предела прочности, то первоначальная несущая способность элемента восстанавливается частично.

При $\sigma^p=0$ несущая способность элемента после ремонта восстанавливается полностью. Приведенные рассуждения в полной мере применимы не только к конструкциям из однородного материала,

но и к железобетонным сооружениям (для последних приходится лишь отдельно учитывать напряжения в бетоне и в арматуре).

В наиболее общем виде специфика работы конструкций, геометрические параметры которых изменяются под нагрузкой, заключается в следующем.

Поврежденный элемент конструкции (зона I на рис. 1), находясь под действием нагрузок, существующих в период ремонта F_i^p , претерпевает определенные деформации, и в нем возникают некоторые напряжения $\sigma^p(x,y)$. Если деформированный поврежденный элемент конструкции отремонтировать, то он приобретает новую форму (наращиваемая зона II жестко связана с зоной I). Напряженное состояние его при этом не меняется, а ремонтная зона II в этот период свободна от напряжений. Дополнительные силы ΔF_i (как правило, это эксплуатационные нагрузки), приложенные к элементу после усиления, уже воспринимаются совместно двумя зонами (I и II). При этом во всем элементе возникают дополнительные напряжения $\Delta\sigma(x,y)$, которые в пределах зоны I в соответствии с принципом суперпозиции складываются с начальными напряжениями $\sigma^p(x,y)$, в результате (рис. 1)

$$\sigma(x,y) = \sigma^p(x,y) + \Delta\sigma(x,y). \quad (2.1)$$

Окончательное распределение напряжений оказывается качественно отличным от того, которое имело бы место при одновременном загрузении восстановленного элемента конструкции силами

$$F_i = F_i^p + \Delta F_i. \quad (2.2)$$

Таким образом, специфика задач, связанных с расчетной оценкой несущей способности, отремонтированных без вывода из напряженного состояния конструкций, состоит в необходимости учета того обстоятельства, что в конструкции имеются зоны, напряженное состояние которых является функцией суммарной внешней нагрузки F_i , и зоны, напряжения в которых зависят только от разности между суммарной внешней нагрузкой и нагрузкой, действовавшей в период ремонта ΔF_i .

Функциональная взаимосвязь между напряжениями и нагрузками в неповрежденной области (зона I)

$$\sigma_I(x,y) = f_1(F_i^p) + f_2(\Delta F_i), \quad (2.3)$$

а в отремонтированной области (зона II)

$$\sigma_{II}(x,y) = f_3(\Delta F_i) \quad (2.4)$$

Для того чтобы решить вопрос о степени восстановления несущей способности элементов конструкции, ремонт которых проводился без вывода их из напряженного состояния, необходимо решить две задачи:

1. Найти напряжения $\sigma^p(x,y)$ в поврежденной конструкции под действием нагрузки F_i^p (с учетом при необходимости концентрации напряжений на контуре повреждения);

2. Определить распределение приращений напряжений $\Delta\sigma(x,y)$ в кусочно-однородном теле, состоящем из двух областей – основного материала (Под основным материалом подразумевается конструкционный материал, из которого элемент был первоначально изготовлен, при этом в расчетах учитываются те механические характеристики материала, которыми он обладает к моменту выполнения ремонтных работ; зона I) и ремонтной зоны II, – под действием нагрузки $\Delta F_i = F_i - F_i^p$, приложенной к конструкции после ремонта.

Прочностные и деформативные характеристики материала в ремонтной зоне II могут отличаться от аналогичных характеристик основного материала элемента (зона I). Поэтому участие обеих зон в восприятии дополнительной нагрузки является функцией их деформативных характеристик.

Отмеченные особенности необходимо учитывать при оценке эффективности выполнения работ, так как они, наряду с уровнем ремонтных напряжений (ремонтными называют те напряжения, которые действуют в элементе в период, когда проводят его усиление, т.е. когда меняются геометрические параметры элемента), существенно влияют на эффективность усиления. Кроме того, применение материалов с заданными деформативными и прочностными характеристиками обеспечивает возможность в определенной мере управлять степенью восстановления несущей способности конструкций при их усилении без вывода из напряженного состояния.

Показателем эффективности усиления эксплуатируемых сооружений является величина θ , равная отношению несущей способности усиленного сооружения S^y к той несущей способности S^H , которой оно обладало до усиления:

$$\theta = S^y / S^H. \quad (2.5)$$

Показатель θ , определяемый по формуле (5), является функцией ряда величин:

$$\theta = f[\sigma^p; R; K(\sigma); f_1(x, y); F(x, y)], \quad (2.6)$$

где σ^p – лимитирующее напряжение в опасном сечении поврежденного элемента в период ремонта;
 R

– расчетное сопротивление материала; $K(\sigma)$ – отношение модуля упругости ремонтного материала к модулю упругости основного материала, которое в общем случае может быть функцией действующих напряжений; $f_1(x, y)$ – функция, характеризующая геометрические параметры повреждения; $F(x, y)$ – функция, характеризующая геометрические параметры усиливаемого элемента.

Несущую способность поврежденной конструкции в общем случае могут лимитировать ремонтные напряжения как на грани ослабленного сечения (рис. 1,а точка В), так и на контуре повреждения с наращиваемой стороны (см. рис. 1,а точка А). Первое всегда имеет место, когда повреждение не служит концентратором напряжений или концентрация напряжений невелика, а также при большой глубине повреждения, когда добавочные напряжений $\Delta\sigma$ (см. рис. 1) в точке А являются небольшими по значению.

Если для усиления используют материал, модуль упругости которого выше модуля упругости материала конструкции, возможны случаи, когда несущую способность элемента ограничивают напряжения в ремонтном материале.

Исследования [51] показали, что степень повышения несущей способности элемента θ зависит, в первую очередь, от величины ремонтных напряжений, а точнее, от отношения этих напряжений к расчетному сопротивлению основного материала ремонтируемого элемента ($\tilde{\nu} = \sigma^p / R$). Влияние показателя $K(\sigma)$ является во многих случаях также достаточно существенным. Форма повреждения влияет на степень восстановления несущей способности усиливаемого элемента сравнительно мало, а влияние геометрических параметров самого элемента практически не обнаруживается.

3. Методы определения несущей способности усиливаемых статически определимых конструкций

В зависимости от соотношения геометрических размеров усиливаемых элементов для определения показателя θ может быть использованы соотношения механики сплошных сред (для массивных элементов) или технической теории изгиба стержневых конструкций (для относительно тонких элементов) [51].

Примером применения технической теории изгиба балок являются зависимости для определения степени восстановления первоначальной несущей способности отремонтированного изгибаемого элемента прямоугольного сечения (рис. 2,а) [51]

В этом случае отношение (2.5) имеет вид:

$$\theta = M^y / M^H, \quad (3.1)$$

где M^y – изгибающий момент, который может воспринимать элемент после усиления; M^H – изгибающий момент, который мог воспринять неповрежденный элемент.

Изгибающий момент, который может воспринимать элемент после усиления (в соответствии с принципом суперпозиции),

$$M^y = M^p + \Delta M, \quad (3.2)$$

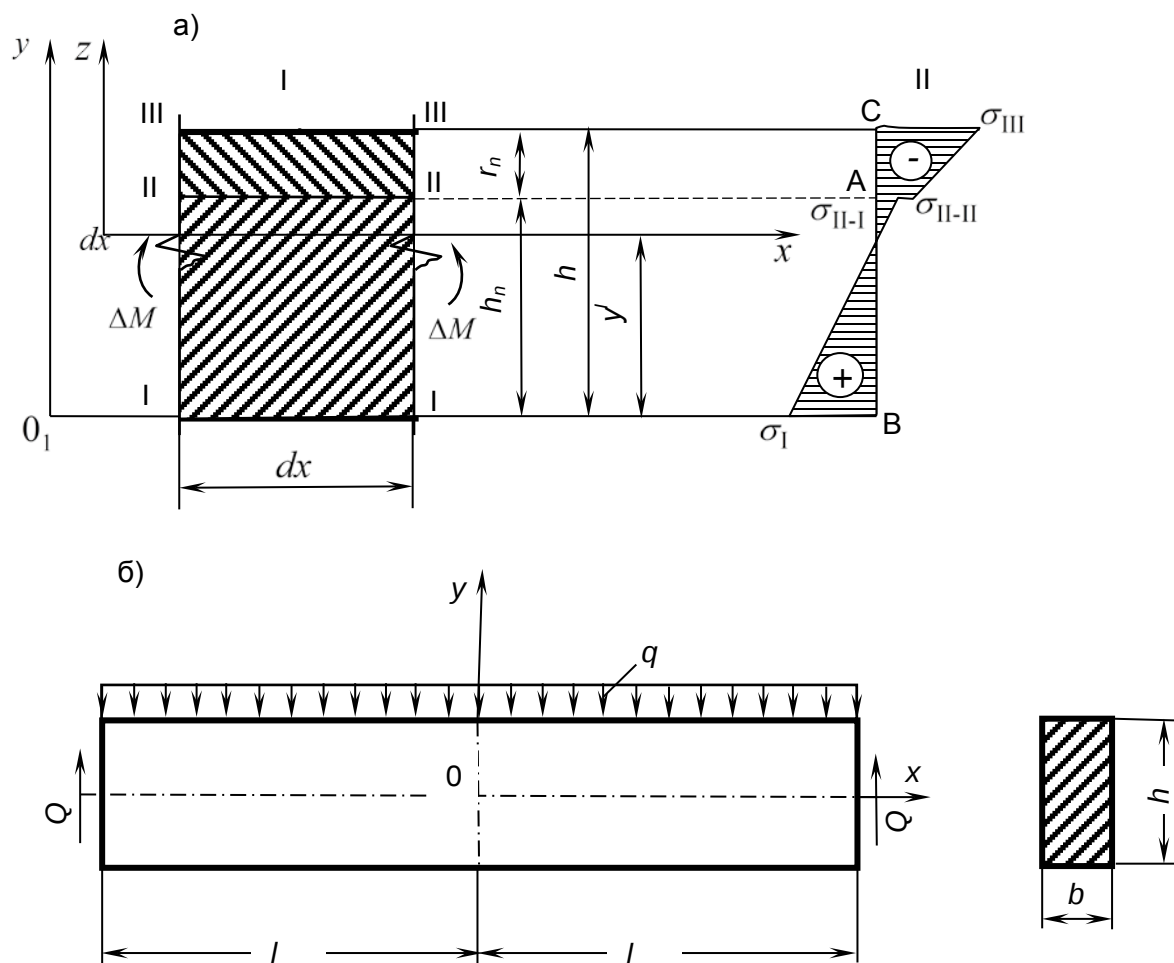


Рис. 2. Схема к определению степени восстановления несущей способности изгибаемых элементов: а – на основе технической теории изгиба: I – исходная расчетная схема; II – эпюра приращений напряжений; б – на основе решений теории упругости

где M^P – изгибающий момент, действовавший в рассматриваемом сечении в период ремонта; ΔM – добавочный изгибающий момент, который может воспринимать сечение после ремонта.

Из уравнения (3.1) с учетом (3.2), получаем

$$\theta = (M^P + \Delta M) / M^H. \quad (3.3)$$

При использовании гипотезы плоских сечений напряжение в балке в период ремонта

$$\sigma^P = M^P / W^H, \quad (3.4)$$

где W^H – момент сопротивления сечения при наличии повреждения, вычисляемый при расчете на 1 м длины сооружения

$$W^H = h^H{}^2 / 6. \quad (3.5)$$

Здесь h^H – высота поврежденного сечения.

На основе (3.4)

$$M^P = \sigma^P h^H{}^2 / 6. \quad (3.6)$$

Добавочный изгибающий момент, который может воспринимать сечение после ремонта

$$\Delta M = (R - \sigma^P) W. \quad (3.7)$$

В формуле (3.7) R – расчетное сопротивление основного материала; W – момент сопротивления расчетного сечения.

Изгибающий момент, который способен воспринять неповрежденный элемент в рассматриваемом сечении

$$M^H = RW^H \quad (3.8)$$

или

$$M^H = Rh^2 / 6. \quad (3.9)$$

На основе формул (3.3), (3.6), (3.7) и (3.9), находим

$$\theta = 1 - \tilde{\nu}(1 - \nabla^2). \quad (3.10)$$

Здесь $\tilde{\nu}$ – относительный уровень ремонтных напряжений $\tilde{\nu} = \sigma^p / R$; ∇ – относительная высота поврежденного элемента в опасном сечении $\nabla = h^H / h$.

Когда несущую способность отремонтированного элемента лимитируют напряжения на грани ослабленного сечения в основном материале (см. рис. 2,а, точка В), показатель θ для изгибаемых элементов, ремонтируемых идентичным материалом, определяют по формуле (3.10).

Для более общего случая, когда ремонт проводят иным материалом, зависимость по определению показателя θ получена в виде [51]:

$$\theta = \psi / \bar{n} - \tilde{\nu}(\psi / \bar{n} - \nabla^2). \quad (3.11)$$

Здесь

$$\bar{n} = \frac{K(1 - \nabla^2) + \nabla^2}{2\nabla + 2k(1 - \nabla)}; \quad (3.12)$$

$$\psi = \nabla^2(3\bar{n} - \nabla) + 3\nabla(\bar{n} - \nabla)(2\bar{n} - \nabla) + 2K(\bar{n} - \nabla)^3 + 2K(1 - \bar{n})^3, \quad (3.13)$$

$K = E_2 / E_1$, E_1 – модуль упругости основного материала конструкции; E_2 – модуль упругости ремонтного материала.

В случаях, когда несущую способность отремонтированного элемента лимитируют напряжения на грани сечения в ремонтном материале (см. рис.2,а точка С),

$$\theta = \chi\psi / K(1 - \bar{n}) + \tilde{\nu}\nabla^2, \quad (3.14)$$

где $\chi = R_{рем} / R$ (здесь $R_{рем}$ – расчетное сопротивление ремонтного материала).

Если несущую способность отремонтированного элемента лимитируют напряжения на контуре устраненного повреждения в основном материале (см. рис.1,а точка А), выражение для θ получено в виде:

$$\theta = \frac{\psi}{\nabla - \bar{n}} - \tilde{\nu}_k \left[\frac{\psi}{\nabla - \bar{n}} - \frac{\nabla^2}{k} \right], \quad (3.15)$$

где k – коэффициент концентрации напряжений, принимаемый по справочным данным [94] в зависимости от формы и глубины повреждения.

Поскольку в общем случае несущую способность изгибаемого элемента конструкции из однородного материала могут ограничивать напряжения в одной из трех точек А, В или С (см. рис.2,а), то вопрос о том, какой из формул – (3.11), (3.14) или (3.15) – необходимо воспользоваться для определения показателя θ , в соответствии с [51], решается после вычисления величин Z , Z_1 и Z^* :

$$Z = \frac{\chi\bar{n}}{K(1 - \bar{n})(1 - \tilde{\nu})}; Z_1 = \frac{k(2\bar{n} - \tilde{N}) - \tilde{\nu}_k(\bar{n} + k\bar{n} - \tilde{N})}{(\tilde{N} - \bar{n})k}, Z^* = \frac{K(1 - \tilde{\nu}_k)(1 - \bar{n}) - \chi(\tilde{N} - \bar{n})}{\tilde{N} - \bar{n}}. \quad (3.16)$$

Рекомендуется такая последовательность вычисления при определении показателя θ . Определяют значения величин Z_1 и Z^* . В случае, когда $Z_1 \leq 0$ и $Z^* \leq 0$, показатель θ рассчитывают по формуле (3.15). Если не выполняется хотя бы одно из указанных условий, нужно вычислять значение величины Z . При $Z \geq 1$ расчет ведут по формуле (2.11), при $Z \leq 1$ по формуле (3.14).

Аналогичные зависимости были получены для стержней из однородных материалов, работающих на сжатие или растяжение, а также для железобетонных элементов [51].

Из соотношения (17) видно, что при $\sigma^p=0$ (в период ремонта напряжения отсутствуют) $\theta=1$. Это значит, что первоначальная несущая способность элемента после ремонта восстанавливается полностью.

При $\sigma^p=R$, степень восстановления несущей способности $\theta=\nabla^2$. Подстановка $\theta=\nabla^2=h^{n^2}/h^2$ в (7) дает $M^y=RW^h h^{n^2}/h^2=Rbh^{n^2}/6=M^p$, откуда следует, что в этом случае несущая способность элемента после ремонта не увеличивается вообще.

Примером применения уравнений теории упругости для определения степени усиления изгибаемого элемента является решение задачи по определению показателя θ для линейно-упругой балки-стенки. Показатель θ , полученный Чекреновой М. В. [51] для двухопорной балки, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки q и усиливаемой за счет увеличения ее высоты (рис. 2,б), имеет вид:

$$\theta = 1 - \tilde{\nu} \left[1 - \frac{\nabla^2}{1 - (1 - \nabla^2)/(\Phi + 1)} \right],$$

где $\Phi = 15(l^2 - x^2)/h^2$.

Аналогичным образом получена формула для определения степени возрастания первоначальной несущей способности элемента θ_1^* при увеличении высоты его сечения:

$$\theta_1 = \frac{1 - (1 - \nabla_1^2)/(\Phi_1 + 1)}{\nabla_1^2} \left[1 - \tilde{\nu}_1 \left(1 - \frac{\nabla_1^2}{(1 - \nabla_1^2)/(\Phi_1 + 1)} \right) \right].$$

Здесь $\nabla_1 = h/h^y$; $\Phi = 15(\ell^2 - x^2)/h^{y^2}$; $\tilde{\nu}_1 = \sigma^y/R$, где h^y – высота поперечного сечения усиленного элемента; σ^y – максимальное значение нормальных напряжений, действующих в элементе проектных размеров в период усиления.

4. Методы оценки несущей способности усиливаемых статически неопределимых конструкций

4.1. Лабораторные исследования оценки эффективности усиления статически неопределимых конструкций

Как известно, в статически неопределимых конструкциях распределение напряжений всегда зависит от соотношения жесткостей несущих элементов. Всякое повреждение любого из элементов, например рамной конструкции, имеет два следствия: снижение несущей способности этого элемента и увеличение напряжений в других (неповрежденных) элементах за счет возникшего изменения соотношения жесткостей. Здесь для восстановления первоначальной несущей способности конструкции не всегда достаточно усилить только поврежденные элементы, усиливать необходимо также и неповрежденные элементы, так как они, как уже было отмечено, оказываются перегруженными.

Из вышеизложенного следует, что для проектирования усиления статически неопределимых конструкций необходимо располагать зависимостями, позволяющими вычислить показатель θ как для поврежденных, так и для неповрежденных элементов. Вид этих зависимостей, как обычно [51, 53, 54], должен быть связан с напряженным состоянием рассматриваемых элементов (изгиб, сжатие, растяжение, внецентренное сжатие и растяжение).

Исходные соотношения для определения степени, $\theta \leq 1$, $\theta_1 \leq 1$. восстановления несущей способности поврежденных элементов θ_n и неповрежденных элементов θ_H имеют отличие от исходного соотношения для θ в случае статически определимых конструкций.

Сущность его состоит в необходимости учесть перераспределение напряжений в конструкции, которые в статически определимых системах не имеют места. В соответствии с этим:

$$\theta_n = \frac{S_n^y}{S_n^H - \delta S_n}; \quad \theta_H = \frac{S_H^y}{S_H^H - \delta S_H}, \quad (4.1)$$

где S_n^y - несущая способность поврежденного элемента после его ремонта; S_H^y - то же, неповрежденного элемента; S_n^H и S_H^H - несущая способность поврежденного элемента до возникновения повреждения и неповрежденного элемента до усиления; δS_n - величина сброса усилия в поврежденном элементе после возникновения повреждения; δS_H - величина нарастания усилия в неповрежденном элементе после возникновения повреждения.

Для того, чтобы изучить закономерности изменения несущей способности статически неопределимых конструкций, усиливаемых без вывода из напряженного состояния, необходимо было первоначально выполнить экспериментальные исследования. Их основными задачами было:

- изучение влияния локальных повреждений на несущую способность статически неопределимых конструкций;
- выявление степени изменения несущей способности статически неопределимой конструкции при усилении поврежденных и неповрежденных элементов, выполняемом без вывода их из напряженного состояния;
- изучение влияния соотношения деформативных характеристик ремонтного и основного материалов на эффект усиления статически неопределимых конструкций;
- установление закономерности изменения несущей способности статически неопределимых конструкций, усиливаемых методом направленного перераспределения жесткостей.

Эксперименты были выполнены на модели статически неопределимой рамной конструкции при масштабе моделирования 1:10 (рис. 3). Геометрические характеристики сечений элементов рамы приведены в таблице 1.

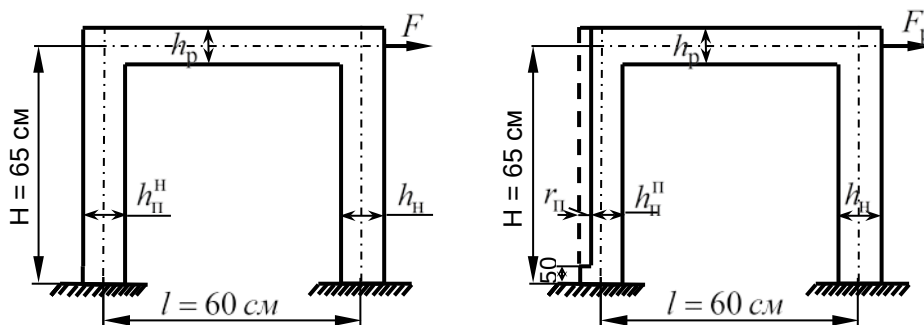


Рис. 3. Лабораторные модели и схемы их загрузки:
а – неповрежденная рама; б – поврежденная рама

Таблица 1. Геометрические характеристики моделей

Наименование характеристик	Ригель	Неповрежденная стойка	Поврежденная стойка
Размеры поперечного сечения $b \times h$ (см ²)	5x10	5x8	5x4 5x5 5x6
Момент инерции сечения, I (см ⁴)	416,666	213,333	26,666 52,083 90,0
Момент сопротивления сечения, W (см ³)	83,333	53,333	13,333 20,833 30,0

Наименование характеристик	Ригель	Неповрежденная стойка	Поврежденная стойка
Глубина повреждения сечения, r_n (см)	—	—	4,0 3,0 2,0

Испытания производились сериями. В каждой из них испытывались три группы рам: не имеющие повреждения; рамы с имитированным повреждением одной из стоек; такие же рамы, но восстановленные или усиленные под нагрузкой.

Испытания проводились при трех разных глубинах повреждений r_n . Эксперименты выполнялись одновременно на шести установках, представляющих собой специальные металлоконструкции (рис.4).

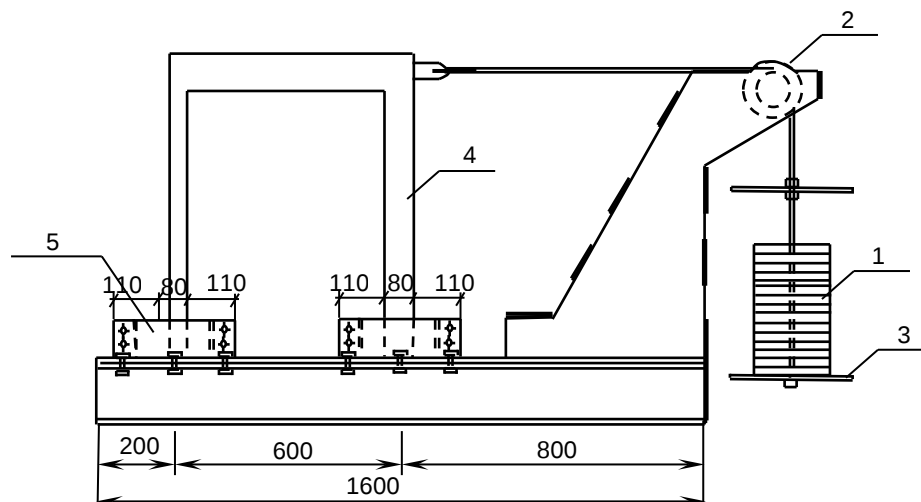


Рис. 4. Схема экспериментальной установки

Опыты с каждой группой рам проводились в следующей последовательности. Первоначально на опытных установках определялась разрушающая нагрузка, которую способна воспринять неповрежденная рама и разрушающая для рамы, имеющая имитированное повреждение. Затем испытывались поврежденные рамы, у которых одна из стоек усиливалась под нагрузкой при различном уровне относительных ремонтных напряжений $\tilde{\nu}$ в диапазоне $\tilde{\nu} = 0.2 \div 0.9$, который представляет практический интерес для практики эксплуатации сооружений (здесь $\tilde{\nu} = \sigma^p / R$, где σ^p – ремонтные напряжения; R – расчетное сопротивление материала). Всего было выполнено 155 опытов.

Выполненные экспериментальные исследования показали, что несущая способность статически неопределимой конструкции, усиленной без вывода из напряженного состояния, меняется по закону, существенно отличающемуся от такового для статически определимых систем [58, 59, 64, 65].

У последних она целиком зависит только от характера и степени усиления поврежденного лимитирующего элемента конструкции [51, 55]. Главными факторами, определяющими эффект усиления, здесь является величина ремонтных напряжений σ^p , и соотношение модулей упругости ремонтного и основного материалов $K = E_2 / E_1$.

В противовес этому несущая способность усиливаемых статически неопределимых конструкций лимитируется прочностью не только поврежденных, но и неповрежденных элементов стержневой системы [60 - 66, 95, 96]. Это связано с тем, что при возникновении повреждения одного из элементов конструкции происходит изменение соотношения жесткостей элементов и связанное с этим перераспределение усилий между ними. Влияние этого фактора на эффект усиления конструкции зависит от характера ее загрузки. У конструкций, воспринимающих только осевые усилия, он при отсутствии податливости опор не проявляется вообще. У конструкций, элементы которых работают на изгиб, он проявляется в полной мере и, как показано ниже, является лимитирующим. У статически неопределимых конструкций, в элементах которых действуют как изгибные напряжения, так и напряжения от осевых сил, влияние рассматриваемого фактора зависит от соотношения этих напряжений.

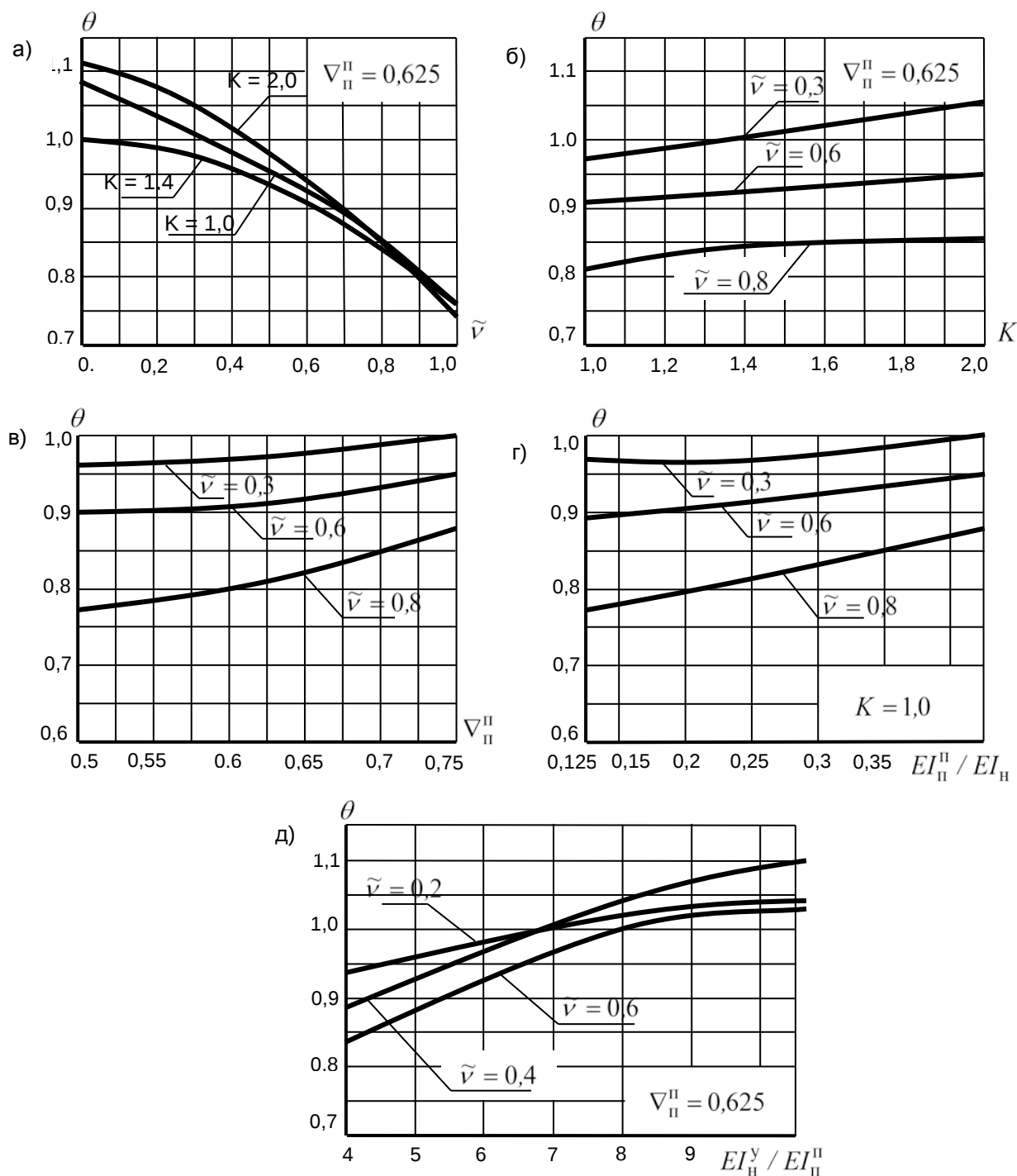


Рис. 5. Графики зависимости: а) $\theta = f(\tilde{\nu})$; б) $\theta = f(K)$; в) $\theta = f(\nabla_{II}^n)$; г) $\theta = f(EI_{II}^n / EI_H)$; д) $\theta = f(EI_H^y / EI_{II}^n)$

Эффект усиления статически неопределимых конструкций существенно связан также с характером и геометрическими характеристиками возникших повреждений. Если стержневой элемент системы получает повреждение, локализованное на коротком по его длине участке, то общая жесткость элемента меняется относительно мало и перераспределение напряжений между элементами системы может не играть решающей роли. Достаточно часто встречаются, однако, случаи, когда повреждение захватывает почти всю длину элемента (например, стойки рамы). Такая ситуация характерна для зданий и сооружений с агрессивными воздействиями окружающей или технологической среды. В этих условиях изменение соотношения жесткостей элементов статически неопределимой системы и, как следствие, перераспределение усилий между ее элементами может быть весьма значительным. Установлено, что при таких ситуациях, в большинстве случаев несущую способность конструкции, получившей сплошные

повреждения, лимитируют не поврежденный, а неповрежденные элементы конструкции и, следовательно, усиливать необходимо только неповрежденные элементы конструкции.

Вышеизложенное позволило выдвинуть некоторые новые идеи, направленные на совершенствование методов ремонта и усиления эксплуатируемых сооружений. В частности, при отсутствии доступа к элементам, нуждающимся в усилении, повысить их несущую способность можно, увеличивая изгибную жесткость других элементов системы, доступ к которым имеется. Усиление конструкции в целом в этом случае осуществляется методом направленного перераспределения жесткостей [63].

Результаты экспериментальных исследований показали, что несущая способность усиливаемой статически неопределимой конструкции в первую очередь зависит от уровня действующих ремонтных напряжений (см. рис. 5,а). Из полученных зависимостей видно, что с увеличением относительного уровня ремонтных напряжений несущая способность усиленной конструкции уменьшается.

При усилении (восстановлении) поврежденной стойки материалом идентичным основному ($K = 1$) первоначальная несущая способность конструкции не восстанавливается полностью. В случае усиления материалом, модуль упругости которого больше, чем модуль упругости основного материала ($K > 1$), в определенном диапазоне значений $\tilde{\nu}$ несущая способность усиленной конструкции увеличивается по сравнению с первоначальной (рис.5,а).

Степень восстановления первоначальной несущей способности конструкции θ увеличивается с возрастанием соотношения деформативных характеристик ремонтного и основного материалов (см. рис. 5,б). Из графиков на рис. 5,в видно, что с увеличением относительной высоты поврежденного сечения $\nabla_{\Pi}^{\Pi} = h_{\Pi}^{\Pi} / h_{\Pi}^H$ (здесь h_{Π}^{Π} - высота поврежденного сечения; h_{Π}^H - высота сечения в неповрежденном состоянии) или с увеличением исходного соотношения жесткостей стоек рамы после получения повреждения, степень восстановления несущей способности конструкции возрастает (рис. 5,г).

Во многих случаях несущую способность конструкций лимитируют элементы, доступ к которым затруднен или вообще невозможен. При такой ситуации повысить или восстановить частично утраченную несущую способность эксплуатируемого сооружения можно методом направленного перераспределения жесткостей. Эффективность указанного метода также была проверена в процессе экспериментов. По результатам экспериментов получены зависимости

$$\theta = f(EI_n^y / EI_n^{\Pi}),$$

где EI_n^y - жесткость неповрежденной стойки после усиления EI_n^{Π} - жесткость поврежденной стойки после повреждения (рис. 5,д). Из приведенных зависимостей видно, что в случае отсутствия доступа к поврежденному элементу, несущая способность конструкции при заданных фиксированных значениях $\tilde{\nu}$ можно восстанавливать полностью или увеличивать до заданной величины, увеличивая жесткость других (неповрежденных) элементов.

Примечание. Здесь и далее индексы "п" и "н" снизу обозначают, что величина относится соответственно к поврежденному и неповрежденному элементу независимо от того, возникло или еще не возникло повреждение, а индексы сверху указывают на состояние системы.

4.2. Оценка несущей способности конструкций после их усиления

Задача проектирования усиления сооружения распадается на два этапа:

1. Оценка напряженно-деформированного состояния существующего сооружения, получившего те или иные повреждения или ослабления.
2. Выбор таких параметров усиления, при которых несущая способность сооружения возрастет до требуемой величины.

Специфика первого этапа состоит в необходимости учета влияния возникших дефектов на изменения напряженно-деформированного состояния конструкций. Главная особенность второго этапа состоит в том, что здесь необходимо оценить напряженно-деформированное состояние усиленного сооружения с учетом тех усилий, которые действовали в нем до усиления и с учетом изменившейся статической схемы его работы.

Вопросы оценки напряженно-деформированного состояния конструкций, получивших локальные повреждения, рассмотрены в [61, 62].

Определению несущей способности статически неопределимых конструкций, усиливаемых без вывода из напряженного состояния, посвящены работы [60, 63 – 66].

Ниже приведем соотношения θ_{Π} и θ_H для стержневых элементов, подверженных изгибу. При других видах напряженного состояния элементов подход остается аналогичным.

Выражения (3.1) для определения показателя эффективности ремонта или усиления, на основании [63 – 66], для поврежденных и неповрежденных элементов конструкции следует записать в виде

$$\theta_{\Pi} = \frac{M_{\Pi}^y}{M_{\Pi}^H - \delta M_{\Pi} + \delta M'_{\Pi}}, \quad \theta_H = \frac{M_H^y}{M_H^H + \delta M_H + \delta M'_H}, \quad (4.2)$$

где M_{Π}^{y*} и M_H^y – изгибающие моменты, которые поврежденный и неповрежденный элементы могут воспринять после усиления; M_{Π}^H и M_H^H – то же до возникновения повреждения (до усиления); δM_{Π} и δM_H – соответственно уменьшение и увеличение изгибающих моментов в поврежденном и неповрежденном элементах, возникшее за счет перераспределения жесткостей элементов системы при ее повреждении; $\delta M'_{\Pi}$ и $\delta M'_H$ – приращение прибавки изгибающих моментов соответственно в поврежденном и неповрежденном элементах от добавочной нагрузки на конструкцию после ее усиления по сравнению с той, которая имела бы место, если бы после усиления соотношения жесткостей элементов системы оставалось бы таким же, как до возникновения повреждения.

Величины изгибающих моментов M_{Π}^y и M_H^y , которые поврежденный и неповрежденный элементы могут воспринять после усиления, складываются из изгибающих моментов, действующих в период ремонта M_{Π}^n , M_H^n и добавочных изгибающих моментов ΔM_{Π}^y , ΔM_H^y , значения которых зависят от разности расчетного сопротивления материалов R и величины ремонтных напряжений σ_{Π}^p и σ_H^p в поврежденном и неповрежденном элементах конструкции, т.е.

$$M_{\Pi}^y = W_{\Pi}^n \sigma_{\Pi}^p + W_{\Pi}^y (R - \sigma_{\Pi}^p); \quad M_H^y = W_H^n \sigma_H^p + W_H^y (R - \sigma_H^p), \quad (4.3)$$

где W_{Π}^n и W_H^n – моменты сопротивления расчетных сечений поврежденного и неповрежденного элементов после получения повреждения; W_{Π}^y и W_H^y – то же, после усиления.

Изгибающие моменты M_{Π}^H и M_H^H в соответствии с (2.8) имеют следующий вид:

$$M_{\Pi}^H = R W_{\Pi}^H; \quad M_H^H = R W_H^H, \quad (4.4)$$

где W_{Π}^H и W_H^H – соответственно, моменты сопротивления сечения элементов статически неопределимой конструкции до получения повреждения.

В соотношениях (3.2) значения δM_{Π} и δM_H зависят от характера возникших повреждений и получены в виде

$$\delta M_{\Pi} = \eta_{\Pi} \tilde{\nu}_{\Pi} R W_{\Pi}^n; \quad \delta M_H = \eta_H \tilde{\nu}_H R W_H^n, \quad (4.5)$$

где η_{Π} и η_H коэффициенты, определяемые согласно [64 – 66].

Значения $\delta M'_{\Pi}$ и $\delta M'_H$ – зависят от характера выполняемого усиления конструкции, меняются в зависимости от того, насколько увеличивается жесткость усиливаемого элемента по отношению к другим элементам конструкции, и имеют вид:

$$\delta M'_{\Pi} = \eta'_{\Pi} R W_{\Pi}^y (1 - \tilde{\nu}_{\Pi}); \quad \delta M'_H = \eta'_H R W_H^y (1 - \tilde{\nu}_H). \quad (4.6)$$

В формулах (3.6) значения коэффициентов η'_{Π} и η'_H , определяются в соответствии с [64 – 66].

После подстановки (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) в формулу (3.2), преобразований и упрощений

$$\theta_n = \frac{W_n \sigma_n^p + W_n^y (R - \sigma_n^p)}{RW_n - \eta_n \tilde{v}_n RW_n^n + \eta_n' RW_n^y (1 - \tilde{v}_n)}, \quad \theta_h = \frac{W_h \sigma_h^p + W_h^y (R - \sigma_h^p)}{RW_h + \eta_h \tilde{v}_h RW_h^n + \eta_h' RW_h^y (1 - \tilde{v}_h)}, \quad (4.7)$$

где W_n и W_h – моменты сопротивления поврежденного и неповрежденного элементов; W_n^y и W_h^y – моменты сопротивления поврежденного и неповрежденного элементов после усиления; σ_n^p и σ_h^p – соответственно ремонтные напряжения в поврежденном и неповрежденном элементах.

Показатели θ_n и θ_h для элементов конструкций усиливаемых идентичным материалом в случае, когда несущую способность усиленных элементов лимитируют напряжения на грани сечения в основном материале с ненаращиваемой стороны (точка В на рис. 2,а), определяют по формулам (4.7).

Вывод зависимостей по определению показателя θ_n и θ_h для более общего случая, когда усиление проводят иным материалом, приведен ниже.

В соответствии [51] изгибающие моменты, которые поврежденный и неповрежденный элементы статически неопределимой конструкции могут воспринимать после усиления, в случае усиления иным материалом, принимают следующий вид:

$$M_n^y = W_n^n \sigma_n^p + W_n^y (R - \sigma_n^p) \psi_n / \bar{n}_n; \quad M_h^y = W_h \sigma_h^p + W_h^y (R - \sigma_h^p) \psi_h / \bar{n}_h, \quad (4.8)$$

где

$$\bar{n}_n = \frac{K(1 - \nabla_n^2) + \nabla_n^2}{2\nabla_n + 2K(1 - \nabla_n)}; \quad \bar{n}_h = \frac{K(1 - \nabla_h^2) + \nabla_h^2}{2\nabla_h + 2K(1 - \nabla_h)}; \quad (4.9)$$

$$\psi_n = \nabla_n^2 (3\bar{n}_n - \nabla_n) + 3\nabla_n (\bar{n}_n - \nabla_n) (2\bar{n}_n - \nabla_n) + 2K(\bar{n}_n - \nabla_n)^3 + 2K(1 - \bar{n}_n)^3;$$

$$\psi_h = \nabla_h^2 (3\bar{n}_h - \nabla_h) + 3\nabla_h (\bar{n}_h - \nabla_h) (2\bar{n}_h - \nabla_h) + 2K(\bar{n}_h - \nabla_h)^3 + 2K(1 - \bar{n}_h)^3. \quad (4.10)$$

Здесь

$$\nabla_n = h_n^n / h_n^y; \quad \nabla_h = h_h / h_h^y; \quad K = E_2 / E_1,$$

где h_h – высота сечения неповрежденного элемента; h_n^n – высота сечения поврежденного элемента после получения повреждения; h_n^y и h_h^y – высоты сечений поврежденного и неповрежденного элементов после усиления; E_1 , E_2 – модули упругости основного и ремонтного материалов.

Выражения для $\delta M_n'$ и $\delta M_h'$ в рассматриваемом случае получены в виде:

$$\delta M_n' = \eta_n' RW_n^y (1 - \tilde{v}_n) \psi_n / \bar{n}_n; \quad \delta M_h' = \eta_h' RW_h^y (1 - \tilde{v}_h) \psi_h / \bar{n}_h. \quad (4.11)$$

Подставляя (3.8), (3.4), (3.5), (3.11) в формулу (3.2) получим:

$$\theta_n = \frac{W_n \sigma_n^p + W_n^y (R - \sigma_n^p) \psi_n / \bar{n}_n}{RW_n - \eta_n \tilde{v}_n RW_n^n + \eta_n' RW_n^y (1 - \tilde{v}_n) \psi_n / \bar{n}_n},$$

$$\theta_h = \frac{W_h \sigma_h^p + W_h^y (R - \sigma_h^p) \psi_h / \bar{n}_h}{RW_h + \eta_h \tilde{v}_h RW_h^n + \eta_h' RW_h^y (1 - \tilde{v}_h) \psi_h / \bar{n}_h}. \quad (4.12)$$

Когда несущую способность усиленных элементов лимитируют напряжения на грани сечения в ремонтном материале (точка С на рис. 2,а), изгибающие моменты, которые поврежденный и неповрежденный элементы статически неопределимой конструкции могут воспринимать после усиления, имеют вид:

$$M_n^y = W_n^n \sigma_n^p + W_n^y R_{рем} \psi_n / K(1 - \bar{n}_n); \quad M_h^y = W_h \sigma_h^p + W_h^y R_{рем} \psi_h / K(1 - \bar{n}_h). \quad (4.13)$$

Формулы для $\delta M_n'$ и $\delta M_h'$ в этом случае будут иметь следующий вид:

$$\delta M'_n = \eta'_n R_{\text{рем}} W_n^y \psi_n / K(1 - \bar{n}_n); \quad \delta M'_H = \eta'_H R_{\text{рем}} W_H^y \psi_H / K(1 - \bar{n}_H). \quad (4.14)$$

После подстановки (3.12), (3.3), (3.4), (3.13) в формулу (3.1), получим

$$\theta_{\Pi} = \frac{W_{\Pi} \sigma_{\Pi}^p + W_{\Pi}^y R_{\text{рем}} \psi_{\Pi} / K(1 - \bar{n}_{\Pi})}{RW_H - \eta_{\Pi} \tilde{\nu}_n^k RW_n^n + \eta'_n R_{\text{рем}} W_n^y \psi_n / K(1 - \bar{n}_n)};$$

$$\theta_H = \frac{W_H \sigma_H^p + W_H^y R_{\text{рем}} \psi_H / K(1 - \bar{n}_H)}{RW_H + \eta_H \tilde{\nu}_H^k RW_H^n + \eta'_H R_{\text{рем}} W_H^y \psi_H / K(1 - \bar{n}_H)}, \quad (4.15)$$

где $\chi = R_{\text{рем}} / R$ (здесь $R_{\text{рем}}$ – расчетное сопротивление ремонтного материала).

В случае, когда несущую способность усиленных элементов конструкций лимитируют напряжения на контуре устраненного повреждения в основном материале поврежденного элемента (точка А на рис. 2,а), или на грани сечения в основном материале неповрежденного элемента с наращиваемой стороны (в случае усиления неповрежденного элемента), зависимости для M_n^y и M_H^y имеют вид:

$$M_n^y = W_n^n \sigma_n^p + W_n^y (R - \sigma_n^{pk}) \psi_n / (\tilde{N}_n^n - \bar{n}_n); \quad M_H^y = W_H \sigma_H^p + W_H^y (R - \sigma_H^p) \psi_H / (\tilde{N}_H - \bar{n}_H) \quad (4.16)$$

В этом случае для $\delta M'_n$ и $\delta M'_H$ будем иметь следующие выражения:

$$\delta M'_n = \eta'_n RW_n^y (1 - \tilde{\nu}_n^k) \psi_n / (\tilde{N}_n^n - \bar{n}_n); \quad \delta M'_H = \eta'_H RW_H^y (1 - \tilde{\nu}_H) \psi_H / (\tilde{N}_H - \bar{n}_H). \quad (4.17)$$

Тогда, подставляя (3.16), (3.4), (3.5), (3.17) в формулы (3.2), получим

$$\theta_n = \frac{W_n \sigma_n^p + W_n^y (R - \sigma_n^{pk}) \psi_n / (\tilde{N}_n^n - \bar{n}_n)}{RW_H - \eta_{\Pi} \tilde{\nu}_n^k RW_n^n + \eta'_n RW_n^y (1 - \tilde{\nu}_n^k) \psi_n / (\tilde{N}_n^n - \bar{n}_n)};$$

$$\theta_H = \frac{W_H \sigma_H^p + W_H^y (R - \sigma_H^p) \psi_H / (\tilde{N}_H - \bar{n}_H)}{RW_H + \eta_H \tilde{\nu}_H^k RW_H^n + \eta'_H RW_H^y (1 - \tilde{\nu}_H) \psi_H / (\tilde{N}_H - \bar{n}_H)}. \quad (4.18)$$

В формуле (4.17) $\tilde{\nu}_n^{pk} = \sigma_n^{pk} / R$, где σ_n^{pk} – ремонтное напряжение на контуре повреждения в поврежденном элементе конструкции; k – коэффициент концентрации напряжений, принимаемый по справочным данным [94] в зависимости от формы и глубины повреждения.

Так как в общем случае несущую способность изгибаемого поврежденного (или неповрежденного) элементов статически неопределимой конструкции из однородного материала после усиления могут ограничивать напряжения в одной из трех точек А, В, или С (см. рис. 2,а), то вопрос о том, какой из формул – (4.12), (4.15), или (4.18) необходимо воспользоваться для определения показателя θ_n , по аналогии с выражениями (3.16), решается после вычисления трех величин

$$Z_{\Pi} = \frac{\chi \bar{n}_{\Pi}}{K(1 - \bar{n}_{\Pi})(1 - \tilde{\nu}_{\Pi})}; \quad Z_{\Pi 1} = \frac{k(2\bar{n}_{\Pi} - \nabla_{\Pi}^n) - \tilde{\nu}_{\Pi}^k (\bar{n}_{\Pi} + k\bar{n}_{\Pi} - \nabla_{\Pi}^n)}{(\nabla_{\Pi}^n - \bar{n}_{\Pi})k}; \quad (4.19)$$

$$Z_{\Pi}^* = \frac{K(1 - \tilde{\nu}_{\Pi}^k)(1 - \bar{n}_{\Pi}) - \chi(\nabla_{\Pi}^n - \bar{n}_{\Pi})}{\nabla_{\Pi}^n - \bar{n}_{\Pi}}.$$

Таким же образом для вычисления показателя θ_H необходимо воспользоваться критериями Z_H , Z_{H1} и Z_H^* , определяемыми по формулам

$$Z_H = \frac{\chi \bar{n}_H}{K(1 - \bar{n}_H)(1 - \tilde{\nu}_H)}; \quad Z_{H1} = \frac{(2\bar{n}_H - \nabla_H)(1 - \tilde{\nu}_H)}{\nabla_H - \bar{n}_H}; \quad (4.20)$$

$$Z_H^* = \frac{K(1 - \tilde{\nu}_H)(1 - \bar{n}_H) - \chi(\nabla_H - \bar{n}_H)}{\nabla_H - \bar{n}_H}.$$

Рекомендуется такая последовательность вычислений при определении показателя θ_n . Определяют значения величин Z_{n1} и Z_n^* . Если значение каждой из этих величин меньше нуля или равны нулю, то показатель θ_n рассчитывают по формуле (4.18). Если не выполняется хотя бы одно из указанных условий, то вычисляют значение величины Z_n . При $Z_n \geq 1$, расчет ведут по формуле (4.12), при $Z_n < 1$ – по формуле (4.15).

Последовательность расчетов при вычислении показателя θ_n такая же, но с использованием соответствующих критериев и формул.

3.3. Особенности расчета статически неопределимых конструкций, усиливаемых методом направленного перераспределения жесткостей

Во многих случаях ослабленные элементы конструкций портовых сооружений, недоступны для ремонта и усиления. До настоящего времени считалось, что в такой ситуации повысить или восстановить частично утраченную несущую способность эксплуатируемого сооружения невозможно. Однако на базе материалов, приведенных в [58, 59, 63 – 65, 69], можно утверждать, что и в таких случаях существует способ усиления сооружения. Его сущность заключается в том, чтобы обеспечить такое перераспределение соотношения жесткостей элементов статически неопределимой системы, при котором доля нагрузки, приходящаяся на ослабленный или недоступный для усиления элемент снизится. Такой способ повышения несущей способности эксплуатируемых сооружений называется методом направленного перераспределения жесткостей. Сущность метода, следовательно, сводится к тому, чтобы усиливать те элементы, к которым имеется доступ, повышая их жесткость. Поскольку в статически неопределимой системе распределение усилий между элементами зависит от соотношения жесткостей, такое мероприятие автоматически приводит к частичной разгрузке элементов, жесткость которых осталась неизменной. Характерными особенностями такого метода усиления являются:

1. Определенное несоответствие несущей способности и усилий в элементах, жесткость которых увеличивается (первое всегда больше второго).

2. Повышенный расход материалов по сравнению со случаем, когда усилению подвергается лимитирующий элемент конструкции.

Несмотря на отмеченный перерасход материала, экономическая эффективность рассматриваемого метода представляется вполне очевидной, так как альтернативным вариантом было бы строительство нового, более тяжелого, сооружения, на что потребовались бы несравненно большие затраты.

Требуемая степень повышения жесткости усиливаемых элементов должна определяться обычным статическим расчетом конструкций, которая выполняется любым традиционным методом строительной механики.

Порядок расчета при этом должен быть следующим:

1. Устанавливается предельная несущая способность поврежденной конструкции.

2. Задается требуемая степень повышения несущей способности конструкции, выражаемая показателем $\bar{\theta} = \bar{S}^y / S^h$, где $\bar{S}^y$ – требуемая несущая способность конструкции после усиления; S^h – первоначальная несущая способность конструкции.

3. Увеличением жесткости одного или нескольких элементов конструкции, к которым имеется доступ, обеспечивается более благоприятное перераспределение усилий между элементами конструкций для достижения требуемого значения $\bar{\theta}$.

4. Вычисляется требуемое соотношение жесткости элементов после усиления, при котором несущая способность конструкции возрастает на заданную величину.

Выражения для требуемых моментов сопротивлений сечений элементов, при котором их несущая способность возрастает на заданную величину, полученные из (4.7) имеют вид:

$$\bar{W}_n^y = \frac{\bar{\theta}_n (RW_n^h - \eta_n \tilde{v}_n RW_n^n) - W_n^p \sigma_n^p}{R(1 - \tilde{v}_n)(1 + \bar{\theta}_n \eta_n')}; \quad \bar{W}_h^y = \frac{\bar{\theta}_h (RW_h^h + \eta_h \tilde{v}_h RW_h^n) - W_h^p \sigma_h^p}{R(1 - \tilde{v}_h)(1 + \bar{\theta}_h \eta_h')} . \quad (4.21)$$

Для более общего случая, когда усиление проводят иным материалом, зависимости (4.21) в соответствии с (4.12) принимают вид:

$$\bar{W}_n^y = \frac{\bar{\theta}_n(RW_n^H - \eta_n \tilde{v}_n RW_n^n) - W_n^n \sigma_n^p}{R(1 - \tilde{v}_n)(1 + \bar{\theta}_n \eta_n') \psi_n / \bar{n}_n}; \quad \bar{W}_H^y = \frac{\bar{\theta}_H(RW_H^H + \eta_H \tilde{v}_H RW_H^n) - W_H^n \sigma_H^p}{R(1 - \tilde{v}_H)(1 + \bar{\theta}_H \eta_H') \psi_H / \bar{n}_H}. \quad (4.22)$$

Значения $\bar{W}_n^y$ и $\bar{W}_H^y$ для элементов конструкций, усиливаемых идентичным или иным материалом, в случае, когда несущую способность усиленных элементов лимитируют напряжения на грани сечения в основном материале с нарастающей стороны (точка В на рис. 2,а), определяются по формулам (4.22).

В случае, когда несущую способность усиленных элементов лимитируют напряжения на грани сечения в ремонтном материале (точка С на рис. 2,а), выражения для $\bar{W}_n^y$ и $\bar{W}_H^y$, полученные на основании (4.15), имеют вид:

$$\bar{W}_n^y = \frac{\bar{\theta}_n(RW_n^H - \eta_n \tilde{v}_n RW_n^n) - W_n^n \sigma_n^p}{R_{рем}(1 - \tilde{v}_n)(1 + \bar{\theta}_n \eta_n') \psi_n / K_n(1 - n)}; \quad \bar{W}_H^y = \frac{\bar{\theta}_H(RW_H^H + \eta_H \tilde{v}_H RW_H^n) - W_H^n \sigma_H^p}{R_{рем}(1 - \tilde{v}_H)(1 + \bar{\theta}_H \eta_H') \psi_H / K_n(1 - n)}. \quad (4.23)$$

Если несущую способность усиленных элементов конструкций лимитируют напряжения на контуре устраненного повреждения в основном материале поврежденного элемента или на грани сечения в основном материале с нарастающей стороны в случае усиления неповрежденного элемента (точка А на рис. 2,а), значения $\bar{W}_n^y$ и $\bar{W}_H^y$ можно найти по формулам,

$$\bar{W}_n^y = \frac{\bar{\theta}_n(RW_n^H - \eta_n \tilde{v}_n RW_n^n) - W_n^n \sigma_n^p}{R(1 - \tilde{v}_n)(1 + \bar{\theta}_n \eta_n') \psi_n / (\nabla_n^H - \bar{n}_n)}; \quad \bar{W}_H^y = \frac{\bar{\theta}_H(RW_H^H + \eta_H \tilde{v}_H RW_H^n) - W_H^n \sigma_H^p}{R(1 - \tilde{v}_H)(1 + \bar{\theta}_H \eta_H') \psi_H / (\nabla_H - \bar{n}_H)}, \quad (4.24)$$

которые получены на основании выражений (4.18).

Вопрос о том, какой из формул – (4.22), (4.23) или (4.24) нужно воспользоваться при определении величин $\bar{W}_n^y$ и $\bar{W}_H^y$, решается после вычисления критериев (4.19) и (4.20).

Для определения требуемых геометрических характеристик усиливаемых элементов статически неопределимой конструкции по изложенной методике составлена компьютерная программа. В программе по результатам расчетов определяются требуемые соотношения жесткостей элементов усиливаемой статически неопределимой конструкции, необходимые для обеспечения заданной степени восстановления первоначальной несущей способности конструкции θ . Расчеты выполняются методом последовательных приближений в зависимости от выбранного варианта усиления конструкции.

Для любой заданной конструкции расчеты усиления методом направленного перераспределения жесткостей можно выполнять для всех возможных вариантов усиления, а затем выбирать наиболее экономичный.

Для того, чтобы проиллюстрировать эффективность усиления статически неопределимых конструкций методом направленного перераспределения жесткостей по разработанной программе, были выполнены примеры расчетов для однопролетной и трехпролетной рам при схемах загрузки, приведенных на рис.6. При расчетах принималась разная глубина повреждения одной из стоек (разное исходное соотношение жесткостей стоек). Также были приняты следующие исходные данные: $I_p = 416,67$, $I_n^H = 26,667$, $I_H = 213,33$ см⁴ – моменты инерций элементов однопролетной рамы; $I_p = 0,333$, $I_n^H = 2,67 \times 10^{-3}$, $I_H = 2,133 \times 10^{-2}$ м⁴ – то же, для элементов трехпролетной рамы.

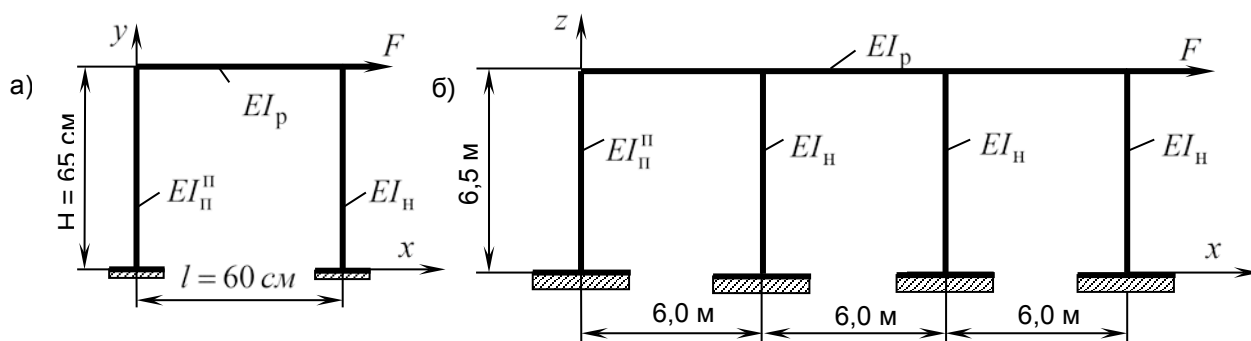


Рис. 6. Расчетные схемы: а) Однопролетной рамы; б) Трехпролетной рамы

В первом случае при заданной форме повреждения (по всей высоте стоек) несущую способность конструкции в целом лимитирует неповрежденная стойка. Считается, что неповрежденная лимитирующая стойка недоступна для усиления, поэтому усилению подвергается поврежденная стойка. По результатам расчетов построены графики $EI_n^y / EI_n = f(\tilde{\nu})$, приведенные на рис. 7а, где EI_n – жесткость неповрежденной стойки; EI_n^y – жесткость поврежденной стойки после усиления.

Для трехпролетной рамы расчеты усиления были выполнены для случаев, когда меняется жесткость одного, двух или трех элементов (усилению подвергались стойки 1, 2 и 3). Результаты расчетов отражены на графиках $\sum EI_i^y / \sum EI_i = f(\tilde{\nu})$ (рис.7,б), где $\sum EI_i^y$ – сумма жесткостей всех стоек стержневой системы после усиления; $\sum EI_i^n$ – то же, до усиления.

По полученным графикам, в зависимости от заданного значения θ и уровня ремонтных напряжений $\tilde{\nu}$, можно найти требуемое соотношение жесткостей элементов, при котором несущую способность всей конструкции в целом станет достаточной для восприятия расчетной эксплуатационной нагрузки F . Из графиков на рис.7,а видно, что чем больше уровень ремонтных напряжений $\tilde{\nu}$, тем в большей степени требуется увеличивать соотношение жесткостей элементов конструкции после усиления для того, чтобы обеспечить заданную степень восстановления или повышения несущей способности конструкции.

Из рассмотренных вариантов усиления для трехпролетной рамы наиболее эффективным является вариант усиления стойки 1. Соотношение $\sum EI_i^y / \sum EI_i$ при $\tilde{\nu}=0.7$ (где имеется наибольшее расхождение между графиками – рис.7,б) в случае усиления стоек 1, 2 и 3 – на 46,8%, а в случае усиления стоек 1 и 2 – на 92,2% больше по сравнению со случаем, когда усиливается только стойка 1.

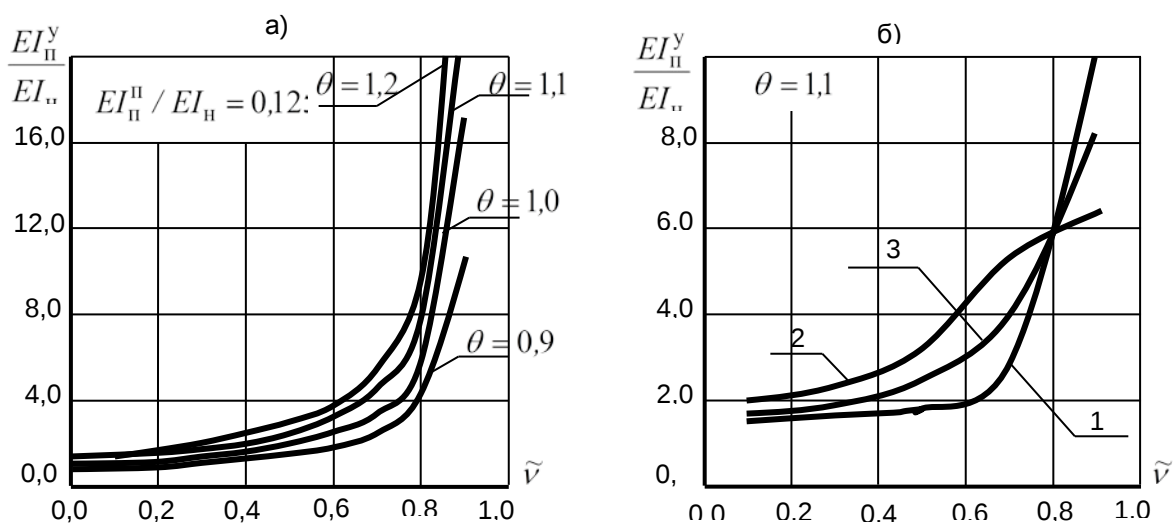


Рис. 7. Графики: а) $EI_n^y / EI_n = f(\tilde{\nu})$ при $\nabla_n^n = 0,5$;

б) Графики $\sum EI_i^y / \sum EI_i^n = f(\tilde{\nu})$: 1 – при усилении стойки 1; 2 – при усилении стоек 1 и 2; 3 – при усилении стоек 1, 2 и 3

Следует отметить, что в процессе усиления многопролетных рамных конструкций в общем случае периодически меняются элементы, лимитирующие их несущую способность при разной степени усиления. Это сказывается на форме кривых (см. кривая 2 на рис. 7, б).

В заключении можно добавить, что предельным случаем применения метода направленного перераспределения жесткостей является случай полного или почти полного исключения из работы поврежденного элемента конструкции. Такое положение, по-видимому, возможно при наличии у указанного элемента существенных повреждений. Но даже при таких ситуациях, т.е. когда в материале элемента получили значительные развития пластические деформации, учет его остаточной несущей способности на основе положений изложенных выше, может дать существенный технико-экономический эффект.

4.4. Оценка эффективности усиления конструкций с учетом пластических деформаций

Известно [24], что эффективность усиления конструкций находящихся под нагрузкой значительно повышается, если после выхода на эксплуатационный режим допускается развитие пластических деформаций в материале.

Методика определения эффективности усиления конструкций с учетом пластических деформаций изложены в работах [67 - 69]. В этих работах при определении несущей способности усиливаемых конструкций используется теория идеально упругопластического материала (диаграмма Прандтля). Поскольку основные несущие элементы исследуемых сооружений испытывают деформацию изгиба, показатель эффективности усиления определяется для случая чистого упругопластического изгиба балки. Для простоты полагается, что поперечное сечение балки прямоугольник. Ремонту подвергается находящийся под воздействием изгибающего момента балка (рис. 8, а), в которой образовалось поверхностное повреждение глубиной r_n . В результате этого уменьшился момент сопротивления поперечного сечения и величина максимального напряжения повышается от σ до σ_p . Если отремонтировать элемент, не выводя его из напряженного состояния, то заполнивший повреждение ремонтный материал при неизменной внешней нагрузке не воспринимает напряжений. Эффект ремонта начнет сказываться только в том случае, если нагрузка на элемент будет увеличена. Рассмотрим случай, когда ремонт произведен материалом, модуль упругости, которого E_2 равен модулю упругости основного материала конструкции E_1 (рис. 8, а). При увеличении нагрузки после ремонта, напряжения на одной из граней усиленного сечения достигнут величины предела текучести σ_m . Затем зона текучести будет распространяться вглубь сечения, а напряжения на противоположной грани сечения увеличиваются. Как известно, справедливо равенство $M^y = \int_A \sigma z dA$, где M^y - изгибающий момент воспринимаемый сечением

после восстановления (усиления); A - площадь поперечного сечения усиливаемой балки. Причем при упругой работы конструкции M^y определяется по формуле (3.2).

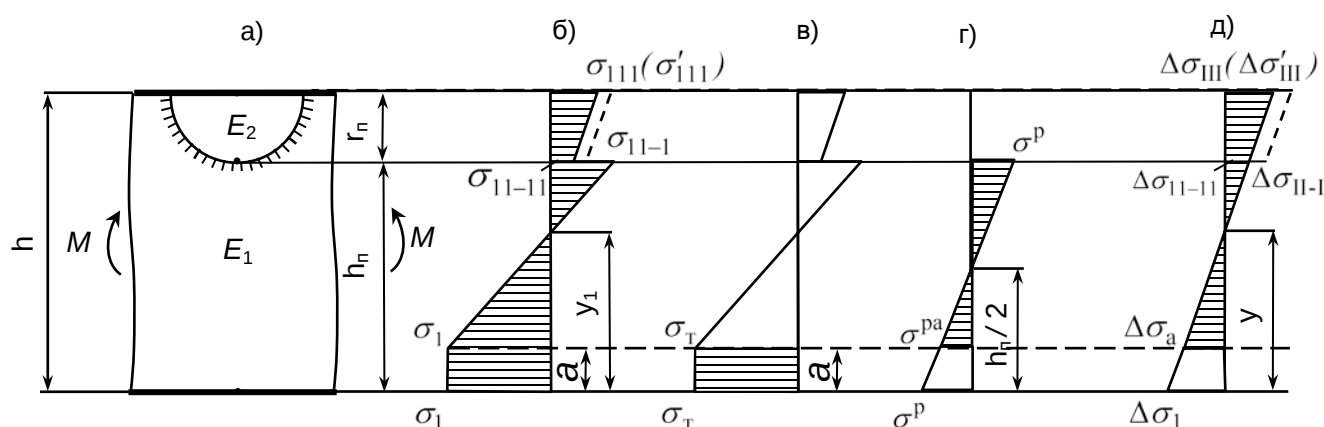


Рис. 8. К определению усилий в поврежденном сечении после усиления:

а) - поврежденный элемент; б) - результирующая эпюра напряжений после усиления; в) - зона пластических деформаций; г) - эпюра напряжений σ_p , возникающие во время ремонта от воздействия изгибающего момента M_p' ; д) - эпюра приращений напряжений $\Delta\sigma$ от воздействия изгибающего

Условно разбиваем сечение на две части (см. рис. 8) – зону пластических деформаций, высотой a (рис. 8,в) и зону упругих деформаций, высотой $(h-a)$. Напряжения в зоне упругих деформаций можно разделить на две составляющие: напряжения σ^p , возникающие во время ремонта от воздействия изгибающего момента M'^p (рис. 8,г) и приращения напряжений $\Delta\sigma$ от воздействия изгибающего момента $\Delta M'$ (рис. 3.8,д). При этом формулу (3.2) можно представить в виде:

$$M^y = M'^p + \Delta M' + M^{пл} \quad (4.25)$$

Здесь

$$M'^p = \int_{A'} \sigma^p z dA, \quad \Delta M' = \int_{A'} \Delta \sigma z dA, \quad M^{пл} = \int_{A-A'} \sigma_T z dA, \quad (4.26)$$

где A' - площадь сечения балки в пределах зоны упругих деформаций. После преобразований получается

$$M'^p = \frac{1}{3} \sigma^{pa} \left(h^n / 2 - a \right)^2 + \frac{1}{3} \sigma^p \left(h^n / 2 \right)^2, \quad (4.27)$$

где σ^{pa} - величина напряжений, обусловленная воздействия изгибающего момента M'^p в зоне основного материала на высоте a от крайних волокон; h^n - высота поврежденного сечения. Упругие деформации продольных волокон элемента пропорциональны расстояниям от нейтральной оси, поэтому

$$\sigma^{pa} = \sigma^p \frac{h^n / 2 - a}{h^n / 2}. \quad (4.28)$$

Обозначая через R - расчетное сопротивление материала и полагая

$$\tilde{\nu} = \frac{\sigma^p}{R}, \quad n = \frac{\sigma_T}{R}, \quad \xi = \frac{a}{h}, \quad \nabla = \frac{h^n}{h}, \quad \lambda = \frac{2}{3n\nabla} \left[(\nabla / 2 - \xi)^3 + (\nabla / 2)^3 \right] \quad (4.29)$$

формулу (3.27) можно записать так

$$M'^p = \sigma_T h^2 \tilde{\nu} \lambda \quad (4.30)$$

После преобразований выражение для $\Delta M'$ примет вид:

$$\Delta M' = \frac{1}{3} \Delta \sigma_a (y - a)^2 + \frac{1}{3} \Delta \sigma_{111} (h - y)^2, \quad (4.31)$$

где $\Delta \sigma_a$ - приращение напряжений в зоне основного материала на высоте a от крайних волокон от воздействия изгибающего момента $\Delta M'$; $\Delta \sigma_{111}$ - приращение фибровых напряжений в зоне ремонтного материала; y - расстояние от крайних волокон основного материала до нейтральной оси;

$$\Delta \sigma_a = \sigma_T - \sigma^{pa}, \quad \Delta \sigma_{111} = \Delta \sigma_a \frac{h - y}{y - a}. \quad (4.32)$$

Подставив выражения (3.32) в формулу (3.31), получаем:

$$\Delta M' = \frac{1}{3} \sigma_T \left(1 - \frac{\tilde{\nu}}{n} \cdot \frac{h^n / 2 - a}{h^n / 2} \right) \frac{[(y - a)^3 + (h - y)^3]}{y - a}. \quad (4.33)$$

Уравнение нейтральная оси получается из условия, что при изгибе в поперечном сечении балки продольная сила равна нулю:

$$\sigma_1 a + \frac{1}{2} \sigma^{pa} \left(h^n / 2 - a \right) + \frac{1}{2} (\sigma_T - \sigma^{pa}) (y - a) = \frac{1}{2} \sigma^p h^n / 2 + \frac{1}{2} \sigma_{111} (h - y).$$

С учетом формул (3.28), (3.31) это уравнение принимает вид:

$$\xi h + \frac{1}{2} \tilde{\nu}^{pa} h (\nabla / 2 - \xi) + \frac{1}{2} (1 - \tilde{\nu}^{pa}) (y - \xi h) = \frac{\tilde{\nu} h \nabla}{4n} + \frac{1}{2} (1 - \tilde{\nu}^{pa}) \frac{(h - y)^2}{y - \xi h},$$

где

$$\tilde{\nu}^{pa} = \frac{\tilde{\nu}}{n} \cdot \frac{\nabla / 2 - \xi}{\nabla / 2}. \quad (4.34)$$

Из полученного уравнения находим

$$y = m h. \quad (4.35)$$

Здесь

$$m = \frac{B\xi + (1 - \xi^2)}{B - 2(\xi - 1)}, \quad B = \frac{\xi + 0.5\tilde{\nu}^{pa}(\nabla / 2 - \xi) - \frac{\tilde{\nu}\nabla}{4n}}{0.5(1 - \tilde{\nu}^{pa})}. \quad (4.36)$$

Учитывая формулу (3.35), соотношение (3.33) можно записать как

$$\Delta M' = \sigma_T h^2 \lambda_1 (1 - \tilde{\nu}^{pa}), \quad (4.37)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{(m - \xi)^3 + (1 - m)^3}{3(m - \xi)}. \quad (4.38)$$

Положение нулевой линии результирующей эпюры напряжений упругих деформаций определяется величиной y_1 (рис. 8,б), которую можно определить из равенства нулю продольной силы в сечении балки:

$$\sigma_T a + \frac{1}{2} \sigma_T (y_1 - a) = \frac{1}{2} \sigma_{11-1} (h_n - y_1) + \frac{\sigma_{111} + \sigma_{11-11}}{2} r_n, \quad (4.39)$$

где σ_{11-1} – приращение напряжений на поверхности основного материала в месте контакта с ремонтным материалом; σ_{11-11} – приращение напряжений на поверхности ремонтного материала в месте контакта с основным материалом; r_n – глубина повреждения (рис. 8,а).

Очевидно, что

$$r_n = h - h_n, \quad \sigma_{11-1} = \sigma_T \frac{(h_n - y_1)}{y_1 - a}, \quad \sigma_{11-11} = (\sigma_T - \sigma^{pa}) \frac{(h_n - y)}{y - a}. \quad (4.40)$$

Подставив выражение (3.28), (3.32), (3.34) и (3.40) в формулу (3.39) и обозначив

$$\psi = \frac{\nabla^2 + \xi^2 - C\xi}{2\nabla - C}, \quad C = \frac{1 - \tilde{\nu}^{pa}}{m - \xi} (1 - 2m + \nabla)(1 - \nabla), \quad (3.41)$$

получим

$$y_1 = \psi h. \quad (4.42)$$

С учетом принятых обозначений и формул (3.26) и (3.42) получаем

$$M^{пл} = \sigma_T h^2 \xi (\psi - \xi / 2). \quad (4.43)$$

Изгибающий момент, который способен воспринять неповрежденный элемент, с учетом упругопластической работы материала, определяется выражением

$$M^H = \sigma_T h^2 \beta, \quad (4.44)$$

где

$$\beta = [1 + 2\xi(1 - \xi)] / 6. \quad (4.45)$$

Подставив выражения (4.30), (4.37), (4.43) и (4.44) в формулу (3.1) и с учетом (4.25) получим

$$\theta = [\tilde{\nu} \lambda + \lambda_1 (1 - \tilde{\nu}^{pa}) + \xi(\psi - \xi / 2)] / \beta. \quad (4.46)$$

Ниже приведем методику определения эффективности усиления эксплуатируемых статически неопределимых конструкций с учетом возникновения пластических деформаций. Определим показатели эффективности усиления поврежденных θ_n и неповрежденных θ_h изгибаемых элементов конструкции прямоугольного поперечного сечения. Исходными соотношениями для определения показателей θ_n и θ_h являются выражения (3.2).

Рассмотрим случай, когда ремонт произведен материалом, модуль упругости, которого равен модулю упругости основного материала конструкции ($E_1 = E_2$). В соответствии со случаем упругопластического деформирования сечения с зоной пластических деформаций величиной a (см. рис. 8) входящие в формулы (3.2) изгибающие моменты M_n^y и M_h^y , по аналогии с выражением (3.25), можно представить в виде:

$$M_n^y = M_n'^p + \Delta M_n' + M_n^{пл}; \quad M_h^y = M_h'^p + \Delta M_h' + M_h^{пл} \quad (4.47)$$

В формулах (3.47) $M_n'^p$ и $M_h'^p$ – моменты, действующие в зоне упругих деформаций поврежденных и неповрежденных элементов в период ремонта; $\Delta M_n'$ и $\Delta M_h'$ – добавочные изгибающие моменты, которые могут воспринимать поврежденные и неповрежденные элементы конструкции в зоне упругих деформаций от воздействия дополнительной нагрузки, прикладываемой после усиления; $M_n^{пл}$ и $M_h^{пл}$ – изгибающие моменты, воспринимаемые зонами пластических деформаций элементов усиленной стержневой системы.

Изгибающие моменты $M_n'^p$ и $M_h'^p$, воспринимаемые элементами стержневой системы в период ремонта, согласно (4.30), получаются

$$M_n'^p = \sigma_T h_n^y \tilde{\nu}_n \lambda_n; \quad M_h'^p = \sigma_T h_h^y \tilde{\nu}_h \lambda_h, \quad (4.48)$$

где $\tilde{\nu}_n = \sigma_n^p / R$, $\tilde{\nu}_h = \sigma_h^p / R$, σ_n^p и σ_h^p – ремонтные напряжения в расчетном сечении соответственно поврежденного и неповрежденного элементов, R – расчетное сопротивление материала элемента; σ_m – предел текучести материала; h_n^y и h_h^y – соответственно высота сечения поврежденного и неповрежденного элементов конструкции после усиления.

Коэффициенты λ_n и λ_h в формулах (4.48) определяются в соответствии с обозначениями (4.29):

$$\lambda_n = \frac{2}{3n\nabla_n^p} \left[\left(\nabla_n^p / 2 - \xi_n \right)^3 + \left(\nabla_n^p / 2 \right)^3 \right]; \quad \lambda_h = \frac{2}{3n\nabla_h^p} \left[\left(\nabla_h^p / 2 - \xi_h \right)^3 + \left(\nabla_h^p / 2 \right)^3 \right]. \quad (4.49)$$

В выражениях (3.49) приняты следующие обозначения:

$$n = \sigma_T / R; \quad \xi_n = \frac{a_n}{h_n^y}; \quad \xi_h = \frac{a_h}{h_h^y}; \quad \nabla_n^p = h_n^p / h_n^y; \quad \nabla_h^p = h_h^p / h_h^y, \quad (4.50)$$

где a_n и a_h – соответственно высоты зон пластических деформаций в поврежденном и неповрежденном элементах конструкции после усиления; h_n^p – высота поперечного сечения поврежденного элемента до усиления; h_h^p – то же, неповрежденного элемента.

Выражения для добавочных изгибающих моментов, воспринимаемых сечениями поврежденных и неповрежденных стержней статически неопределимой конструкции в зоне упругих деформаций после выполненного усиления, по аналогии с формулой (4.37), записываются в виде:

$$\Delta M'_\Pi = \sigma_T h_\Pi^2 \lambda'_\Pi (1 - \tilde{v}_\Pi^{pa}); \quad \Delta M'_H = \sigma_T h_H^2 \lambda'_H (1 - \tilde{v}_H^{pa}). \quad (4.51)$$

Входящие в формулы (4.51) коэффициенты $\tilde{v}_\Pi^{pa}$, $\tilde{v}_H^{pa}$, λ'_Π и λ'_H определяются в соответствии с выражениями (4.34) и (4.38) следующим образом:

$$\lambda'_\Pi = \frac{(m_\Pi - \xi_\Pi)^3 + (1 - m_\Pi)^3}{3(m_\Pi - \xi_\Pi)}; \quad \tilde{v}_\Pi^{pa} = \frac{\tilde{v}_\Pi}{n} \cdot \frac{\nabla_\Pi^\Pi / 2 - \xi_\Pi}{\nabla_\Pi^\Pi / 2}$$

$$\lambda'_H = \frac{(m_H - \xi_H)^3 + (1 - m_H)^3}{3(m_H - \xi_H)}; \quad \tilde{v}_H^{pa} = \frac{\tilde{v}_H}{n} \cdot \frac{\nabla_H / 2 - \xi_H}{\nabla_H / 2}$$

Здесь

$$m_\Pi = \frac{B_\Pi \xi_\Pi + (1 - \xi_\Pi^2)}{B_\Pi - 2(\xi_\Pi - 1)}; \quad B_\Pi = \frac{\xi_\Pi + 0.5 \tilde{v}_\Pi^{pa} (\nabla_\Pi^\Pi / 2 - \xi_\Pi) - \tilde{v}_\Pi \nabla_\Pi^\Pi / 4 n}{0.5(1 - \tilde{v}_\Pi^{pa})};$$

$$m_H = \frac{B_H \xi_H + (1 - \xi_H^2)}{B_H - 2(\xi_H - 1)}; \quad B_H = \frac{\xi_H + 0.5 \tilde{v}_H^{pa} (\nabla_H / 2 - \xi_H) - \tilde{v}_H \nabla_H / 4 n}{0.5(1 - \tilde{v}_H^{pa})};$$

Изгибающие моменты, воспринимаемые зонами пластических деформаций элементов усиленной стержневой системы, получаем по аналогии с формулой (4.43)

$$M_\Pi^{\Pi\Pi} = \sigma_T h_\Pi^2 \xi_\Pi (\psi_\Pi - \xi_\Pi / 2), \quad M_H^{\Pi\Pi} = \sigma_T h_H^2 \xi_H (\psi_H - \xi_H / 2). \quad (4.52)$$

В формулах (4.52) приняты следующие обозначения:

$$\psi_\Pi = \frac{\nabla_\Pi^2 + \xi_\Pi^2 - C_\Pi \xi_\Pi}{2\nabla_\Pi^\Pi - C_\Pi}, \quad C_\Pi = \frac{1 - \tilde{v}_\Pi^{pa}}{m_\Pi - \xi_\Pi} (1 - 2m_\Pi + \nabla_\Pi^\Pi) (1 - \nabla_\Pi^\Pi),$$

$$\psi_H = \frac{\nabla_H^2 + \xi_H^2 - C_H \xi_H}{2\nabla_H - C_H}, \quad C_H = \frac{1 - \tilde{v}_H^{pa}}{m_H - \xi_H} (1 - 2m_H + \nabla_H) (1 - \nabla_H).$$

В соответствии с формулой (3.44) в случае статически неопределимых конструкций выражения M_Π^H и M_H^H определяется выражениями

$$M_\Pi^H = \sigma_T h_\Pi^2 \beta_\Pi; \quad M_H^H = \sigma_T h_H^2 \beta_H, \quad (4.53)$$

где

$$\beta_\Pi = [1 + 2\xi_\Pi (1 - \xi_\Pi)] / 6; \quad \beta_H = [1 + 2\xi_H (1 - \xi_H)] / 6.$$

Величины $\delta M'_\Pi$ и $\delta M'_H$ в выражениях (3.2) получены в виде

$$\delta M'_\Pi = \eta'_\Pi \sigma_T W_\Pi^y \lambda'_\Pi (1 - \tilde{v}_\Pi^{pa}); \quad \delta M'_H = \eta'_H \sigma_T W_H^y \lambda'_H (1 - \tilde{v}_H^{pa}). \quad (4.54)$$

В формулах (4.54) коэффициенты η'_Π и η'_H определяются по соотношениям, приведенным в [62].

После подстановки формул (4.47), (4.48), (4.51), (4.52), (4.53), (4.5) и (4.54) в соотношения (4.2), и после преобразований получаем

$$\theta_\Pi = \frac{\tilde{v}_\Pi \lambda_\Pi + \lambda'_\Pi (1 - \tilde{v}_\Pi^{pa}) + \xi_\Pi (\psi_\Pi - \xi_\Pi / 2)}{\nabla_\Pi^2 \beta_\Pi - \eta_\Pi \tilde{v}_\Pi \nabla_\Pi^2 / 6n + \eta'_\Pi \lambda'_\Pi (1 - \tilde{v}_\Pi^{pa})}, \quad \theta_H = \frac{\tilde{v}_H \lambda_H + \lambda'_H (1 - \tilde{v}_H^{pa}) + \xi_H (\psi_H - \xi_H / 2)}{\nabla_H^2 \beta_H + \eta_H \tilde{v}_H \nabla_H^2 / 6n + \eta'_H \lambda'_H (1 - \tilde{v}_H^{pa})}. \quad (4.55)$$

В качестве примера представлены данные расчетов для случая восстановления поврежденной балки прямоугольного сечения до первоначальных размеров при разных уровнях ремонтных напряжений.

Относительная высота поврежденного сечения балки составляет $\nabla = 0.75$. На рис. 9 представлен график (линия 1) зависимости показателя степени восстановления первоначальной

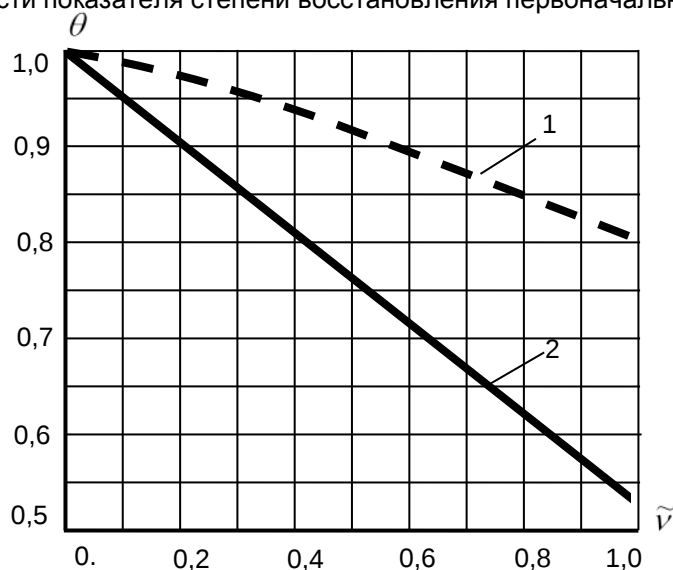


Рис. 9. График зависимости $\theta = f(\tilde{\nu})$:

1 - при упругих деформациях; 2 - с учетом упругопластических деформаций

несущей способности конструкции θ от уровня действующих ремонтных напряжений $\tilde{\nu}$ при $\xi = 0.1$. Для сравнения на рис. 9 (линия 2) также приведен график зависимости $\theta = f(\tilde{\nu})$ в случае, когда деформации являются упругими [51]. Как видно из графиков, с увеличением уровня ремонтных напряжений показатель θ уменьшается. Эффективность усиления значительно повышается при допущении возникновения в материале пластических деформаций. В этом случае в диапазоне относительного уровня ремонтных напряжений $\tilde{\nu} = 0.2 \div 0.8$ показатель θ на 8 % - 30 % больше чем при возникновении только упругих деформаций.

5. Моделирование деформированного состояния стержневых конструкций

5.1. Модель напряженно-деформированного состояния стержня

В настоящее время для определения напряженно-деформированного состояния криволинейных стержней используются либо теория криволинейных стержней [86, 97], либо методы, основанные на аппроксимации оси стержня ломаной линией, составленной из прямолинейных участков [91].

Развитию исследований в области расчета прямолинейных и криволинейных стержней посвящены работы Серазутдинова М. Н. и Хайруллина Ф. С. [98, 99].

В качестве расчетной модели рассматривается стержни, имеющие в общем случае пространственную криволинейную ось. Предполагается, что материал стержней изотропный и линейно упругий, перемещения малы. Используется теорию, описывающую напряженно-деформированное состояние стержней, основанную на модели Тимошенко [84]. Полагается, что возникающие при деформировании стержня перемещения и деформации являются малыми.

Для описания напряженно-деформированного состояния стержней применяются основные гипотезы модели теории Тимошенко:

1. При изгибе продольные волокна балки не взаимодействуют друг с другом в перпендикулярных к ним направлениях.
2. Поперечные сечения балки при изгибе, плоские до деформации, после деформации остаются плоскими.

3. Напряжения, связанные с изгибом в плоскости, проходящей через главную ось поперечного сечения стержня, постоянны по ширине сечения.

Для вычисления напряжений и деформаций применяются соотношения, которые обычно применяются при расчете прямолинейных стержней.

В соответствии с принятыми гипотезами, для описания деформирования вводятся векторы перемещения и углов поворота поперечного сечения стержня:

$$\bar{u} = u_1(x)\bar{i} + u_2(x)\bar{j} + u_3(x)\bar{k}; \quad \bar{\varphi} = \varphi_1(x)\bar{i} + \varphi_2(x)\bar{j} + \varphi_3(x)\bar{k}. \quad (5.1)$$

Здесь $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты локальной декартовой системы координат, с осью Ox , перпендикулярной к плоскости поперечного сечения (рис. 10); $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ – перемещения и углы поворота поперечных сечений стержня относительно осей Ox, Oy, Oz , y, z – главные центральные оси инерции поперечного сечения стержня.

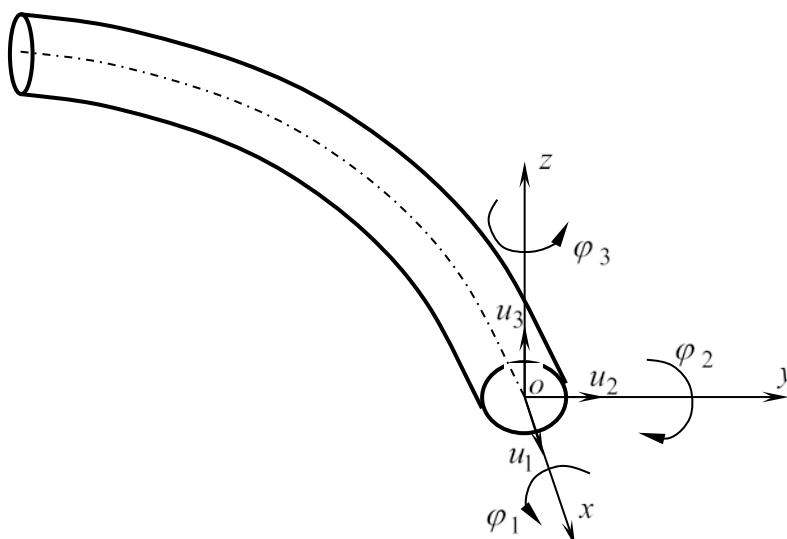


Рис. 10. Криволинейный стержень

Отметим, что оси Oy и Oz могут и не быть главными центральными осями сечения.

С учетом (5.1) и принятых гипотез, перемещения точек в поперечном сечении стержня определяются по формулам:

$$u(x, y, z) = u_1(x) + z\varphi_2(x) - y\varphi_3(x); \quad v(x, z) = u_2(x) - z\varphi_1(x); \quad w(x, y) = u_3(x) + y\varphi_1(x). \quad (5.2)$$

Для вычисления деформаций используем формулы теории упругости:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5.3)$$

Подставляя выражения (5.2) в (5.3), получим

$$\varepsilon_x = \frac{du_1}{dx} - y\frac{d\varphi_3}{dx} + z\frac{d\varphi_2}{dx}; \quad \gamma_{xy} = \frac{du_2}{dx} - \varphi_3 - z\frac{d\varphi_1}{dx}; \quad \gamma_{xz} = \frac{du_3}{dx} + \varphi_2 + y\frac{d\varphi_1}{dx} \quad (5.4)$$

$$\gamma_{yz} = 0.$$

Выражения для деформаций (5.4) определены по формулам теории упругости с использованием упрощающих гипотез, принятых в модели стержней Тимошенко.

При возникновении только упругих деформаций нормальные и касательные напряжения в поперечных сечениях стержня связаны с деформациями законом Гука:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x; \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}. \quad (5.5)$$

Возникающие в поперечных сечениях стержней продольные силы N , поперечные силы Q_y, Q_z , изгибающие моменты M_y, M_z , крутящий момент T , при упругих деформациях вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} N &= \iint_A \sigma_x dA, \quad Q_y = \iint_A \tau_{xy} dA, \quad Q_z = \iint_A \tau_{xz} dA, \\ M_y &= \iint_A \sigma_x z dA, \quad M_z = \iint_A \sigma_x y dA, \quad T = \iint_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где A - площадь поперечного сечения стержня.

5.2. Модель напряженно-деформированного состояния стержня прямоугольного поперечного сечения

Как известно, в ряде случаев при кручении стержней возникает деформация поперечных сечений. В таких случаях использование соотношений (5.2), (5.3) приводит к неправильным результатам.

Представим уточненные соотношения для перемещений, деформаций и напряжений в случае, когда сечение стержня (рис. 11,а) имеет форму прямоугольника (рис. 11,б). Для учета этого фактор используем следующее.

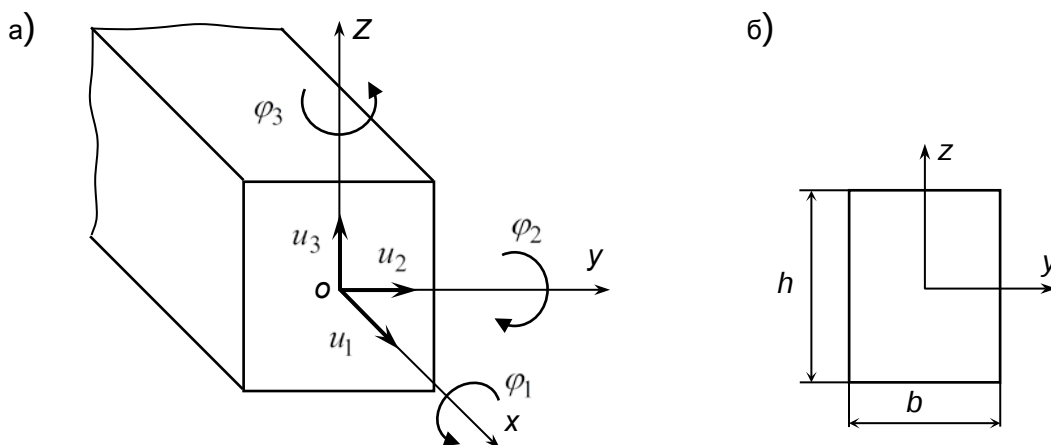


Рис. 11. К определению напряженно-деформированного состояния стержня прямоугольного поперечного сечения

Введем в выражение для продольного перемещения стержня $u(x, y, z)$ дополнительное слагаемое $u_d(x, y, z)$, учитывающее деформацию сечения. В этом случае формулы (5.2) записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_1(x) + z\varphi_2(x) - y\varphi_3(x) + u_d(x, y, z); \\ v(x, z) &= u_2(x) - z\varphi_1(x); \quad w(x, y) = u_3(x) + y\varphi_1(x). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Подставляя (5.7) в (5.3), получим выражения

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du_1}{dx} - y \frac{d\varphi_3}{dx} + z \frac{d\varphi_2}{dx} + \frac{\partial u_d}{\partial x}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{du_2}{dx} - \varphi_3 - z \frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{\partial u_d}{\partial y}; \quad \gamma_{xz} = \frac{du_3}{dx} + \varphi_2 + y \frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{\partial u_d}{\partial z}; \\ \gamma_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Полагаем, что деформация сечения описывается функцией, которая является решением задачи кручения стержня прямоугольного поперечного сечения с использованием соотношений теории упругости. Как известно [100, 101], в соответствии с этим решением

$$u_d(x, y, z) = \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \varphi_d(y, z), \quad (5.9)$$

где

$$\varphi_d(y, z) = yz - \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_k^{1,3,5,\dots} \left[\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^3} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{k\pi z}{b}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{k\pi h}{2b}\right)} \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \right]. \quad (5.10)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_d}{\partial x} &= \frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} \varphi_d(y, z); & \frac{\partial u_d}{\partial y} &= \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \frac{\partial \varphi_d(y, z)}{\partial y}; \\ \frac{\partial u_d}{\partial z} &= \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \frac{\partial \varphi_d(y, z)}{\partial z}; \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_d}{\partial y} &= z - \frac{8b}{\pi^2} \sum_k^{1,3,5,\dots} \left[\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{k\pi z}{b}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{k\pi h}{2b}\right)} \cos\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \right]; \\ \frac{\partial \varphi_d}{\partial z} &= y - \frac{8b}{\pi^2} \sum_k^{1,3,5,\dots} \left[\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^2} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{k\pi z}{b}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{k\pi h}{2b}\right)} \sin\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя соотношения (5.3) в выражения (5.0), получим формулы для вычисления деформаций стержня прямоугольного поперечного сечения с учетом деформации сечения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du_1}{dx} - y \frac{d\varphi_3}{dx} + z \frac{d\varphi_2}{dx} + \varphi_d(y, z) \frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{du_2}{dx} - \varphi_3 - \left(z - \frac{\partial \varphi_d}{\partial y} \right) \frac{d\varphi_1}{dx}; & \gamma_{xz} &= \frac{du_3}{dx} + \varphi_2 + \left(y + \frac{\partial \varphi_d}{\partial z} \right) \frac{d\varphi_1}{dx}; \\ \gamma_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Напряжения и внутренние усилия в поперечных сечениях определяются выражениями (5.5) и (5.6).

5.3. Вариационный метод расчета стержневых систем

Для определения напряженно-деформированного состояния стержневой системы используется вариационный принцип Лагранжа и его реализация, описанная в работах [98, 99, 102 – 106]. Достоинство метода заключается в том, что он не требует разбиения стержня на большое количество элементов, позволяет рассчитывать сложные стержневые системы, элементами которых могут быть и естественно закрученные стержни.

Перемещения стержневой системы находятся из условия:

$$\delta U - \delta W = 0, \quad (5.13)$$

где δU – вариация потенциальной энергии деформации стержневой системы; δW – вариация работы внешних сил.

При решении задачи, вводится глобальная ортогональная система координат $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, вектор перемещений точек стержня $\tilde{V} = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3\}^T$, где $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$ – перемещения вдоль осей координат; $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3$ – соответственно, углы поворота поперечных сечений вокруг осей $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$. Компоненты вектора $\tilde{u}$ определены в системе координат $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$.

В условие (4.13) входят перемещения, углы поворота поперечных сечений и деформации стержня. Для записи этого условия, в каждой точке, где это необходимо, перемещения u_1, u_2, u_3 , углы поворота $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и деформации вычисляются в локальной ортогональной системе координат $Oxyz$, с осью Ox , направленной по касательной к продольной оси стержня [98, 99].

Для определения напряженно-деформированного состояния стержневой системы полагается

$$\delta U = \int_{l_c} \iint_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dl \quad (4.14)$$

$$\delta W = \int_{l_q} (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2 + q_3 \delta u_3) dl + \sum_n (F_{1n} \delta u_1(x_n) + F_{2n} \delta u_2(x_i) + F_{3n} \delta u_3(x_n)) + (4.15)$$

$$+ \sum_k (M_{1k} \varphi_{1k}(x_k) + M_{2k} \varphi_{2k}(x_k) + M_{3k} \varphi_{3k}(x_k)),$$

где l_c, A – длина и площадь поперечных сечений стержневой системы; $q_1, q_2, q_3, F_{1n}, F_{2n}, F_{3n}, M_{1k}, M_{2k}, M_{3k}$ – распределенные нагрузки, сосредоточенные силы и моменты.

В выражении (4.14) деформации $\varepsilon_x, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}$ определяются соотношениями (4.4) или (4.12).

При решении задачи стержневая система разбивается на N участков, на каждом из которых компоненты вектора перемещений $\tilde{u}$ представляются в виде ряда:

$$\tilde{V}_k = \tilde{V}_k^i = \sum_{m=1}^M C_{km}^i f_m(t). \quad (5.16)$$

Здесь $f_1(t) = 1-t, f_2(t) = t, f_m(t) = (1-t)t^{m-2}, m = \overline{3, M}; C_{km}^i$ – неизвестные постоянные; $t = x/l_i$ ($0 \leq t \leq 1$); x – длина продольной оси стержня, отсчитываемая, от начала участка до рассматриваемой точки; l_i – длина участка стержня; $k = 1, 2, \dots, 6; i = \overline{1, N}$.

Перемещения и углы поворота в локальной и глобальной системах координат связаны соотношениями

$$V_j = \sum_{k=1}^3 n_{jk} \tilde{V}_k, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5.17)$$

где n_{jk} – направляющие косинусы локальной системы координат.

Входящие в формулы (4.16) функции $f_m(t)$ таковы, что при $t = 0$ $f_1(0) = 1, f_m(0) = 0$ ($m = 2, 3, \dots, M$), а при $t = 1$ $f_2(1) = 1, f_1(1) = 0, f_m(1) = 0$, ($m = 2, 3, \dots, M$).

Следовательно, если в (5.16) положить $t = 0$, то $\tilde{u}_k^i(0) = C_{k1}^i$. При $t = 1$ $\tilde{u}_k^i(1) = C_{k2}^i$.

Получается, что коэффициенты C_{k1}^i, C_{k2}^i имеют геометрический смысл – это перемещения и углы поворота сечений стержня в начале ($t = 0$) и в конце ($t = 1$) участка с номером i стержневой системы. Остальные коэффициенты C_{km}^i , входящие в (5.16) геометрического смысла не имеют. Функции $f_m(t) = (1-t)t^{m-2}, m = \overline{3, M}$ составляют полный полином степени $(M-1)$.

Задавая в рядах (5.16) число M , можно использовать аппроксимацию различной степени, что позволяет получать решение с высокой точностью, не разделяя стержневую систему на большое количество участков.

Как известно, при использовании принципа Лагранжа (5.13), перемещения и углы поворота стержней при переходе от участка к участку должны быть непрерывны, а также нужно, чтобы $\tilde{u}$ удовлетворял геометрическим граничным условиям (условиям для перемещений $\tilde{u}$ и углов поворота $\tilde{\varphi}$, которые должны выполняться в местах закрепления стержней).

Представление компонентов векторов $\tilde{u}$ и $\tilde{\varphi}$ в виде (5.16) позволяет легко проводить стыковку перемещений и углов поворота стержней на границах выделенных участков и удовлетворять геометрическим граничным условиям.

Таким образом, представление компонентов векторов $\tilde{u}$ и $\tilde{\varphi}$ в виде (5.16) обладает следующими достоинствами:

1. Можно легко проводить стыковку перемещений и углов поворота стержней на концах выделенных участков стержневой системы и удовлетворять геометрическим граничным условиям
2. Для получения решения с высокой точностью, можно не разбивать стержневую систему на малые участки, а взять в рядах (4.16) достаточное число членов (выбрать нужное M).

Отметим, что указанные особенности, в частности, определяют универсальность используемого метода расчета.

С учетом представления перемещений и углов поворота в виде (5.8), в дальнейшем будем записывать вариацию работы внешних сил δW в глобальной системе координат:

$$\delta W = \int_{l_q} (\tilde{q}_1 \delta \tilde{u}_1 + \tilde{q}_2 \delta \tilde{u}_2 + \tilde{q}_3 \delta \tilde{u}_3) dl + \sum_{i=1}^I [\tilde{F}_{1i} \delta \tilde{u}_1(x_i) + \tilde{F}_{2i} \delta \tilde{u}_2(x_i) + \tilde{F}_{3i} \delta \tilde{u}_3(x_i)] + \sum_{j=1}^J [\tilde{M}_{1j} \delta \varphi_1(x_j) + \tilde{M}_{2j} \delta \varphi_2(x_j) + \tilde{M}_{3j} \delta \varphi_3(x_j)]. \quad (5.18)$$

Здесь $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{F}_{1i}, \tilde{F}_{2i}, \tilde{F}_{3i}, \tilde{M}_{1j}, \tilde{M}_{2j}, \tilde{M}_{3j}$ – проекции на оси $\tilde{Ox}, \tilde{Oy}, \tilde{Oz}$ глобальной системы координат распределенной нагрузки, сосредоточенных сил и моментов.

Для определения коэффициентов в рядах (5.16) выполняется следующее. Удовлетворяются кинематические граничные условия, а также условия стыковки $\tilde{u}$ и $\tilde{\varphi}$ на границах участков стержневой системы. Из этих условий находятся значения некоторых из коэффициентов в ряде (5.16). Затем, после подстановки в условие (5.13) соотношение (5.14) с учетом выражений для перемещений и углов поворота (5.16) - (5.17), вариации работы внешних сил (5.18), получим систему алгебраических уравнений

$$[K] \{C\} = \{F\}, \quad (5.19)$$

где $[K]$ - матрица жесткости стержневой конструкции; $\{C\}$ - вектор неизвестных коэффициентов C_{km}^i , где $C_{km}^i = \{C_{k1}^i, C_{k2}^i, C_{k3}^i, C_{k4}^i, C_{k5}^i, C_{k6}^i\}^T$; $\{F\}$ - вектор, зависящий от внешних нагрузок.

Решая систему уравнений (5.19) находим неизвестные коэффициенты C_{km}^i . Затем, по формулам (5.16), (5.17) определяются перемещения и с использованием соотношений (5.4), (5.5) - (5.6) вычисляются деформации, напряжения, усилия N, Q_y, Q_z и моменты M_y, M_z, T .

5.4. Соотношения для расчета напряженно-деформированного состояния тонкостенного стержня открытого профиля

В настоящее время в практике проектирования стержневых конструкций широко используется техническая теория тонкостенных стержней открытого профиля, разработанное Власовым В. З. [107].

Вариационные принципы расчета прямолинейных тонкостенных стержней открытого и закрытого профиля излагается в книге Сливкера В. И. [108].

Вопросы оценки несущей способности пространственных стержневых конструкций с учетом стесненного кручения исследуются многими отечественными и зарубежными учеными. Вопросам напряженно-деформированного состояния и устойчивости тонкостенных перфорированных конструкций посвящены исследования современных ученых [109 – 117] .

Необходимо отметить, что в настоящее время вопросы определения напряженно деформированного состояния усиливаемых под нагрузкой тонкостенных стержневых конструкций являются недостаточно изученными.

При определении напряженно-деформированного состояния стержней при изгибе и растяжении (сжатии) применяются основные гипотезы теории Тимошенко и гипотезы, принятые в теории тонкостенных стержней с учетом сдвигов [108].

Для описания деформирования стержня в его поперечных сечениях введем локальную декартовую систему координат Ox_1z_1 , с осью Ox_1 , перпендикулярной к плоскости поперечного сечения (рис. 12).

Деформации и напряжения вычисляются в фиксированной точке M в системе координат My_1z_1 (рис. 12) с использованием следующих соотношений:

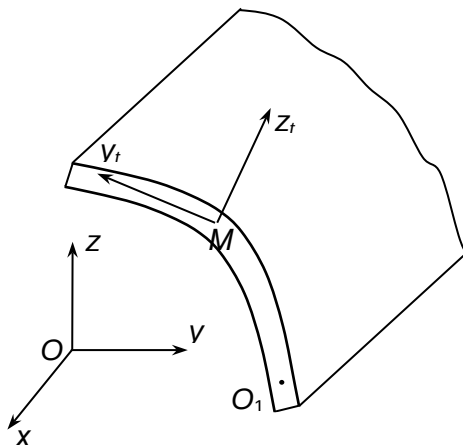


Рис. 12. Глобальные и локальные системы координат тонкостенного стержня

$$\varepsilon_x = \frac{du_1(x)}{dx} + z \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - y \frac{d\varphi_3(x)}{dx} - \frac{d\beta(x)}{dx} \omega(s),$$

$$\gamma = \frac{du_2(x)}{dx} t_y + \frac{du_3(x)}{dx} t_z + \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \rho(y_m, z_m) + \varphi_2(x) t_z - \varphi_3(x) t_y - \beta(x) \rho(y_m, z_m), \quad (5.20)$$

$$\gamma_{xy_t}^k = \frac{d\varphi_1(x)}{dx} z_t.$$

где t_y, t_z - направляющие косинусы осей My_1, Mz_1 ; γ - постоянное по толщине стенки усредненный сдвиг; $\gamma_{xy_t}^k$ - сдвиг при чистом кручении, распределенное по толщине стенки по линейному закону; $\rho(y_m, z_m)$ - длина перпендикуляра, проведенного из начала координат $Oxyz$ к касательной к линии O_1M в точке M ; $\beta(x)$ - функция меры деформации; $\omega(y, z)$ - секториальная площадь профиля.

Если деформации являются упругими, то справедлив закон Гука: $\sigma_x = E \varepsilon_x, \tau_{xy_t} = G \gamma_{xy_t}$,

где

$$\gamma_{xy_t} = \gamma + \gamma_{xy_t}^k.$$

Таким образом, с учетом соотношений (5.23), в тонкостенном стержне возникают напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E \left(\frac{du_1(x)}{dx} + z \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - y \frac{d\varphi_3(x)}{dx} - \frac{d\beta(x)}{dx} \omega(s) \right), \\ \tau_{xy_t} &= G \left(\frac{du_2(x)}{dx} t_y + \frac{du_3(x)}{dx} t_z + \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \rho(y_m, z_m) + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_2(x) t_z - \varphi_3(x) t_y - \beta(x) \rho(y_m, z_m) \right) + \frac{d\varphi_1(x)}{dx} z_t.\end{aligned}\quad (5.21)$$

Напряженно-деформированное состояние тонкостенной стержневой системы определяется вариационным методом. Для определения перемещений в элементах используется уравнение (5.13).

В рассматриваемом случае компоненты перемещений точек стержня в глобальной системе координат выражается в виде вектора

$$\tilde{V} = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3, -\tilde{\beta}\}^T.$$

Вариации потенциальной энергии деформации δU тонкостенной стержневой системы

$$\delta U = \int_{l_C} \iint_A \left[E \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + G \gamma_{xy_t}^* \delta \gamma_{xy_t} \right] dA dl. \quad (5.22)$$

Здесь в соответствии с [117]

$$\gamma_{xy_t}^* = \gamma + k^* \gamma_{xy_t}^k, \quad k^* = 2.$$

Вариация работы распределенных и сосредоточенных внешних сил:

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_{l_C} \left[q_1(x) \delta u_1(x) + q_2(x) \delta u_2(x) + q_3(x) \delta u_3(x) + \right. \\ &\quad \left. + m_1(x) \delta \varphi_1(x) + m_2(x) \delta \varphi_2(x) + m_3(x) \delta \varphi_3(x) - m_B(x) \delta \beta(x) \right] dl + \\ &\quad + \sum_{k=1}^K [F_{1k} \delta u_1(x_k) + F_{2k} \delta u_2(x_k) + F_{3k} \delta u_3(x_k)] + \\ &\quad + \sum_{j=1}^J [M_{1j} \delta \varphi_1(x_j) + M_{2j} \delta \varphi_2(x_j) + M_{3j} \delta \varphi_3(x_j) + M_{Bj} \delta \beta(x_j)],\end{aligned}\quad (5.23)$$

где $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$, $m_1(x)$, $m_2(x)$, $m_3(x)$ – распределенные по длине стержня силы и моменты, $m_B(x)$ – бимоментная распределенная нагрузка; F_{1k} , F_{2k} , F_{3k} – сосредоточенные силы, приложенные в точках продольной оси стержня с координатой x_k ; M_{1j} , M_{2j} , M_{3j} , M_{Bj} – моменты, действующие в точках с координатой x_j .

В выражении (5.16) вектор неизвестных постоянных имеет следующий вид:

$$C_{km}^i = \{C_{k1}^i, C_{k2}^i, C_{k3}^i, C_{k4}^i, C_{k5}^i, C_{k6}^i, C_{k7}^i\}^T$$

Функция $f_m(t)$ в формуле (5.8) при числе ряда $M = 1, 2, 3, 4, \dots, m$ определяется выражениями

$$f_1(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3, \quad f_2(t) = 3t^2 - 2t^3, \quad f_3(t) = t(1 - t^2), \quad f_4(t) = (t^3 - t^2), \quad f_m(t) = (1 - t)^2 t^{(m-3)}, \quad \text{где } m = \overline{5, M}.$$

Подставляя выражения (5.22) и (5.23) в вариационное уравнение (5.13) определяем неизвестные перемещения точек стержневой системы. Далее вычисляются деформации и напряжения по соотношениям (5.20), (5.21).

6. Моделирование напряженно-деформированного состояния стержневых конструкций усиливаемых без вывода из напряженного состояния

6.1. Моделирование напряженно-деформированного состояния усиленной конструкции при упругих деформациях

Как показывает анализ научных публикаций, вопросы расчета несущей способности конструкций, усиливаемых в напряженном состоянии, в достаточной степени разработаны только для статически определимых стержней [51 – 56].

Методика определения эффективности усиления эксплуатируемых статически неопределимых конструкций рассмотрены в работах [60 – 66, 95 – 96].

Отмеченные публикации, в основном, посвящены вопросам определения несущей способности усиливаемых нагруженных конструкций, имеющих, как правило, простейшие формы поперечного сечения.

Вариационному методу расчета напряженно-деформированного состояния усиливаемых нагруженных конструкций посвящены работы [102 – 106, 118 – 126]. Представленный в этих работах метод расчета усиливаемой под нагрузкой стержневой системы, является более универсальным, по сравнению с методикой, изложенной в п. 3. Этот метод позволяет учитывать такие особенности, как изменение размеров поперечного сечения стержня и последующее дополнительное нагружение конструкции, наложение полей напряжений, обусловленных различными факторами, в том числе и технологическими.

Особенности численного расчета напряженно-деформированного состояния усиленной стержневой системы, рассмотрим на примере статически неопределимой рамы (рис. 13).

Полагаем, что стойка 1 системы имеет поверхностное повреждение по длине. Из-за нагрузок F_i^p , действующие в период усиления, в стержневой системе возникают некоторые начальные напряжения $\sigma_x^p, \tau_{xy}^p, \tau_{xz}^p$. В этом состоянии конструкцию усиливают за счет увеличения размеров сечения поврежденного элемента 1 (рис.13). После ремонта занимаемая элементом область увеличивается на величину II. В области I элементов конструкций действуют ремонтные напряжения $\sigma_x^p, \tau_{xy}^p, \tau_{xz}^p$, а в области II – напряжений нет.

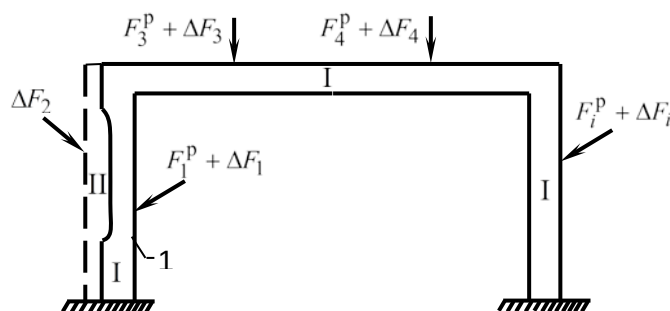


Рис. 13. Схема усиливаемой рамной конструкции: I – зона основного материала конструкции; II - усиваемая зона

После усиления к конструкции прикладываются дополнительные эксплуатационные нагрузки ΔF_i . При этом, во всех элементах системы (в областях I и II), возникают дополнительные напряжения $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$, которые в пределах области I, в соответствии с принципом суперпозиции (при упругих деформациях), складываются с ремонтными напряжениями $\sigma_x^p, \tau_{xy}^p, \tau_{xz}^p$. Следовательно, в области I будут действовать напряжения

$$\sigma_x^y = \sigma_x^p + \sigma_x, \quad \tau_{xy}^y = \tau_{xy}^p + \tau_{xy}, \quad \tau_{xz}^y = \tau_{xz}^p + \tau_{xz}, \quad (6.1)$$

а в области II – напряжения

$$\sigma_x^y = \sigma_x, \quad \tau_{xy}^y = \tau_{xy}, \quad \tau_{xz}^y = \tau_{xz}. \quad (6.2)$$

Расчет напряженно-деформированного состояния усиливаемой конструкции состоит из следующих этапов:

1. Определение напряженно-деформированного упругого состояния исходной (поврежденной) стержневой системы при действии ремонтных нагрузок.
2. Определение напряженно-деформированного состояния конструкции после усиления, с учетом ремонтных напряжений и изменения размеров усиленных стержней и действия дополнительных эксплуатационных нагрузок.

Принимались основные допущения и соотношения теории стержней с учетом сдвигов [84]. Полагаем, что напряжения σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} и деформации ε_x , γ_{xy} , γ_{xz} связаны законом Гука.

На первом этапе, при определении напряженно-деформированного состояния исходной (поврежденной) стержневой системы, перемещения в элементах конструкции от действия ремонтных нагрузок, находятся из условия (5.13).

Входящие в выражение (5.13) вариация потенциальной энергии деформации стержневой системы δU и вариация работы внешних сил δW , в период усиления имеют следующий вид:

$$\delta U = \int_{l_c} \iint_{A^n} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dl, \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \delta W = \int_{l_q} (\tilde{q}_1^p \delta \tilde{u}_1 + \tilde{q}_2^p \delta \tilde{u}_2 + \tilde{q}_3^p \delta \tilde{u}_3) dl + \sum_n (\tilde{F}_{1n}^p \delta \tilde{u}_1(x_n) + \tilde{F}_{2n}^p \delta \tilde{u}_2(x_i) + \tilde{F}_{3n}^p \delta \tilde{u}_3(x_n)) + \\ + \sum_k (\tilde{M}_{1k}^p \tilde{\varphi}_{1k}(x_k) + \tilde{M}_{2k}^p \tilde{\varphi}_{2k}(x_k) + \tilde{M}_{3k}^p \tilde{\varphi}_{3k}(x_k)), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где l_c , A^n – длина и площадь поперечных сечений стержней поврежденной конструкции в период ремонта; $\tilde{q}_1^p$, $\tilde{q}_2^p$, $\tilde{q}_3^p$, $\tilde{F}_{1n}^p$, $\tilde{F}_{2n}^p$, $\tilde{F}_{3n}^p$, $\tilde{M}_{1k}^p$, $\tilde{M}_{2k}^p$, $\tilde{M}_{3k}^p$ – распределенные нагрузки, сосредоточенные силы и моменты, действующие во время ремонта.

В выражении (6.1) деформации ε_x , γ_{xy} , γ_{xz} определяются соотношениями (5.4) или (5.12).

Перемещения $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$, углы поворота $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3$ и деформации вычисляются в локальной ортогональной системе координат $Oxyz$, с осью Ox , направленной по касательной к продольной оси стержня [98, 99].

На следующем этапе от воздействия дополнительных эксплуатационных нагрузок и с учетом наличия ремонтных σ_x^p , τ_{xy}^p , τ_{xz}^p напряжений определяется напряженно-деформированное состояние конструкции после усиления.

Выражение для δU , в этом случае записывается с учетом напряжений действующих в период усиления и имеют вид:

$$\delta U = \int_{l_c} \left[\iint_{A^y} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \iint_{A^n} (\sigma_x^p \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^p \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^p \delta \gamma_{xz}) dA \right] dl, \quad (6.5)$$

В выражении (6.5) A^y – площади поперечных сечений стержней после усиления.

Вариация работы внешних сил имеет следующий вид:

$$\delta W = \int_{l_q} (\tilde{q}_1^y \delta \tilde{u}_1 + \tilde{q}_2^y \delta \tilde{u}_2 + \tilde{q}_3^y \delta \tilde{u}_3) dl + \sum_i (\tilde{F}_{1i}^y \delta \tilde{u}_1(x_i) + \tilde{F}_{2i}^y \delta \tilde{u}_2(x_i) + \tilde{F}_{3i}^y \delta \tilde{u}_3(x_i)) + \\ + \sum_k (\tilde{M}_{1k}^y \tilde{\varphi}_{1k}(x_k) + \tilde{M}_{2k}^y \tilde{\varphi}_{2k}(x_k) + \tilde{M}_{3k}^y \tilde{\varphi}_{3k}(x_k)). \quad (6.6)$$

Проекции на оси координат интенсивности внешних распределенных нагрузок q_1^y, q_2^y, q_3^y , проекции сосредоточенных сил $F_{1i}^y, F_{2i}^y, F_{3i}^y$ и внешние сосредоточенные моменты $M_{1k}^y, M_{2k}^y, M_{3k}^y$, действующие на конструкцию после усиления

$$q_1^y = q_1^p + \Delta q_1, \quad q_2^y = q_2^p + \Delta q_2, \quad q_3^y = q_3^p + \Delta q_3; \\ F_{1i}^y = F_{1i}^p + \Delta F_{1i}, \quad F_{2i}^y = F_{2i}^p + \Delta F_{2i}, \quad F_{3i}^y = F_{3i}^p + \Delta F_{3i}; \\ M_{1k}^y = M_{1k}^p + \Delta M_{1k}, \quad M_{2k}^y = M_{2k}^p + \Delta M_{2k}, \quad M_{3k}^y = M_{3k}^p + \Delta M_{3k}, \quad (6.7)$$

где $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3, \Delta F_{1i}, \Delta F_{2i}, \Delta F_{3i}, \Delta M_{1k}, \Delta M_{2k}, \Delta M_{3k}$ – дополнительных нагрузки, связанные с эксплуатацией усиленной конструкции.

С использованием выражений (5.16) – (5.17) и методики, которая изложена в п.4.3, определяются перемещения стержней. Деформации $\varepsilon_x, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}$ и напряжения $\sigma_x^y, \tau_{xy}^y, \tau_{xz}^y$, возникающие в конструкции после усиления вычисляются по соотношениям, приведенным в п. 4.1 – 4.2.

После усиления, при воздействии суммарной эксплуатационной нагрузки, возникающие в поперечных сечениях стержневой системы продольные силы N^y , поперечные силы Q_y^y, Q_z^y , изгибающие моменты M_y^y, M_z^y и крутящий момент T^y вычисляются по формулам:

$$N^y = \iint_{A^y} \sigma_x^y dA, \quad Q_y^y = \iint_{A^y} \tau_{xy}^y dA, \quad Q_z^y = \iint_{A^y} \tau_{xz}^y dA, \quad M_y^y = \iint_{A^y} \sigma_x^y z dA, \quad M_z^y = \iint_{A^y} \sigma_x^y y dA \\ T^y = \iint_{A^y} (\tau_{xz}^y y - \tau_{xy}^y z) dA.$$

6.2. Модель напряженно-деформированного состояния усиленной конструкции с учетом пластических деформаций

Применительно к стальным конструкциям существует дальнейший резерв выявления эффективности усиления и ремонта, связанный с возможностью допущения в них определенных, ограниченных по величине, пластических деформаций [8, 24]. Надежность работы стальных конструкций при определенной степени развития в них пластических деформаций общеизвестна.

Допущение пластических деформаций позволяет, в конечном счете восстановить первоначальную несущую способность элемента в полной мере [24], но при этом значения деформаций будут, естественно, выше.

Упруго работающие элементы усиления сдерживают развитие пластических деформаций в основных элементах исходной системы, что вызывает перераспределение напряжений во всей системе и в усиленных элементах. В результате, пластические деформации могут возникнуть как в основных, так и в усиливающих элементах [24].

В обычных стержневых конструкциях пластические деформации появляются лишь в состояниях, весьма близких к предельным напряженным состояниям. Это связано с тем, что при проектировании сооружения вводится ряд коэффициентов запаса. Если уровень эксплуатационных нагрузок не превышает нормативный, то в элементах конструкций возникают только упругие деформации, что позволяет применения в большинстве случаев традиционных методов расчета и использование принципа независимости сил.

Для усиленных под нагрузкой конструкций, традиционные методы расчета в общем случае являются принципиально не применимыми [24]. Это связано с особенностями напряженно-деформированного состояния, которые возникают при проведении ремонтных работ и описаны в п. 1.

Из-за сложного характера распределения напряжений в сечениях элементов таких конструкций, повышенной деформативности, пластические деформации могут возникать в значительном диапазоне нагрузок (зачастую много меньшем нормативного их уровня) [24]. Расчет таких конструкций желательно выполнять с учетом физической нелинейности деформируемых стержневых систем. Необходимо учитывать изменение их напряженно-деформированного состояния с учетом накапливаемых на каждом этапе ремонтных работ напряжений, деформаций и перемещений элементов системы. Это относится как к статически определимым, так и к статически неопределимым системам, поскольку оценка их несущей способности невозможна без учета истории изменения их напряженного состояния.

При возникновении пластических деформаций, положение областей пластических деформаций, закон распределения напряжений по элементам и в поперечных сечениях стержней заранее неизвестны. Поэтому, в таких случаях, расчет напряженного состояния стержневых систем, усиливаемых при действии на них нагрузки, становятся еще более сложными.

Исходя из изложенного, актуальным является вопросы разработки математической модели, описывающей напряженно-деформированное состояние усиливаемых пространственных стержневых систем при возникновении упругопластических деформаций.

Особенности расчета несущей способности усиленной под нагрузкой конструкции, в случае нагружения изгибающим моментом M , было рассмотрено на примере усиления участка балки (см. п. 4.4, рис. 8,а).

В общем случае нагружения, когда возникающие в конструкции деформации являются только упругими, действующие в областях I и II напряжения в сечении усиленного элемента (рис. 13) определяются выражениями (6.1) и (6.2).

При появлении упругопластических деформаций, значения результирующих напряжений в областях I и II усиленного сечения нельзя получить арифметическим суммированием $\sigma_x^p, \tau_{xy}^p, \tau_{xz}^p$ и $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$. В этом случае произойдет перераспределение напряжений. Неизвестными величинами становятся размер зоны пластических деформаций и значения напряжения $\sigma_x^y, \tau_{xy}^y, \tau_{xz}^y$ в точках поперечных сечений стержней. В рассматриваемом случае принцип суперпозиции не применим. Размеры зоны пластических деформаций и значения напряжения $\sigma_x^y, \tau_{xy}^y, \tau_{xz}^y$ в точках поперечных сечений необходимо определять из решения задачи упругопластического деформирования.

Для решения задачи упругопластического деформирования стержневой системы используется вариационный метод, которая, как это уже было отмечено, является более универсальным по сравнению с методикой, описанной в п. 4. При этом учитываются такие особенности рассматриваемой задачи, как изменение размеров поперечного сечения стержней и последующее дополнительное нагружение конструкции, наложение напряжений $\sigma_x^p, \tau_{xy}^p, \tau_{xz}^p$ и $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$, сопровождающееся возникновением пластических деформаций.

В опубликованных работах [124 – 126] для описания напряженно – деформированного состояния стержневой системы используется теория идеально пластического тела. В качестве условия пластичности применяется условие Губера – Мизеса – Генки. В соответствии с этим условием в тех точках сечения, где возникают упругие деформации, зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций описывается уравнением $\sigma_i^y = E \varepsilon_i$, а в точках, где возникают пластические деформации, считается $\sigma_{im}^y = \sigma$. Интенсивность нормальных напряжений после усиления имеет вид:

$$\sigma_i^y = \sqrt{\sigma_x^{y2} + 3(\tau_{xy}^{y2} + \tau_{xz}^{y2})} \quad (6.8)$$

Для определения перемещений элементов стержневой системы после усиления вариационное уравнение записывается в следующем виде:

$$\delta U_{упр} + \delta U_{пл} - \delta W = 0. \quad (6.9)$$

где $\delta U_{упр}$ - вариация потенциальной энергии деформации стержневой системы в зоне упругих деформаций; $\delta U_{пл}$ - вариация потенциальной энергии в зоне пластических деформаций.

С учетом отмеченных особенностей решаемых задач, в последнем уравнении

$$\delta U_{упр} = \int_{l_{упр}} \left[\iint_{A^y} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \iint_{A^n} (\sigma_x^p \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^p \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^p \delta \gamma_{xz}) dA \right] dl, \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \delta U_{пл} = & \int_{l_{пл}} \left[\iint_{A_{пл}^y} (\sigma_x^* \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^* \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^* \delta \gamma_{xz}) dA + \right. \\ & \left. + \iint_{A_{упр}^y} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \iint_{A_{упр}^n} (\sigma_x^p \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^p \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^p \delta \gamma_{xz}) dA \right] dl, \end{aligned} \quad (6.11)$$

Здесь $\sigma^p, \tau_{xy}^p, \tau_{xz}^p$ - нормальные и касательные напряжения, действующие в период проведения ремонта (усиления); $\varepsilon_x, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}$ - линейные и угловые деформации; $l_{упр}, l_{пл}$ - длины участков стержневой системы, в которых возникают, соответственно, только упругие и упругопластические деформации; A^n и A^y - площади поперечных сечений стержней до и после усиления; $A_{упр}^n$ - площадь зоны упругих деформаций области основного материала конструкции (область I); $A_{упр}^y, A_{пл}^y$ - соответственно, площади зон упругих и пластических деформаций сечения после усиления; σ_T - предел текучести материала; $\sigma_x^*, \tau_{xy}^*, \tau_{xz}^*$ - напряжения, возникающие в зоне пластических деформаций и определяемые по критерию пластичности Губера - Мизеса - Генки.

Вариация работы внешних сил δW определяется выражением (6.6).

Отличительная особенность соотношений (6.10) - (6.11) состоит в том, что в них входят, возникающие в период усиления (ремонта), нормальные и касательные напряжения $\sigma_x^p, \tau_{xy}^p, \tau_{xz}^p$, действующие в поперечных сечениях стержней с площадью $A^n = A_{упр}^n + A_{пл}^n$ (область I), являющихся только частью площади поперечных сечений $A^y = A_{упр}^y + A_{пл}^y$, увеличенных при усилении системы.

Для вычисления интегралов, которые содержатся в уравнениях (6.10) - (6.11), используется численное интегрирование с использованием формулы Гаусса. Интегрирование проводится по длине стержней и по площади их поперечных сечений, согласно методике, описанное в [114].

Перемещения стержней определяется выражениями (6.10) - (6.11) и методики, которая изложена в п.4.3. Далее по соотношениям (5.4) или (5.12) подсчитываются деформации $\varepsilon_x, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}$, затем по соотношениям (4.5) вычисляются напряжения $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$, возникающие в конструкции после усиления.

Так как положение областей пластических деформаций в стержнях заранее неизвестно, для нахождения этих областей используется итерационный метод. На первой итерации деформации считаются упругими ($A_{пл}^y = 0$), а на последующих итерациях, в каждой точке интегрирования (y_j, z_j) проверяется выполнение условия $\sigma_{im}^y < \sigma$.

Если это условие выполняется, то $A_{пл} = 0$, если не выполняется, то нужно находить $A_{пл}$. Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия

$$\left(\left| M^{y(n)} - M^{y(n+1)} \right| / M^{y(n+1)} \right) \cdot 100\% \leq \varepsilon,$$

где ε - заданная величина погрешности, $M^{y(n)}$ и $M^{y(n+1)}$ - наибольшие изгибающие моменты в сечениях элементов стержневой системы после усиления на шаге (n) и ($n+1$).

Внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях усиленной стержневой системы, при упругопластических деформациях вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 N^y &= \iint_{A_{уп}^y} \sigma_x^y dA + \int_{A_{пл}^y} \sigma_x^* dA, & Q_y^y &= \iint_{A_{уп}^y} \tau_{xy}^y dA + \int_{A_{пл}^y} \tau_{xy}^* dA, & Q_z^y &= \iint_{A_{уп}^y} \tau_{xz}^y dA + \int_{A_{пл}^y} \tau_{xz}^* dA, \\
 M_y^y &= \iint_{A_{уп}^y} \sigma_x^y z dA + \int_{A_{пл}^y} \sigma_x^* z dA, & M_z^y &= \iint_{A_{уп}^y} \sigma_x^y y dA + \int_{A_{пл}^y} \sigma_x^* y dA, \\
 T^y &= \iint_{A_{уп}^y} (\tau_{xz}^y y - \tau_{xy}^y z) dA + \int_{A_{пл}^y} (\tau_{xz}^* y - \tau_{xy}^* z) dA.
 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Как видно из выражений (6.12), внутренние усилия $N^y, Q_y^y, Q_z^y, M_y^y, M_z^y, T^y$ состоят из двух слагаемых. Первое слагаемое связано с напряжениями $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$, возникающими при упругих деформациях, второе – с напряжениями $\sigma_x^*, \tau_{xy}^*, \tau_{xz}^*$, возникающими при пластических деформациях.

По изложенной методике приведем пример расчета модели рамной конструкции (рис. 14, а), использованной в лабораторных исследованиях [58, 59]. Элементы рамы имеют прямоугольную форму поперечного сечения. Полагаем, что левая стойка рамы имеет сплошное по длине повреждение и восстанавливается до первоначальных размеров при различных уровнях относительных ремонтных напряжений $\tilde{\nu} = \sigma^p / R$, где R – расчетное сопротивление материала. До получения повреждения стойки рамы имели одинаковые размеры поперечных сечений. Геометрические характеристики сечений элементов рамы следующие: для поврежденной стойки $b_n = 0,05$ м, $h_n^p = 0,06$ м; для неповрежденной стойки $b_n = 0,05$ м, $h_n = 0,08$ м; для ригеля $b = 0,05$ м, $h = 0,1$ м. Характеристики материала конструкции $E = 2,65 \cdot 10^4$ МПа, $R = 10$ МПа.

По результатам расчетов был получен график зависимости $\theta = f(\tilde{\nu})$ (линии 1 на рис. 14,б). В рассматриваемом примере показатель θ , в соответствии с выражением (1.5) вычислялся по формуле $\theta = F^y / F^H$, где F^H и F^y – нагрузки воспринимаемые конструкцией до получения повреждения и после усиления. Представленный на рис. 14 график 1 соответствует случаю, когда размер зоны пластических деформаций лимитирующего сечения рамы составляет $A_{пл} = 0,00036$ м².

Для сравнения на рис. 14,б также приведены графики 2 и 3. График 2 получен по результатам расчетов с учетом только упругих деформаций (в соответствии с методикой, описанное в п. 5.1). Из сравнения графиков 1 и 2 видно, что при использовании упругопластических свойств материала степень восстановления первоначальной несущей способности усиленной рамы возрастает.

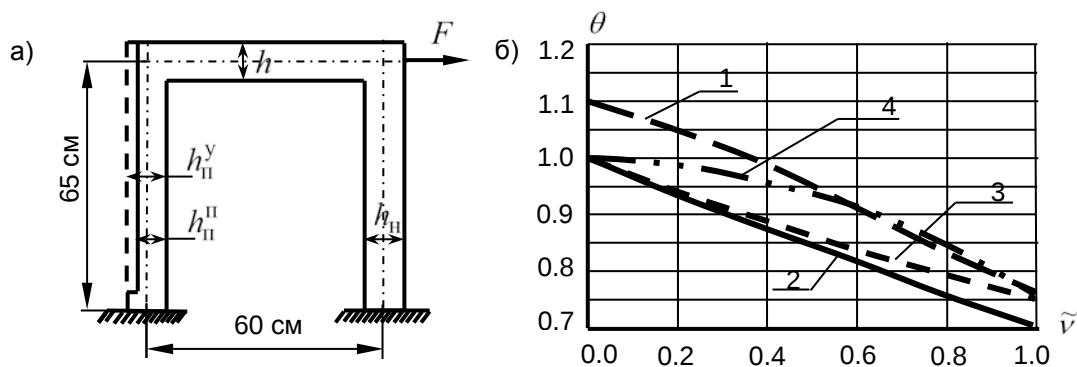


Рис. 14. а) Расчетная схема рамы; б) Графики зависимости $\theta = f(\tilde{\nu})$

График зависимости $\theta = f(\tilde{\nu})$ в виде кривой 3 получен по результатам расчетов в соответствии с методикой, описанной в п. 4.2. Наибольшее расхождение этих результатов от графика 2 при $\tilde{\nu} = 0,8$ составляет 6%. Расхождение результатов расчетов по излагаемому методу (линия 2) от результатов, полученных по методике, изложенной в п. 4.2 (линия 3) объясняется тем, что применяемый здесь вариационный метод расчета, как уже было отмечено, является более универсальным и позволяет также

учитывать влияние касательных напряжений на напряженно-деформированное состояние усиленных под нагрузкой конструкций.

Также на рис. 14,б представлены результаты лабораторных экспериментов работы статически неопределимой рамной конструкций, усиленной без вывода из напряженного состояния (линия 4). Отличие результатов экспериментальных исследований от результатов упругого и упругопластического расчетов (графики 1 и 2), полученные вариационным методом, соответственно составляет 8% и 2%.

6.3. Особенности определения напряженно-деформированного состояния стержневых конструкций, усиливаемых материалами с различными механическими характеристиками

В настоящее время в строительстве широко применяют композитные материалы с более высокими механическими характеристиками. Поэтому перспективной областью исследования является использование таких материалов при проектировании и усилении бетонных и железобетонных конструкций. В связи с этим актуальным является разработка методики определения напряженно-деформированного состояния эксплуатируемых конструкций, усиленных материалами, механические характеристики которых отличаются от характеристик основного материала конструкции.

Известно [51], что степень участия восстанавливающего материала в работе сооружения зависит от соотношения его деформативности и деформативности основного материала.

Впервые исследования, направленные на выявление влияния соотношения деформативностей ремонтного и основного материалов на степень восстановления несущей способности элементов конструкций, отремонтированных без вывода из напряженного состояния для статически определимых упругих систем, были выполнены Будиным А. Я. и Чекреновой М. В. [51]. Были даны расчетные методы проектирования ремонтов статически определимых конструкций и, в первую очередь, подбора механических характеристик ремонтных материалов. Экспериментальные и теоретические разработки по определению несущей способности статически неопределимых конструкций, усиливаемых иным материалом, изложены в исследованиях [58, 59, 64 – 69, 126].

Исследования элементов конструкций, усиленных полимерными композитными материалами, изложены в работах [32, 127 – 130]. В работе [127] рассмотрено проектирование балок прямоугольного сечения, усиленных полосами из ПАСВ. Статья [129] посвящена расчету деформаций железобетонной плиты, усиленной тканью из углеродных волокон. Расчет проводится по предельным состоянием. Приводится методика расчета с использованием программного пакета SCAD Office, позволяющая получать более точную картину напряженно-деформированного состояния конструкции до усиления и после усиления.

Основные положения методики расчета железобетонных пролетных строений мостов, усиленных композитными материалами изложены в работе [130]. Выполнена оценка эффективности усиления конструкций при различных вариантах производства работ. Произведена вероятностная оценка долговечности усиленного композитными материалами железобетонного пролетного строения моста.

В некоторых случаях для изгибаемых железобетонных конструкций возможно использование предварительно напряженных композиционных материалов. В статье [32] рассмотрен метод расчета усиления железобетонных плит углеродными композиционными материалами на основе конечно-элементной модели в ПК SCAD Office с применением преднапряжения конструкции.

В статье [126] описывается вариационный метод расчета напряженно-деформированного состояния нагруженных стержневых систем, усиливаемых иным материалом. Данный метод является более универсальным по сравнению с методикой, изложенной в работах [51, 55 – 56, 64 – 69]. Представленный вариационный метод расчета стержневой системы при усилении позволяет учитывать наличие ремонтных напряжений, наложение напряжений, изменение размеров поперечного сечения стержней конструкции, усиливаемой материалом с большими деформативными и прочностными характеристиками по сравнению с основным материалом конструкции.

Для иллюстрации особенностей, возникающих при применении для усиления материалов с характеристиками, отличными от таковых у основного конструкционного материала, в работе [126] рассмотрен случай усиления участка стержня, когда модуль упругости элемента усиления E_2 в области II (см. рис. 13) больше, чем модуль упругости основного материала конструкции E_1 (область I на рис. 13).

Последовательность расчетов по определению напряженно-деформированного состояния усиливаемой конструкции изложен в п. 6.1 и п. 6.2.

Для определения напряженно-деформированного состояния усиленной под нагрузкой стержневой системы используется вариационное уравнение (6.9).

В рассматриваемом случае входящие в (6.9) выражения для $\delta U_{\text{упр}}$ и $\delta U_{\text{пл}}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta U_{\text{упр}} = \int_{l_{\text{упр}}} [\iint_{A^{\text{II}}} (E_1 \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + G_1 \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy} + G_1 \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \\ \iint_{A^{\text{рем}}} (E_2 \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + G_2 \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy} + G_2 \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \\ + \iint_{A^{\text{II}}} (\sigma_x^{\text{p}} \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^{\text{p}} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^{\text{p}} \delta \gamma_{xz}) dA] dl, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \delta U_{\text{пл}} = \int_{l_{\text{пл}}} [\iint_{A_{\text{упр}}^{\text{II}}} (E_1 \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + G_1 \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy} + G_1 \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \iint_{A_{\text{упр}}^{\text{рем}}} (E_2 \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + G_2 \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy} + G_2 \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \\ + \iint_{A_{\text{упр}}^{\text{II}}} (\sigma_x^{\text{p}} \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^{\text{p}} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^{\text{p}} \delta \gamma_{xz}) dA + \iint_{A_{\text{пл}}^{\text{Y}}} (\sigma_x^* \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^* \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^* \delta \gamma_{xz}) dA] dl \end{aligned} \quad (6.14)$$

В выражениях (6.13) и (6.14) E_1, G_1 – характеристики упругости основного материала конструкции; E_2, G_2 – то же, материала используемого для усиления конструкции (ремонтный материал); $A_{\text{упр}}^{\text{II}}, A_{\text{упр}}^{\text{рем}}$ – площади области упругих деформаций соответственно в зонах основного материала конструкции (область I на рис.13) и ремонтного материала (область II на рис.13); $A_{\text{пл}}^{\text{Y}}$ – площадь области пластических деформаций усиленного сечения.

Вариация работы внешних сил определяется выражением (6.6). Перемещения элементов стержневой системы после усиления определяется с использованием выражений (6.13) – (6.14) и методики, которая изложена в п. 5.3. Деформации $\varepsilon_x, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}$, напряжения $\sigma_x^{\text{y}}, \tau_{xy}^{\text{y}}, \tau_{xz}^{\text{y}}$ и усилия, возникающие в конструкции после усиления определяются выражениями (5.4), (5.12), (5.5) и (5.12).

6.4. Учет монтажных напряжений при усилении деформированных стержней

Как известно [24, 51], несущая способность усиливаемых конструкций существенно зависит от величины тех напряжений, которые действовали в них в период усиления. К таким напряжениям относят напряжения, возникающие от действия эксплуатационных нагрузок действующих в период ремонта или усиления – ремонтные напряжения, а также напряжения от действия монтажных сил, возникающих при присоединении элементов усиления к основным элементам конструкции – монтажные напряжения.

В настоящее время вопросы влияния монтажных напряжений на несущую способность усиливаемых конструкций рассмотрены в монографии [24].

Особенности распределения напряжений в сечении усиливаемого стержня, указанные в параграфах 1 и 2, описаны для случая, когда в процессе усиления конструкции не возникают дополнительные монтажные напряжения. Если таковые возникают, то их также нужно учитывать.

В ряде случаев, для усиления деформированного (искривленного в результате воздействия начальных нагрузок) стержня, используют прямолинейные стержневые элементы, которые при усилении прижимают к усиливаемому стержню с помощью специальных стяжных устройств. В практике усиления для этой цели используются струбцины, хомуты, различного рода стяжки.

При прижатии с помощью стяжных устройств прямолинейного усиливающего элемента к основному искривленному стержню, возникают дополнительные напряжения, которые называются монтажными напряжениями. Силы, при помощи которых происходит прижатие стержней друг к другу, называются монтажными.

После прижатия усиливающего элемента к основному, осуществляется их соединение на сварке или на болтах, после чего последние демонтируются.

В дальнейшем полагаем, что при соединении уже прижатых друг к другу стержней, каких либо дополнительных напряжений не возникает. Следовательно, будет использоваться модель соединения стержней с помощью болтов.

Характерные особенности наложения и распределения напряжений в стержневой системе, усиливаемой без полного вывода его из напряженного состояния, описанные в параграфе 1.2, сохраняются и в случаях, когда при усилении осуществляется соединение усиливающего элемента к основному за счет их прижатия друг к другу. Основное отличие в этом случае будет заключаться в том, что для расчета несущей способности усиленной стержневой системы нужно определять дополнительные монтажные напряжения. Чтобы определить монтажные напряжения, нужно знать, под воздействием каких сил стержни сблизятся.

Таким образом, при использовании описанного способа усиления, возникает необходимость моделирования процесса усиления, определения монтажных сил и напряжений, учет этих величин при проведении расчетов несущей способности.

Вариационный метод определения напряженного состояния усиливаемых нагруженных стержневых конструкций с учетом влияния ремонтных и монтажных сил изложены в работах [121 – 124].

Для иллюстрации особенностей распределения напряжений в сечениях основного и усиливающего элементов рассмотрим случай, когда стержни деформируются под воздействием только изгибающего момента, т.е. в стержнях возникают только изгибные напряжения.

На рис. 15,а показан изогнутый усиливаемый стержень 1 и прямолинейный стержень 2, при помощи которого проводится усиление. Между ними имеется некоторый зазор, величина которого определяется функцией $f(x)$.

Перед проведением ремонтных работ в сечении основного элемента 1 действуют ремонтные напряжения σ_1^p (рис. 16,б). Как видно из рисунка, на этой стадии напряжения возникают только в усиливаемом деформированном стержне 1.

При усилении элемента способом увеличения сечений к деформированному стержневому элементу 1 присоединяется прямолинейный усиливающий стержень 2. Для обеспечения прилегания стержни 1 и 2 прижимаются друг к другу с помощью специальных стяжных устройств (струбцины,

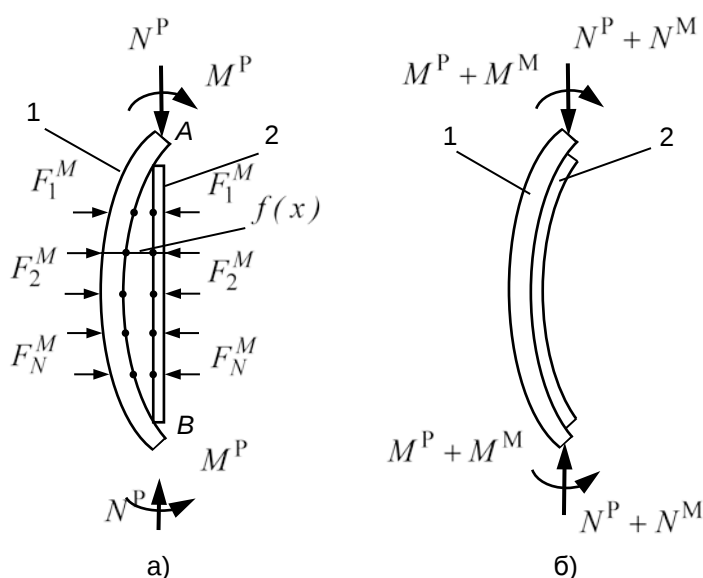


Рис. 15. Расчетная схема к определению монтажных сил

хомуты, различные стяжки). От действия монтажных сил q^M , возникающих при прижатии стержней, элементы усиления изгибаются (рис. 15,б), зазор $f(x)$ между ними устраняется. При этом от воздействия

сил q^M , в конструкции возникают дополнительные (монтажные) напряжения σ^M в сечении А-А системы (рис. 16,в).

При нагружении конструкции дополнительными эксплуатационными нагрузками, возникают дополнительные напряжения, которые некоторым образом распределяются по области основного и усиливающего стержней (рис. 16,г).

В результате наложения ремонтных, монтажных и эксплуатационных напряжений, в сечении А-А будут действовать суммарные напряжения σ_1^y, σ_2^y , распределение которых по стержням показано на рис. 16,д.

В случае, когда в результате наложения указанных напряжений, возникают пластические деформации, эпюра суммарных напряжений будет иной. Один из вариантов эпюр σ_1^y, σ_2^y , при возникновении пластических деформаций, представлен на рис. 16,е.

При наличии продольных сил или при деформировании стержня в составе статически неопределимой конструкции изложенный способ усиления приведет к дополнительному приращению усилий и деформаций в сечениях. На распределение дополнительных деформаций существенное влияние окажут характеристики связей между основным стержнем и элементами усиления, которые создаются стяжными устройствами.

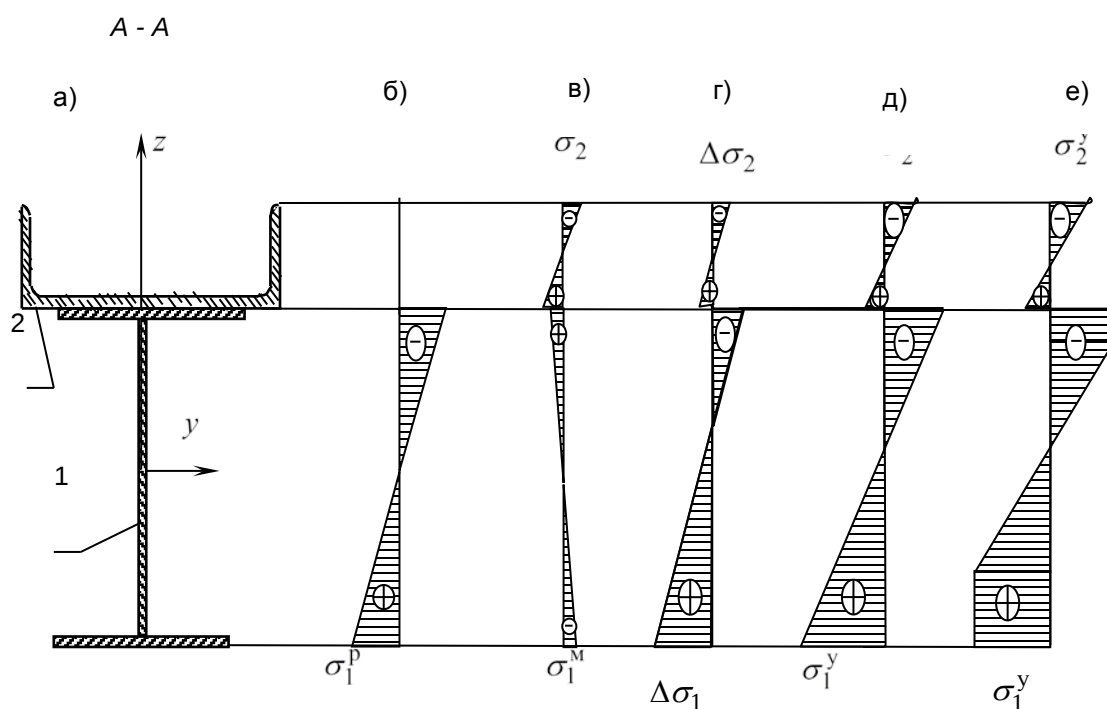


Рис. 16. Напряжения в поперечном сечении усиленного стержня

Особенность рассмотренного способа усиления стержневой конструкции состоит в том, что в процессе проведения монтажных работ по присоединению усиливающего элемента к основному, возникают дополнительные напряжения. Сам процесс усиления может оказать существенное влияние на деформирование усиленных стержней [24].

Следовательно, в таких случаях, при расчете несущей способности конструкции необходимо предварительно решить задачу - определить силы F_j^M , которые необходимо приложить для сближения деформированного и недеформированного элементов. Затем следует вычислить монтажные напряжения, возникающие в конструкции при действии F_j^M .

При наличии нескольких элементов усиления последовательность работ по их присоединению также оказывает влияние на результирующее напряженно-деформированное состояние стержня. Так, вначале могут быть присоединены элементы усиления с вогнутой стороны стержня, а затем с выпуклой. Возможен обратный порядок или одновременное прижатие всех элементов усиления.

Окончательное распределение напряжений в усиленной конструкции оказывается качественно отличным от того, которое имело бы место при одновременном нагружении конструкции ремонтными, монтажными и эксплуатационными нагрузками.

Расчет усиливаемой конструкции состоит из следующих этапов:

Расчет напряженно – деформированного состояния исходной упругой стержневой системы при действии ремонтных нагрузок;

Определение сил, возникающих при монтаже элементов усиления с учетом наличия ремонтных нагрузок, ремонтных напряжений и деформаций;

Вычисление значения монтажных напряжений с учетом действия ремонтных нагрузок и монтажных сил;

Определение напряженно – деформированного состояния конструкции после усиления, при действии эксплуатационных нагрузок, с учетом ремонтных и монтажных напряжений, присоединения дополнительных элементов.

На первом этапе проводится расчет напряженно – деформированного состояния исходной упругой стержневой системы при действии ремонтных нагрузок (см. п. 6.1).

Далее, на втором этапе определяются силы, возникающие при монтаже элементов усиления с учетом наличия ремонтных нагрузок, ремонтных напряжений и деформаций. При вычислении монтажных сил полагаем, что усиливаемый стержень искривлен, поэтому между усиливаемым и усиливающим элементами имеется зазор $f(x)$. Для устранения этого зазора к стержням прикладываются N_F пар сосредоточенных сил F_j^M ($j = 1, 2, \dots, N_F$), действующих перпендикулярно к линии АВ, в точках с координатами x_j (рис. 15,а). Для нахождения сил F_j^M , используется методика, изложенная в [121, 122].

В результате действия сил F_j^M указанные стержни сблизятся и в деформируемой конструкции возникнут дополнительные (монтажные) напряжения, связанные с монтажом усиливаемых элементов.

На следующем этапе вычисляются значения монтажных напряжений $\sigma_x^M, \tau_{xy}^M, \tau_{xz}^M$ с учетом действия ремонтных нагрузок и монтажных сил, а также, наличие ремонтных напряжений $\sigma_x^P, \tau_{xy}^P, \tau_{xz}^P$. Расчеты проводятся также вариационным методом на основе уравнения (5.13) в соответствии с методикой, изложенной в [123].

На последнем этапе определяется напряженно-деформированное состояние конструкции после усиления с учетом действия дополнительных эксплуатационных нагрузок, наличия ремонтных $\sigma_x^P, \tau_{xy}^P, \tau_{xz}^P$ и монтажных $\sigma_x^M, \tau_{xy}^M, \tau_{xz}^M$ напряжений.

При определении напряженно-деформированного состояния конструкции после усиления допускается возникновение упругопластических деформаций в материале усиливаемой конструкции. В этом случае для описания напряженно – деформированного состояния стержневой системы используется теория идеально пластического тела (см. п. 6.2).

Перемещения элементов конструкции после усиления определяется с использованием вариационного уравнения (6.9).

В уравнении (6.9) вариации $\delta U_{упр}$ и $\delta U_{пл}$ записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta U_{упр} = & \int_{l_{упр}} \left[\iint_{A^II} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \right. \\ & \left. + \iint_{A^II} \left((\sigma_x^P + \sigma_x^M) \delta \varepsilon_x + (\tau_{xy}^P + \tau_{xy}^M) \delta \gamma_{xy} + (\tau_{xz}^P + \tau_{xz}^M) \delta \gamma_{xz} \right) dA \right] dl + \\ & + \int_{l_{упр}^{усм}} \left[\iint_{A^{усм}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \iint_{A^{усм}} (\sigma_x^M \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^M \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^M \delta \gamma_{xz}) dA \right] dl + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{l^B} \iint_{A^B} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dl + \\
 & \delta U_{\text{пл}} = \int_{l_{\text{пл}}} \left[\iint_{A_{\text{упр}}^{\text{п}}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \right. \\
 & + \iint_{A_{\text{упр}}^{\text{п}}} ((\sigma_x^{\text{п}} + \sigma_x^{\text{м}}) \delta \varepsilon_x + (\tau_{xy}^{\text{п}} + \tau_{xy}^{\text{м}}) \delta \gamma_{xy} + (\tau_{xz}^{\text{п}} + \tau_{xz}^{\text{м}}) \delta \gamma_{xz}) dA + \\
 & + \left. \iint_{A_{\text{пл}}^{\text{п}}} (\sigma_x^* \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^* \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^* \delta \gamma_{xz}) dA \right] dl + \int_{l_{\text{пл}}^{\text{узм}}} \left[\iint_{A_{\text{упр}}^{\text{узм}}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \right. \\
 & + \left. \iint_{A_{\text{упр}}^{\text{узм}}} (\sigma_x^{\text{м}} \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^{\text{м}} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^{\text{м}} \delta \gamma_{xz}) dA + \iint_{A_{\text{пл}}^{\text{узм}}} (\sigma_x^* \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^* \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^* \delta \gamma_{xz}) dA \right] dl.
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

В выражениях (6.15) $l^{\text{узм}}$, $A^{\text{узм}}$ - длина и площадь поперечных сечений усиливающих стержней; l^B , A^B - длина и площадь поперечных сечений стержневых элементов, моделирующих соединение прижатых друг к другу стержней болтами,

Вариация работы внешних сил выражается уравнением (5.6).

После определения перемещений в элементах усиленной конструкции вычисляются деформации $\varepsilon_x, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}$ с помощью соотношений (5.4) или (5.12), затем с использованием выражений (5.5) и (6.12) определяются напряжения $\sigma_x^y, \tau_{xy}^y, \tau_{xz}^y$ и усилия возникающие в конструкции после усиления.

На основе изложенной методики приведем пример расчета рамной конструкции (рис. 17,а) усиливаемой способом увеличения сечения левой стойки. При усилении сечение балки увеличивается в два раза. Усиливающий элемент задаётся в виде отдельного стержня 2. Сечение элементов рамы 1 и усиливающего элемента 2 – двутавр № 22 (рис. 18,а). Основной стержень левой стойки 1 и усиливающий элемент 2 присоединяют монтажными элементами 3. Расчеты были выполнены с учетом только упругих деформаций.

Полученная эпюра изгибающих моментов в рамной конструкции от воздействия ремонтной нагрузки $F^{\text{р}} = 10$ приведена на рис. 17,б.

В рассматриваемом примере значения монтажных сил в сближаемых точках по результатам расчетов получились следующими: $F_1^{\text{м}} = 1.471$, $F_2^{\text{м}} = 4.34$, $F_3^{\text{м}} = 0.135$ кН (рис. 17,в). Эпюра изгибающих моментов от воздействия ремонтной нагрузки $F^{\text{р}}$ и монтажных сил $F_1^{\text{м}}, F_2^{\text{м}}, F_3^{\text{м}}$ в раме приведено на рис. 17,г. Затем на конструкцию прикладывается дополнительная эксплуатационная нагрузка $\Delta F^y = 20$ кН (рис.2,д) и в результате суммарная сосредоточенная сила, действующая после усиления, становится равной $F^y = 30$ кН. При этом элемент усиления 2 и основной стержень 1 деформируются совместно, эпюра изгибающих моментов после усиления приведено на рис. 17,е.

Как показывают результаты расчетов, в рассматриваемом случае учет монтажных деформаций и напряжений существенно влияет на распределение изгибающих моментов и напряжений по стержням. Если сравнивать значение усилий в усиливаемой раме, полученные при расчете с учетом монтажных сил (рис. 17,е) со значениями усилий в такой же раме рассчитанной без учета монтажных сил (рис. 17,г), то видно, что в первом случае максимальный изгибающий момент в раме на 21 % меньше чем во втором. На рис. 18 также приведены эпюры распределения нормальных напряжений в лимитирующем опорном сечении А рамы, полученные с учетом (рис. 18,б) и без учета (рис. 18,в) монтажных напряжений. Как видно из этих эпюр они качественно отличаются друг от друга. При этом максимальное напряжение в сечении рамы, полученное с учетом монтажных сил на 8,3 % меньше по сравнению со случаем, когда расчет производится без учета них.

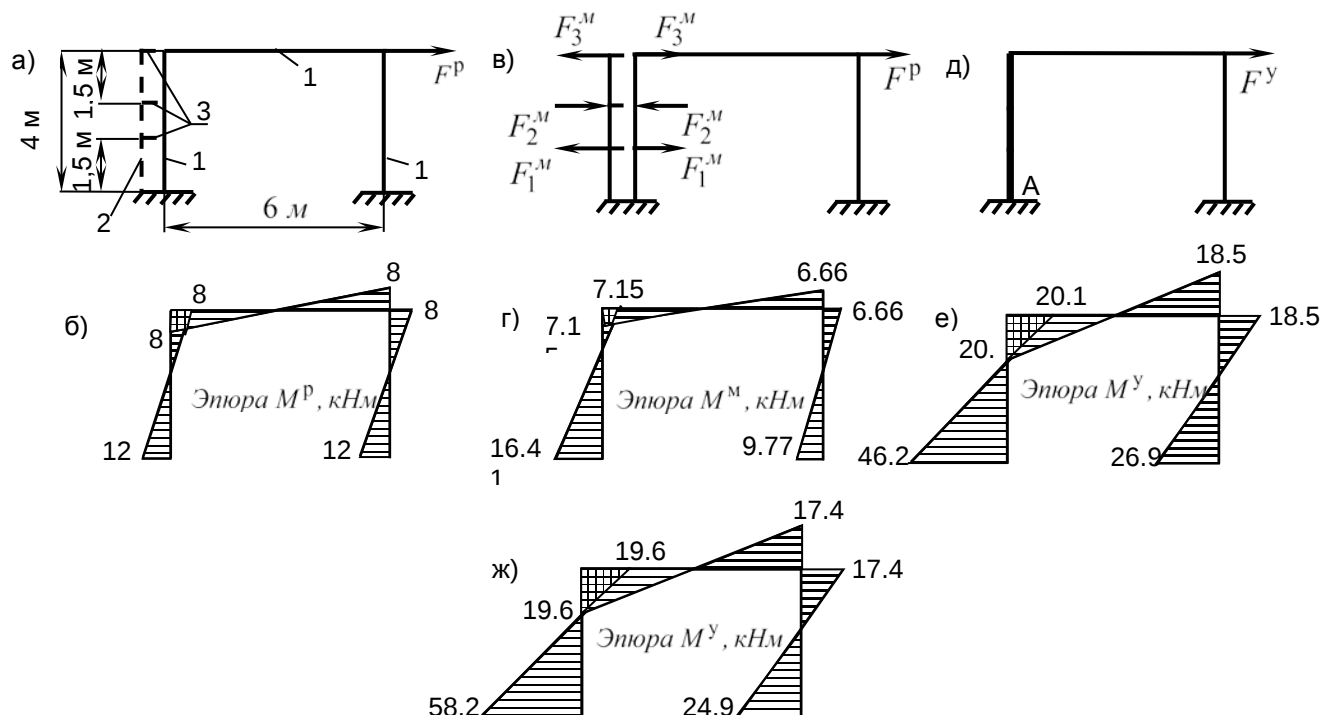


Рис. 17. а) Расчетная схема рамы и эпюры изгибающих моментов в период усиления; б) То же, при действии монтажных сил; в) То же, после усиления; г) Эпюры изгибающих моментов, полученное без учета монтажных сил

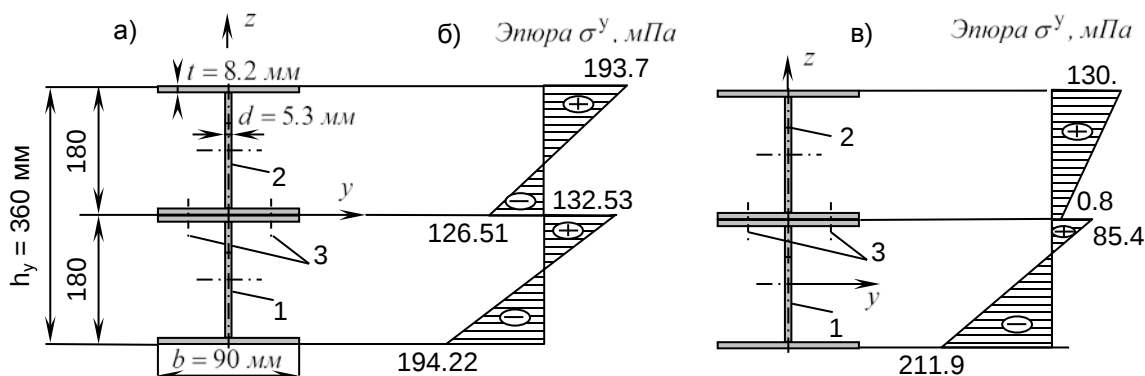


Рис. 18. а) Сечение стойки рамы после усиления: 1 – основной элемент конструкции; 2 – усиливающий элемент; 3 – соединительные элементы; б) Эпюры напряжений σ^y в лимитирующем сечении рамы (опорное сечение А) с учетом монтажных напряжений; в) То же, полученное без учета монтажных сил

6.5. Моделирование напряженно-деформированного состояния усиливаемых железобетонных конструкций

Как отмечается в монографии [31], часто стержневые железобетонные конструкции до и после усиления рассчитываются обычными методами строительной механики упругих систем, а затем производится поэлементный расчет конструкций. Такой способ расчета не учитывает предыстории нагружения, особенности несущей способности и деформативности элементов конструкций, усиленных под нагрузкой.

В компьютерных программах, используемых в настоящее время для расчетов, не учитываются некоторые особенности, возникающие при моделировании напряженно-деформированного состояния конструкций, усиленных без вывода из эксплуатации.

Указанные факторы определяют необходимость применения специальных разработок по методам расчета усиленных железобетонных конструкций.

Для определения напряженно-деформированного состояния усиленной нагруженной железобетонной конструкции в статье [125] рассматривается работа сжато – изогнутого железобетонного стержня усиленного под нагрузкой (рис. 19,а). Полагаем, что до усиления конструкция находится в напряженном состоянии, которое вызывается упругими и пластическими деформациями от ремонтных нагрузок.

В период усиления элемент 1 конструкции находится под воздействием ремонтных нагрузок. В этом случае в сжатой зоне элемента 1 деформации являются упругими и действуют ремонтные напряжения σ_x^p (рис. 19,б). В растянутой зоне допускается возникновение упругопластических деформаций. При упругопластических деформациях полагаем, что деформирование бетона описывается диаграммой Прандтля, а арматура работает в упругой стадии. Если в точках сечения возникают упругие деформации, то зависимость между напряжениями и деформациями описывается законом Гука. В тех случаях, когда в какой-либо точке сечения возникает пластическая деформация, если эта точка находится в растянутой зоне, то $\sigma_i^p = R_p$, где σ_i^p - интенсивность нормальных напряжений в зоне основного материала 1; R_p – расчетное сопротивление бетона растяжению.

Интенсивность нормальных напряжений определяется по формуле $\sigma_i^p = \sqrt{\sigma_x^{p2} + 3(\tau_{xy}^{p2} + \tau_{xz}^{p2})}$, где τ_{xy}^p , τ_{xz}^p - касательные напряжения, действующие в сечении усиленного элемента в период усиления.

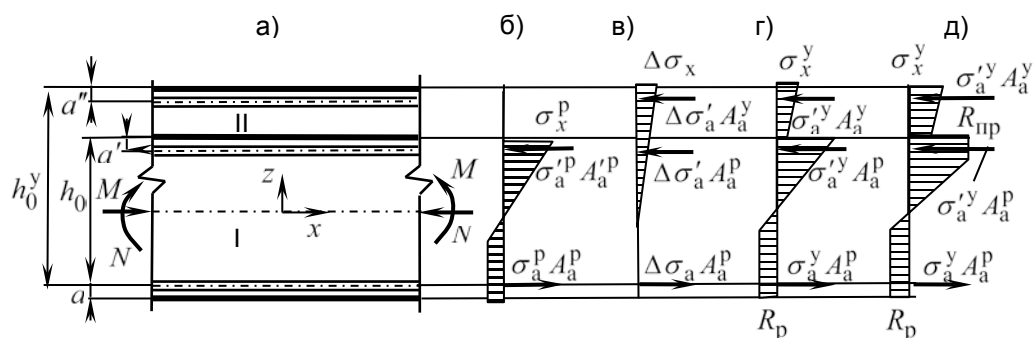


Рис. 19. Схема усиленного железобетонного элемента (а) и эпюры нормальных напряжений: б – при действии ремонтных нагрузок; в – при действии дополнительных нагрузок после усиления; г – эпюра результирующих напряжений при возникновении упругих деформаций; д – то же, при упругопластических деформациях

После усиления, при нагружении конструкции дополнительными эксплуатационными силами, в сжатой зоне сечения усиленного элемента возникают дополнительные напряжения $\Delta\sigma_x$ (рис. 19,в). В случае возникновения только упругих деформаций в сжатой области сечения результирующие напряжения в бетоне и арматуре

$$\sigma_x^y = \sigma_x^p + \Delta\sigma_x, \quad \sigma_a^y = \sigma_a^p + \Delta\sigma_a.$$

Эпюра результирующих напряжений имеет вид, представленной на рис. 19,г. При увеличении эксплуатационных нагрузок напряжения в крайнем сжатом волокне элемента 1 усиленного сечения достигнут величины призмочной прочности бетона сжатию $R_{пр}$ (рис. 19,д). Затем в этой части сечения, также возникает зона текучести. В этом случае в точках, где возникают пластические деформации, считается $\sigma_{пр}^y = R$. Здесь $R_{пр}$ – призмочная прочность бетона.

Необходимо отметить, что при возникновении пластических деформаций, как известно, принцип суперпозиции не работает, поэтому при определении напряжений в период ремонта σ_x^p и после усиления σ_x^y (рис. 19,б,д) учитывается перераспределение напряжений по сечению.

Как было отмечено в п. 5.2 в общем случае нагружения, когда возникающие в конструкции деформации являются только упругими, действующие в областях I и II напряжения в сечении усиленного элемента (рис. 13) определяются с учетом касательных напряжений выражениями (6.1) и (6.2).

При возникновении упругопластических деформаций значения результирующих напряжений $\sigma_x^y, \tau_{xy}^y, \tau_{xz}^y$ в областях I и II усиленного сечения нельзя определить выражениями (6.1) и (6.2). В этом случае значения напряжений в сечении стержней и размер зоны пластических деформаций определяется из решения задачи упругопластического деформирования.

Перемещения стержневой системы от воздействия ремонтных нагрузок определяется из условия (6.9), где выражения для вариации потенциальной энергии деформации в зонах упругих и пластических деформаций имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta U_{\text{упр}} &= \int_{l_{\text{упр}}} \left[\iint_{A^{\text{II}}} (E_{\text{б}} \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + G_{\text{б}} \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy} + G_{\text{б}} \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \iint_{A_a^{\text{II}}} E_a \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dA \right] dl, \\ \delta U_{\text{пл}} &= \int_{l_{\text{пл}}} \left[\iint_{A_{\text{упр}}^{\text{II}}} (E_{\text{б}} \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + G_{\text{б}} \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy} + G_{\text{б}} \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \right. \\ &\quad \left. + \iint_{A_{\text{пл}}^{\text{II}}} (\sigma_x^* \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^* \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^* \delta \gamma_{xz}) dA + \iint_{A_a^{\text{II}}} E_a \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dA \right] dl, \end{aligned} \quad (6.15)$$

где A_a^{II} – площади поперечных сечений арматуры элементов конструкции до усиления; $A_{\text{упр}}^{\text{II}}, A_{\text{пл}}^{\text{II}}$ – площади областей упругих и пластических деформаций поперечных сечений в зоне основного материала стержней; $E_{\text{б}}$ и E_a – модули упругости соответственно, бетона и арматуры; $\sigma_x^*, \tau_{xy}^*, \tau_{xz}^*$ – нормальные и касательные напряжения, возникающие в зоне пластических деформаций.

Перемещения $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$, углы поворота $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3$ и деформации вычисляются в локальной ортогональной системе координат $Oxyz$, с осью Ox , направленной по касательной к продольной оси стержня. При этом используется методика, изложенная в п.5.3.

С использованием выражений (6.15), определяются перемещения стержней, Затем, подсчитываются деформации $\varepsilon_x, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}$ и напряжения $\sigma_x^p, \tau_{xy}^p, \tau_{xz}^p$, возникающие в конструкции при ремонте.

Напряженно-деформированное состояние конструкции после усиления определяется с учетом действия эксплуатационных нагрузок и наличия ремонтных $\sigma_x^p, \tau_{xy}^p, \tau_{xz}^p$ напряжений.

Выражения $\delta U_{\text{упр}}, \delta U_{\text{пл}}$ в этом случае записывается в виде

$$\begin{aligned} \delta U_{\text{упр}} &= \int_{l_{\text{упр}}} \left[\iint_{A^y} (E_{\text{б}} \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + G_{\text{б}} \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy} + G_{\text{б}} \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \iint_{A^{\text{II}}} (\sigma_x^p \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^p \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^p \delta \gamma_{xz}) dA + \right. \\ &\quad \left. + \iint_{A_a^y} E_a \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dA + \iint_{A_a^{\text{II}}} \sigma_x^p \delta \varepsilon_x dA \right] dl; \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \delta U_{\text{пл}} &= \int_{l_{\text{пл}}} \left[\iint_{A_{\text{упр}}^y} (E_{\text{б}} \varepsilon_x \delta \varepsilon_x + G_{\text{б}} \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy} + G_{\text{б}} \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA + \iint_{A_{\text{упр}}^{\text{II}}} (\sigma_x^p \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^p \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^p \delta \gamma_{xz}) dA + \right. \\ &\quad \left. + \iint_{A_a^y} E_a \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dA + \iint_{A_a^{\text{II}}} \sigma_x^p \delta \varepsilon_x + \iint_{A_{\text{пл}}^y} (\sigma_x^* \delta \varepsilon_x + \tau_{xy}^* \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz}^* \delta \gamma_{xz}) dA \right] dl, \end{aligned} \quad (6.18)$$

где A^y – площадь элементов стержневой системы после усиления; $A_{\text{упр}}^y$ и $A_{\text{пл}}^y$ – площади областей упругих и пластических деформаций поперечных сечений; A_a^y – площади поперечных сечений арматуры элементов конструкции после усиления.

В выражениях (6.17) – (6.18) напряжения в зоне пластических деформаций $\sigma_x^*, \tau_{xy}^*, \tau_{xz}^*$ определяются по критерию пластичности Губера – Мизеса – Генки.

С использованием соотношений (6.17) из вариационного уравнения (6.5) определяются перемещения в элементах усиленной конструкции. Далее, с помощью выражений (5.4) и (5.5) определяются деформации и напряжения.

Усилия N^y , M_y^y , M_z^y , возникающие в элементах железобетонной конструкции после усиления, с учетом упругопластических деформаций определяются следующим образом:

$$N^y = \iint_{A_{упр}^y} \sigma_x^y dA + \iint_{A_a^y} \sigma_x^y dA + \iint_{A_{пл}^y} \sigma_x^* dA, \quad M_y^y = \iint_{A_{упр}^y} \sigma_x^y z dA + \iint_{A_a^y} \sigma_x^y z dA + \iint_{A_{пл}^y} \sigma_x^* z dA,$$

$$M_z^y = \iint_{A_{упр}^y} \sigma_x^y y dA + \iint_{A_a^y} \sigma_x^y y dA + \iint_{A_{пл}^y} \sigma_x^* y dA.$$

Поперечные силы Q_y^y , Q_z^y и крутящий момент T^y вычисляются выражениями (6.12).

Иллюстрацию расчетов по предлагаемой методике рассмотрим на примере расчета простой консольной железобетонной балки (рис. 2,а), поврежденной по всей длине. Балка имеет прямоугольную форму сечения с односторонним армированием (рис. 2,б). Размеры поперечного сечения балки до получения повреждения были следующими: $b = 30$ см; $h = 80$ см; $a = 7$ см; растянутая арматура класса А-111 ($R_a = 340$ МПа, $E_a = 2 \cdot 10^5$ МПа) с площадью поперечного сечения $A_a = 29,45$ см² (6Ф25); бетон класса В20 ($E_b = 29 \cdot 10^3$, $R_{пр} = 11,5$, $R_p = 0,85$ МПа).

Выполнен расчет неповрежденной балки от действия нагрузки $F = 15$ кН. Наибольший прогиб балки, определенный методом статики стержневых систем составляет $\tilde{w} = 0.101 \cdot 10^{-3}$ м. В результате расчета по предлагаемой методике максимальный прогиб получилось $w = 0.103 \cdot 10^{-3}$ м, что на 2 % отличается от результата, полученный традиционным методом.

После получения повреждения, высота сечения балки уменьшилось до размера $h_n = 60$ см. В период усиления балка была восстановлена до первоначальных размеров. Восстановление балки проводилось при разных значениях уровня ремонтных нагрузок $\tilde{v} = F^p / F_{пр}^n$, где F^p – ремонтная нагрузка, $F_{пр}^n$ – предельная нагрузка для поврежденной балки ($F_{пр}^n = 192.5$ кН).

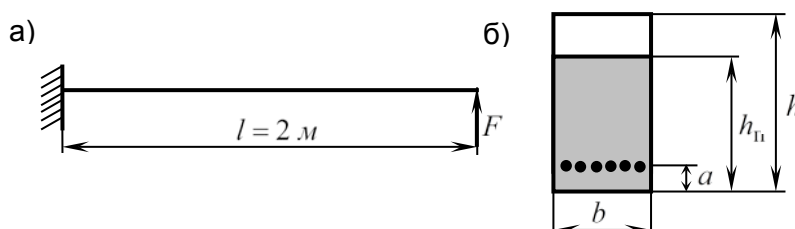


Рис. 20. Расчетная схема (а) и сечение балки (б)

По результатам расчетов в таблице 1 приведены максимальные изгибающие моменты M^y , действующие в сечении элемента после усиления при разных значениях уровня ремонтных напряжений и площади области пластических деформаций. Для сравнения в данной таблице приведены изгибающие моменты $\tilde{M}^y$, полученные по методике, изложенной в [51]. Из сравнения этих результатов видно, что наибольшее расхождение составляет 2,4%.

Таблица 1

$\tilde{v}$	0,0	0,2	0,4	0,6
M^y , кНм	571,5	537,0	502,0	464,0
$A_{пл}$, м ²	0,24	0,2144	0,1865	0,1684
$\tilde{M}^y$, кНм	585,0	545,0	505,0	465,0

7. Выводы

Выполненный обзор работ позволяет сделать следующие выводы:

1. В период усиления, в элементах конструкции имеется две области. В одной из них напряжения вызваны действовавшими при усилении нагрузками и монтажными напряжениями, в другой – возникают только монтажные напряжения.
2. Расчет усиливаемых под нагрузкой конструкций желательно выполнять с учетом физической нелинейности деформируемых стержневых систем. Необходимо учитывать изменение их напряженно-деформированного состояния с учетом накапливаемых на каждом этапе ремонтных работ напряжений, деформаций и перемещений элементов системы.
3. В ряде случаев, необходимо определять силы, которые нужно приложить для проведения монтажа, а также величины монтажных напряжений. Для оценки напряженно деформированного состояния усиливаемой конструкции необходимо учесть наличие ремонтных напряжений, присоединения дополнительных элементов и возникновения монтажных напряжений.
4. Необходимо учитывать особенности, возникающие при применении для усиления материалов с механическими характеристиками, отличными от таковых у основного конструкционного материала, так как эти особенности, наряду с уровнем начальных напряжений, существенно влияют на эффективность усиления.
5. Метод расчета конструкций, усиливаемых в напряженном состоянии должен быть достаточно универсальным, т.к. требуется учитывать наличие ремонтных и монтажных напряжений, изменение геометрических размеров сечений элементов в период усиления и последующее дополнительное нагружение усиленной конструкции, наложение полей напряжений, сопровождающееся возникновением пластических деформаций, наложение напряжений, обусловленных различными факторами, в том числе и технологическими.

Литература

1. Беленя Е. И. Исследование упругопластических процессов работы балок, усиленных до загрузки и под нагрузкой // Исследования по стальным конструкциям. М.-Л.: Госстройиздат, 1950. С. 161–182.
2. Донник Г.А. Напряженно-деформированное состояние при сварке стержней составного несимметричного сечения // Металлические конструкции: сб. тр. МИСИ. М.: 1977. № 36. С. 46–53.
3. Ребров И.С. Проектирование и расчет усиления стальных балок. Л.: ЛДНТП, 1984. 27 с.
4. Шепельский М.Я. Влияние сварочных деформаций на работу балок, усиливаемых под нагрузкой // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1966. № 2. С. 85 – 94.
5. Колесников В.М. Об усилении стальных стропильных ферм под нагрузкой // Монтажные и специальные работы в строительстве. 1960. № 2. С. 12 – 15.
6. Колесников В.М. О расчёте сжатых стальных стержней, усиленных под нагрузкой // «Строительное производство». Сб. докл. на XXII науч. конф. ЛИСИ. Л.: 1964. С. 8 – 12.
7. Иммерман А. Г., Десятов Б. И. Расчет усиленных под нагрузкой сжатых элементов сварных стальных ферм // Металлические конструкции : сб. тр. МИСИ. М.: 1970. № 85. С. 147-151.
8. Ребров И. С. Работа сжатых элементов стальных конструкций, усиленных под нагрузкой. Л.: Стройиздат, 1976. 176 с.
9. Raboldt K. Tragverhalten des nachträglich seitlich abgestützten Druckstabes / K. Raboldt, M. Ast. – Wissenschaftliche Zeitschrift der Ingenieurhochschule Cottbus. 1982. N 4. S.18-28.
10. Лашенко М. Н. Усиление металлических конструкций. М.–Л.: Госстройиздат, 1954. 155 с.
11. Лашенко М. Н. Регулирование напряжений в металлических конструкциях. М.–Л.: Стройиздат, 1966. 190 с.
12. Лашенко М. Н. Аварии металлических конструкций зданий и сооружений. Л.: Стройиздат, 1969. 182 с.
13. Лашенко М.Н. Повышение надёжности металлических конструкций зданий и сооружений при реконструкции. Л.: Стройиздат, 1987. С. 6-92.
14. Беляев Б. И. Причины аварий стальных конструкций и способы их устранения. М.: Стройиздат, 1968. С.7-69, 139-144.

15. Бирюлев В. В., Сильвестров А. В., Левенсон Я. С. Об одном случае усиления стальных ферм покрытия // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1965. № 9. С. 52 – 58.
16. Добрыкин И., Симановская Б. Усиление стальных ферм // Промышленное строительство и инженерные сооружения. 1963. № 1. С. 28.
17. Солодарь М. Б., Бирюлев В. В., Шагимарданов Р. М. Усиление стальных конструкций главного мартеновского цеха // Промышленное строительство. 1968. № 1. С. 58 – 63.
18. Таран В. Д. Усиление сваркой нагруженных элементов стальных конструкций // Труды МНХ и ГП. им. Губкина, вып.65: «Сооружения газонефтепроводов и конструкций». Изд-во Недра, 1967. С. 25 – 32.
19. Шапиро Г. А. О способе увеличения несущей способности стальных конструкций сталеплавильных цехов // Промышленное строительство. 1960. № 2. С.46-49.
20. Ватин Н. И., Улыбин А. В., Огородник В.М. ГОСТ Р 53778-2010: обследование инженерных сетей и другие особенности нового нормативного документа // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 1. С. 5-7.
21. Улыбин А.В., Ватин Н.И. Принципиальные отличия ГОСТ Р 53778-2010 от старых нормативов по обследованию зданий и сооружений // Гидротехника. 2011. № 2. С. 54.
22. Ребров И.С. Об учете истории нагружения в расчете упругопластических стержневых систем // «Металлические конструкции и испытания сооружений» : межвуз. темат. сб. тр. ЛИСИ. 1984. С. 46-54.
23. Ребров И. С. К расчету усиления стержневых стальных конструкций // «Металлические конструкции и испытания сооружений»: Межвуз. темат. сб. тр. ЛИСИ. 1985. С.24-32.
24. Ребров И. С. Усиление стержневых металлических конструкций. Л.: Стройиздат, 1988. 288 с.
25. Yi Liu, Liam Gannon. Finite element study of steel beams reinforced while under load // Engineering Structures. Volume 31, Issue 11. 2009. Pp. 2630 – 2647.
26. Joakim Wallin, John Heander, Raid Karoum (2011). Strengthening of a steel railway bridge and its impact on the dynamic response to passing trains // Engineering Structures. Volume 33, Issue 2. 2011. Pp. 635 – 646.
27. Астафьев Д. О. Теория и расчет реконструируемых железобетонных конструкций : дисс. на соиск. учен. степ. д.т.н. Спец. 05.23.01. С.-Петербург, 1995. 360 с.
28. Бондаренко В. М., Меркулов С. И. Развитие теории реконструированного железобетона // Проблемы обеспечения безопасности строительного фонда России: материалы III Международных академических чтений РААСН. Курск, Курск. ГТУ, 2004. С. 59-62.
29. Бондаренко В. М., Меркулов С. И. К вопросу развития теории реконструированного железобетона // Бетон и железобетон. 2004. № 6. С. 12-14.
30. Элементы теории реконструкции железобетона / Бондаренко В. М., Боровских А. В., Марков С. В., Римшин В. И., Н. Новгород, Нижегород. гос. архит. ун-т, 2002. 190 с.
31. Бондаренко С. В., Санжаровский Р. С. Усиление железобетонных конструкций при реконструкции зданий. М.: Стройиздат, 1990. 352 с.
32. Усиление железобетонных конструкций с использованием композиционных материалов на основе углеродных волокон и постнапрягаемых стержней / Ватин Н. И., Дьячкова А. А., Кишиневская Е. В., Кузнецов В. Д. // Стройпрофиль, 2009. № 4. С.20.
33. Гучкин И. С., Багдоев С. Г., Артюшин Д. В. Проектирование усиления однопролетных железобетонных балок подведением промежуточной жесткой опоры // Региональная архитектура и строительство. Пензенский гос. ун-т архит. и стр-ва. 2009. № 1. С. 82-86.
34. Гучкин И. С., Панков А. В. Железобетонные балки, усиленные комбинированной системой из стальных элементов // Региональная архитектура и строительство. Пензенский гос. ун-т архит. и стр-ва. 2010. № 2. С. 94-100.
35. Дворников В. М. Прочность и деформативность внецентренно сжатых усиленных под нагрузкой железобетонных элементов : дисс.на соиск. учен. степ. к.т.н. Спец.: 05.23.01. Курск, 2003 г. 175 с.
36. Кишиневская Е. В., Ватин Н. И., Кузнецов В. Д. Усиление строительных конструкций с использованием постнапряженного железобетона // Инженерно-строительный журнал. 2009. № 3. С. 29-32.
37. Меркулов С. И. Конструктивная безопасность железобетонных элементов реконструируемых зданий и сооружений: дисс. на соиск. учен. степ. д.т.н., Спец.: 05.23.01. Орел. 2006. 394 с.
38. Меркулов С. И., Дворников В. М., Татаренков А. И. Расчет усиленных внецентренно сжатых железобетонных конструкций с учетом специфических особенностей их работы // Известия Орловского ГТУ. Серия: Строительство и транспорт. 2008. № 4-20. С. 18-23.

39. Исследования усиленных железобетонных конструкций / Меркулов С. И., Дворников В. М., Татаренков А. И., Меркулов Д. С. // Изв. вузов. Строительство, 2009. С. 123-129.
40. Меркулов С. И., Поветкин М. С. Экспериментальные исследования трещиностойкости усиленных изгибаемых железобетонных конструкций // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. 2009. № 3. С. 111-116.
41. Морозов В. И., Анцыгин О. И. Расчет усиленных железобетонных колонн с коррозионными повреждениями // Пром. и гражд. стр-во. 2009. № 2. С. 15-16.
42. Панков А. В. Прочность и деформативность железобетонных балок, усиленных комбинированной системой с различными конструктивными параметрами: дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н., Спец.: 05.23.01. Пенза, 2011. 169 с.
43. Римшин В.И. О некоторых вопросах несущей способности строительных конструкций, усиленных наращиванием // Вестник отделения строительных наук. Вып. 2. М.: 1998. С. 329-332.
44. Римшин В.И. Повреждения и методы расчета усиления железобетонных конструкций: автореф. дисс. на соиск. учен. степ. д.т.н., Спец.: 05.23.01. Белгород, 2000. 35 с.
45. Римшин В. И., Кустикова Ю. О. Механика деформирования и разрушения усиленных железобетонных конструкций // Известия ОрелГТУ. Строительство. Транспорт, 2007. № 3/15 (537). С. 53-56.
46. Усиления при реконструкции зданий и сооружений. Устройство и расчёты усиления зданий при реконструкции / Санжаровский Р. С., Аставфьев Д. О., Улицкий В. М., Зибер Ф. СПб, СПб гос. архит-строит. ун-т, 1998. 637 с.
47. Татаренков А. И. Прочность и деформативность изгибаемых железобетонных конструкций, усиленных под нагрузкой: автореф. дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н., Спец.: 05.23.01. Орел, 2005. 23 с.
48. Черячукин В. В., Гучкин И. С., Панков А. В. Проектирование усиления железобетонных стропильных балок комбинированной системой // Вестник ВолГАСУ. Сер: Стр-во и архит. 2010. Вып. 17 (36). С. 9-13.
49. Поветкин М. С. Напряженно-деформированное состояние усиленных под нагрузкой железобетонных изгибаемых преднапряженных элементов: дисс. на соиск. учен. степ. д.т.н., Спец.: 05.23.01. Курск, 2009. 213 с.
50. Duarte M. V. Faria V. J. G. Lucio A. P. R. Strengthening of flat slabs with post-tensioning using anchorages by bonding // Engineering Structures, Volume 33, Issue 6. 2011. Pp. 2025 – 2043.
51. Будин А. Я., Чекренева М. В. Усиление портовых сооружений. М.: Транспорт, 1983. 178 с.
52. Будин А. Я. Тонкие подпорные стенки. Л.: Стройиздат, 1974. 191 с.
53. Будин А. Я. Эксплуатация и долговечность портовых гидротехнических сооружений. М.: Транспорт, 1977. 318 с.
54. Будин А. Я. Тонкие подпорные стенки для условий Севера. Л.: Стройиздат, 1982. 288 с.
55. Методические указания по повышению несущей способности и определение эффективности ремонта и усиления портовых гидротехнических сооружений. Л.: Транспорт, 1982. 52 с. (Министерство речного флота РСФСР).
56. Методические указания по эксплуатации и усилению причальных сооружений, имеющих локальные повреждения. Л.: Транспорт, 1977. 26 с. (Министерство речного флота РСФСР).
57. Руководящий технический материал. Оценка эффективности ремонта бетонных и железобетонных конструкций гидротехнических сооружений: РТМ 212.0116-82.
58. Убайдуллоев М. Н. Лабораторные исследования работы статически неопределимых рамных конструкций, усиливаемых без вывода из эксплуатации // Повышение эффективности эксплуатации и реконструкции сооружений АПК. Сб. науч. трудов ЛСХИ. Л.: 1989. С. 25-29.
59. Убайдуллоев М. Н. Экспериментальные данные о несущей способности усиливаемых под нагрузкой однопролетных рам // Тезисы докладов научно-производственной конференции «Проблемы обследования, испытания, усиления и реконструкции сооружений». Даугавпилс, 1989. С.78-79.
60. Убайдуллоев М. Н., Камалов А., Пинне М. Особенности усиления статически неопределимых конструкций // Тезисы докладов к конференции молодых ученых и студентов ЛСХИ. Л.: 1990. С.146.
61. Убайдуллоев М. Н. Перераспределение усилий в статически неопределимых системах при возникновении локальных повреждений // Совершенствования методов строительства и эксплуатации сооружений агропромышленного комплекса. Сб. научных трудов. ЛСХИ. Л.: 1988. С. 72-76.
62. Убайдуллоев М. Н. Оценка несущей способности статически неопределимых конструкций, получивших локальные повреждения // Труды международной научно-практической конференции по проблемам

механики грунтов, фундаментостроению и транспортному строительству. Том 2. Пермь, 2004. С. 202-207.

63. Несущая способность усиливаемых статически неопределимых рамных конструкций / Будин А. Я., Чекренева М. В., Корезина Т. В., Убайдуллоев М. Н. // Повышение эффективности эксплуатации и реконструкции сооружений АПК. Сб. научных трудов ЛСХИ. Л.: 1989. С. 5 – 14.
64. Убайдуллоев М. Н. Усиление статически неопределимых конструкций гидротехнических и мелиоративных сооружений: автореферат дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н. Спец. 05.23.07. / Лен. гос. техн. ун-т. Ленинград, 1990. 18 с.
65. Убайдуллоев М. Н. Усиление статически неопределимых конструкций гидротехнических и мелиоративных сооружений : дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н. Спец: 05.23.07 / Лен. гос. техн. ун-т. Ленинград, 1990. 213 с.
66. Убайдуллоев М. Н. Оценка напряженно-деформированного состояния конструкций после их усиления // Труды НГАСУ. Т.6, № 6 (27). Новосибирск, 2003. С. 148-153.
67. Убайдуллоев М. Н. Влияние пластических деформаций на несущую способность усиливаемых статически неопределимых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. М.: РУДН, 2008. № 4. С. 28-33.
68. Убайдуллоев М. Н., Серазутдинов М.Н. Оценка эффективности усиления нагруженных конструкций с учетом пластических деформаций // Изв. вузов. Строительство. 2009. № 1. С. 106-111.
69. Убайдуллоев М. Н. Расчет статически неопределимых конструкций усиливаемых методом направленного перераспределения жесткостей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2010. № 4. С. 45-51.
70. Голышев А. Б., Кривошеев П. И., Козелецкий П. М. [и др]. Усиление несущих железобетонных конструкций производственных зданий и просадочных оснований. К.: Логос, 2004. 219 с.
71. Голышев А. Б., Ткаченко И. Н. Проектирование усиления несущих железобетонных конструкций производственных зданий и сооружений. К.: Логос, 2001. 172 с.
72. Рекомендации по проектированию усиления железобетонных конструкций зданий и сооружений и сооружений реконструируемых предприятий. Надземные конструкции и сооружения // Харьковский ПромстройНИИпроект, НИИЖБ, М.: Стройиздат, 1992. 191 с.
73. Seismic Behavior of Reinforced Concrete Frame with Split Columns, Z.X. Li // Special Publication, 238, October 1, 2006, Pp. 465-474.
74. Modeling Error of Strength of Short Reinforced Concrete Columns, W. Zhou and H.P. Hong // Structural Journal, May 1, 2000, Pp. 427-435.
75. Бабкин А. В. Прикладная механика сплошных сред. М.: МГТУ, 2006. 520 с.
76. Филин А. П, Прикладная механика твердого деформируемого тела. В 3т. М.: Наука, 1975. Т.12. 832 с.
77. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. В 3т. М.: Наука, 1978. Т. 2. 616 с.
78. Александров А. В, Потапов В. Д., Державин Б. П. Под ред. А.В. Александрова. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов 5-е изд.стер. М.: Высш. шк., 2007. 560 с.
79. Горшков А. Г., Трошин В. Н., Шалашилин В. И. Сопротивление материалов: Учеб. пос. 2-е изд., испр. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 544 с.
80. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1986. 607с.
81. Какюмов Р. А. Сопротивление материалов. Конспект лекций. Казань: КГАСУ, 2010. 170 с.
82. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. 3-е изд. перераб. и доп. К.: Издательство Дельта, 2008. 816 с.
83. Терегулов И. Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. М.: Высш. шк., 1984. 472 с.
84. Тимошенко С. П., Гере Д. Ж.: Механика материалов. Мир, 1976. 672 с.
85. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. Учебник для вузов. 10-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н.З. Баумана., 2001. 592 с.
86. Шулькин Ю. Б. Теория упругих стержневых конструкций. М.: Наука, 1984. 272 с.
87. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.

88. Голованов А. И., Тюленева О. Н., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 391 с.
89. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 511 с.
90. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
91. Розин Л. А. Стержневые элементы, как системы конечных элементов. Л.: Изд. ЛТУ, 1976. 232 с.
92. Розин Л. А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. СПб.: Изд. СПбГТУ, 1998. 428 с.
93. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 344 с.
94. Савин Г. М., Тульгий В. И. Справочник по концентрации напряжений. Киев: Высшая школа, 1976. 412 с.
95. Будин А. Я., Мадатов А. М. Усиление статически неопределимых конструкций // Улучшение судоходных условий на реках и повышение эксплуатационных качеств судоходных и портовых гидротехнических сооружений: Сб. науч. тр. ЛИВТа. Л.: 1986. С.110-122.
96. Будин А. Я. Теоретические основы рациональной эксплуатации и повышения долговечности сельскохозяйственных зданий и сооружений // Проблемы строительства и эксплуатации сооружений агропромышленного комплекса: Сб. науч. тр. ЛСХИ. Л.: 1987. С.4-16.
97. Светлицкий В. А. Строительная механика. Механика стержней. В 2-х томах. Том 1. Статика. М.: Физматлит, 2009. 408 с.
98. Серазутдинов М. Н., Хайруллин Ф. С. Метод расчета криволинейных стержней // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1991. № 5. С. 104-108.
99. Якупов Н. М., Серазутдинов М. Н. Расчет упругих тонкостенных конструкций сложной геометрии. Казань: 1984. 206 с.
100. Демидов С. П. Теория упругости. Учебник для вузов. М.: Высш. школа, 1979. 432 с.
101. Трапезин И. И. Теория кручения и изгиба призматических брусьев. Вариационные методы. Московский авиационный институт, 1977. 77 с.
102. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н., Абрагим Х. А. Вариационный метод расчета стержневых систем при пластических деформациях // Сборник трудов Международной научно-технической и образовательной конференции «Образование и наука - производству». Набережные Челны, 28-31 марта 2010 г. Ч.1, книга 1. КГИЭА, 2010. С.43-46.
103. Серазутдинов М. Н., Абрагим Х. А. Расчет усиливаемых стержневых систем вариационным методом // ВЕМ&FEM-2009. Материалы 23-ей международной конференции «Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов». 28 сентября – 01 октября 2009. Санкт-Петербург, Труды. Том 2. Изд. ООО «НИЦ МОРИНТЕХ», 2009. С. 410-415.
104. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н., Абрагим Х. А. Вариационный метод определения несущей способности усиливаемых конструкций // Материалы второй международной конференции «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела». Казань, Россия, 8-11 декабря 2009 г. Изд. КГУ, 2009. С. 337-339.
105. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н., Абрагим Х. А. Расчет усиливаемых нагруженных конструкций вариационным методом // Изв. вузов. Строительство. 2010. № 7. С. 118-123.
106. Абрагим Х. А.. Методика численного расчета предварительно напряженной стержневой системы. / Сборник материалов международной молодежной научной конференции по естественнонаучным и техническим дисциплинам. Йошкар-Ола, 16-17 апреля 2010 г. Ч.3. С. 128-129.
107. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 566 с.
108. Сливкер В. И. Строительная механика. Вариационные основы. Учебное пособие. М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. 736 с.
109. Астахов И. В. Пространственная устойчивость элементов конструкций из холодногнутых профилей: дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н., Спец.: 05.23.01. СПб, 2006. 123 с.
110. Белый Г. И. О расчете упругопластических тонкостенных стержней по пространственно-деформированной схеме с учетом касательных напряжений и деформации сдвига // Металлические конструкции и испытания сооружений. Л.: 1985. С.10-23.
111. Туснин А. Р. Численный расчет конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля. М.: Изд-во АСВ, 2009. 143 с.
112. Cheng Y., Schafer B. W. Simulation of cold-formed steel beams in local and distortional buckling with applications to the direct strength method // Journal of Constructional Steel Research. Volume 63, Issue 5. 2007. P. 581-590.

113. Rasmussen K. J. R. Experimental investigation of local-overall interaction buckling of stainless steel lipped channel columns // Journal of Constructional Steel Research. Volume 65, Issue 8-9. 2009. P. 1677-1684.
114. Hancock G. J. Compression tests of high strength cold-formed steel channels with buckling interaction // Journal of Constructional Steel Research. Volume 65, Issue 2. 2009. P. 278-289.
115. Лалин В. В., Рыбаков В. А. Конечные элементы для расчета ограждающих конструкций из тонкостенных профилей // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 8. С. 69-80.
116. Лалин В. В., Рыбаков В. А., Морозов С. А. Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 1. С. 53-73.
117. Серазутдинов М. Н. Вариационные соотношения теории тонкостенных стержней открытого профиля // Вестник КГТУ. Казань, 2013. № 5. С. 216 – 222.
118. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н. Упругопластический расчет конструкций усиливаемых без вывода из напряженного состояния // Актуальные проблемы нелинейной механики оболочек. Материалы международного семинара. КГУ, Казань, 2008. С. 108-110.
119. Серазутдинов М. Н., Абрагим Х. А. Несущая способность стержневых элементов конструкций, усиливаемых в напряженном состоянии // Вестник КГТУ. Казань, 2010. № 9. С. 512-518.
120. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н., Абрагим Х. А. Повышение несущей способности усиливаемых нагруженных конструкций // Научно технический журнал «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений». Российский университет дружбы народов, Москва, 2011. С. 23–30.
121. Серазутдинов М. Н., Абрагим Х. А. Определение сил, необходимых для сближения стержней при моделировании усиления конструкций // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного ун-та. 2011. № 3(17). С. 188-193.
122. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н., Абрагим Х. А. Определение несущей способности усиливаемых нагруженных конструкций с учетом монтажных напряжений // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного ун-та. 2011. № 4(18). С. 293-299.
123. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н. Усиление нагруженных стержневых конструкций с учетом влияния ремонтных и монтажных сил // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 1(27). С. 98-105.
124. Убайдуллоев М. Н., Серазутдинов М. Н. Моделирование напряженно-деформированного состояния усиливаемых стержневых систем // Научно технический журнал «Строительная механика инженерных конструкций и сооружений». Российский университет дружбы народов, Москва, 2012. С. 43–51.
125. Убайдуллоев М. Н. Расчет железобетонных конструкций усиливаемых без вывода из напряженного состояния // Научный вестник Воронеж. гос. арх.-строит. ун-та. Строительство и архитектура. № 4 (28), 2012. С. 9-16.
126. Убайдуллоев М.Н. Расчет стержневых конструкций усиливаемых иным материалом / Научно технический журнал «Строительная механика и расчет сооружений». № 1. Москва, 2013. С. 74 – 78.
127. Ата Эль Карим Шозаб Солиман. Рациональное использование стеклопластика для усиления элементов бетонных и железобетонных конструкций: дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н. Спец.: 05.23.01. / Белгород, 2005. 159 с.
128. Суровцев И. С., Потапов Ю. Б., Борисов Ю. М. Усиление железобетонных изгибаемых конструкций при помощи полимерных композиционных материалов // Научный вестник Воронеж. гос. арх.-строит. ун-та. Строительство и архитектура. № 1. 2008. С. 12-22
129. Дьячкова А. А., Кузнецов В. Д. Расчет усиления железобетонных плит углеродными композиционными материалами // Инженерно-строительный журнал. 2009. № 3. С. 25-28.
130. Смердов Д. Н. Оценка несущей способности железобетонных пролетных строений мостов, усиленных композитными материалами: дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н. Спец.: 05.23.01. / Новосибирск, 2010. 159 с.

References

1. Belenia E. I. Issledovanie uprugoplasticheskikh protsessov raboty balok, usilennykh do zagruzheniia i pod nagruzkoi // Issledovaniia po stal'nykh konstruktsiiam. M-L.: Gosstroizdat, 1950. Pp. 161–182. (rus)
2. Donnik G. A. Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie pri svarke sterzhnei sostavnogo nesimmetrichnogo secheniia // Metallicheskie konstruktsii: sb. tr. MISI. M.: 1977. № 36. Pp. 46–53. (rus)
3. Rebrov I.S. Proektirovanie i raschet usileniia stal'nykh balok. L.: LDNTP, 1984. 27 p. (rus)
4. Shepel'skii M.Ia. Vliianie svarochnykh deformatsii na rabotu balok, usilivaemykh pod nagruzkoi // Izv. vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura. 1966. № 2. Pp. 85 – 94. (rus)
5. Kolesnikov V. M. Ob usilenii stal'nykh stropil'nykh ferm pod nagruzkoi // Montazhnye i spetsial'nye raboty v stroitel'stve. 1960. № 2. Pp. 12 – 15. (rus)

6. Kolesnikov V. M. O raschete szhatykh stal'nykh sterzhnei, usilennykh pod nagruzkoi // «Stroitel'noe proizvodstvo». Sb. dokl. na XXII nauch. konf. LSI. L.: 1964. Pp. 8 – 12. (rus)
7. Immerman A. G., Desiatov B. I. Raschet usilennykh pod nagruzkoi szhatykh elementov svarnykh stal'nykh ferm // Metallicheskie konstruksii : sb. tr. MISI. M.: 1970. № 85. Pp. 147-151. (rus)
8. Rebrov I. S. Rabota szhatykh elementov stal'nykh konstruksii, usilennykh pod nagruzkoi. L.: Stroizdat, 1976. 176 p. (rus)
9. Raboldt K. Tragverhalten des nachträglich seitlich abgestützten Druckstabes / K. Raboldt, M. Ast. – Wissenschaftliche Zeitschrift der Ingenieurhochschule Cottbus. 1982. N 4. S.18-28.
10. Lashchenko M. N. Usilenie metallicheskich konstruksii. M.–L.: Gosstroizdat, 1954. 155 p. (rus)
11. Lashchenko M. N. Regulirovanie napriazhenii v metallicheskich konstruksiiakh. M.–L.: Stroizdat, 1966. 190 p. (rus)
12. Lashchenko M. N. Avarii metallicheskich konstruksii zdani i sooruzhenii. L.: Stroizdat, 1969. 182 p. (rus)
13. Lashchenko M. N. Povyshenie nadezhnosti metallicheskich konstruksii zdani i sooruzhenii pri rekonstruksii. L.: Stroizdat, 1987. Pp. 6-92. (rus)
14. Beliaev B. I. Prichiny avarii stal'nykh konstruksii i sposoby ikh ustraneniia. M.: Stroizdat, 1968. Pp. 7-69(rus)
15. Biriulev V.V., Sil'vestrov A.V., Levenson Ia.S. Ob odnom sluchae usileniia stal'nykh ferm pokrytiia // Izv. vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura. 1965. No. 9. Pp. 52 – 58. (rus)
16. Dobrykin I., Simanovskaia B. Usilenie stal'nykh ferm // Promyshlennoe stroitel'stvo i inzhenernye sooruzheniia. 1963. No. 1. 28 p. (rus)
17. Solodar' M. B., Biriulev V. V., Shagimardanov R.M. Usilenie stal'nykh konstruksii glavnogo martenovskogo tsekha // Promyshlennoe stroitel'stvo. 1968. No. 1. Pp. 58 – 63. (rus)
18. Taran V. D. Usilenie svarkoi nagruzhennykh elementov stal'nykh konstruksii // Trudy MNIKh i GP. im. Gubkina, vyp.65 : «Sooruzheniia gazonefteprovodov i konstruksii». Izd-vo Nedra, 1967.Pp. 25 – 32. (rus)
19. Shapiro G. A. O sposobe uvelicheniia nesushchei sposobnosti stal'nykh konstruksii staleplavil'nykh tsekhov // Promyshlennoe stroitel'stvo. 1960. No. 2. Pp.46-49. (rus)
20. Vatin N. I., Ulybin A. V., Ogorodnik V. M. GOST R 53778-2010: obsledovanie inzhenernykh setei i drugie osobennosti novogo normativnogo dokumenta // Magazine of civil engineering. 2011. No. 1. Pp. 5-7. (rus)
21. Ulybin A. V., Vatin N. I. Printsipial'nye otlichiia GOST R 53778-2010 ot starykh normativov po obsledovaniu zdani i sooruzhenii // Gidrotekhnika. 2011. No. 2. Pp. 54. (rus)
22. Rebrov I. S. Ob uchete istorii nagruzheniia v raschete uprugoplasticheskikh sterzhnevnykh sistem / «Metallicheskie konstruksii i ispytaniia sooruzhenii»: mezhvuz. temat. sb. tr. LSI. 1984. Pp. 46-54. (rus)
23. Rebrov I. S. K raschetu usileniia sterzhnevnykh stal'nykh konstruksii // «Metallicheskie konstruksii i ispytaniia sooruzhenii»: Mezhvuz. temat. sb. tr. LSI. 1985. Pp. 24-32. (rus)
24. Rebrov I.S. Usilenie sterzhnevnykh metallicheskich konstruksii. L.: Stroizdat, 1988. 288 p. (rus)
25. Yi Liu, Liam Gannon. Finite element study of steel beams reinforced while under load // Engineering Structures. Volume 31, Issue 11. 2009. Pp. 2630 – 2647.
26. Joakim Wallin, John Heander, Raid Karoum (2011). Strengthening of a steel railway bridge and its impact on the dynamic response to passing trains // Engineering Structures. Volume 33, Issue 2. 2011. Pp. 635 – 646.
27. Astaf'ev D.O. Teoriia i raschet rekonstuiromykh zhelezobetonnykh konstruksii : Diss. of D. Sc. : 05.23.01 / S.-Petersburg, 1995. 360 p. (rus)
28. Bondarenko V. M., Merkulov S. I. Razvitie teorii rekonstruirovannogo zhelezobetona // Problemy obespecheniia bezopasnosti stroitel'nogo fonda Rossii: materialy III Mezhdunarodnykh akademicheskikh chtenii RAASN. Kursk. GTU, 2004. Pp. 59-62. (rus)
29. Bondarenko V. M., Merkulov S. I. K voprosu razvitiia teorii rekonstruirovannogo zhelezobetona // Beton i zhelezobeton. 2004. No. 6. Pp. 12-14. (rus)
30. Elementy teorii rekonstruksii zhelezobetona / Bondarenko V. M., Borovskikh A. V., Markov S. V., Rimshin V. I. Novgorod, Nizhegorod. gos. arkh. un-t, 2002. 190 p. (rus)
31. Bondarenko S. V., Sanzharovskii R. S. Usilenie zhelezobetonnykh konstruksii pri rekonstruksii zdani. M.: Stroizdat, 1990. 352 p. (rus)
32. Usilenie zhelezobetonnykh konstruksii s ispol'zovaniem kompozitsionnykh materialov na osnove uglerodnykh volokon i postnapriagaemykh stendov / Vatin N. I., D'iachkova A. A., Kishinevskaia E. V., Kuznetsov V. D. // Stroiprofil', 2009. No. 4. 20 p. (rus)

33. Guchkin I. S., Bagdov S. G., Artiushin D. V. Proektirovanie usileniia odnoproletnykh zhelezobetonnykh balok podvedeniem promezhutochnoi zhestkoi opory // Regional'naia arkhitektura i stroitel'stvo. Penzenskii gos. un-t arkh. i str.-va. 2009. No. 1. Pp. 82-86. (rus)
34. Guchkin I. S., Pankov A. V. Zhelezobetonnye balki, usilennye kombinirovannoi sistemoi iz stal'nykh elementov // Regional'naia arkhitektura i stroitel'stvo. Penzenskii gos. un-t arkh. i str.-va. 2010. No. 2. Pp. 94-100. (rus)
35. Dvornikov V.M. Prochnost' i deformativnost' vnetsentrenno szhatykh usilennykh pod nagruzeoi zhelezobetonnykh elementov : diss of Ph. D. / Kursk, 2003. 175 p. (rus)
36. Кишиневская Е. В., Ватин Н. И., Кузнецов В. Д. Усиление строительных конструкций с использованием постнапряженного железобетона // Magazine of civil engineering. 2009. No. 3. Pp. 29-32. (rus)
37. Merkulov S. I. Konstruktivnaia bezopasnost' zhelezobetonnykh elementov rekonstruiemykh zdaniy i sooruzhenii: diss of D. Sc., 05.23.01.Orel. 2006. 394 p. (rus)
38. Merkulov S. I., Dvornikov V. M., Tatarenkov A. I. Raschet usilennykh vnetsentrenno szhatykh zhelezobetonnykh konstruktssii s uchetom spetsificheskikh osobennostei ikh raboty // Izvestiia Orlovskogo GTU. 2008. No. 4-20. Pp. 18-23. (rus)
39. Issledovaniia usilennykh zhelezobetonnykh konstruktssii / Merkulov S. I., Dvornikov V. M., Tatarenkov A. I., Merkulov D. S // Izv. vuzov. Stroitel'stvo, 2009. Pp. 123-129. (rus)
40. Merkulov S. I., Povetkin M. S. Experimental studies of fracture toughness of the ruggedized bendable ferroconcrete designs // Scientific herald of the Voronezh state university of architecture and civil engineering. Construction and architecture. 2009. No. 3. Pp. 111-116. (rus)
41. Morozov V. I., Antsygin O. I. Calculation of strengthened reinforced concrete columns with corrosive damages // Prom. i grazhd. str.-vo. 2009. No. 2. Pp. 15-16. (rus)
42. Pankov A. V. Prochnost' i deformativnost' zhelezobetonnykh balok, usilennykh kombinirovannoi sistemoi s razlichnymi konstruktivnymi parametrami: diss of Ph. D., 05.23.01. / Penza, 2011. 169 p. (rus)
43. Rimshin V. I. O nekotorykh voprosakh nesushchei sposobnosti stroitel'nykh konstruktssii, usilennykh narashchivaniem // Vestnik otdeleniia stroitel'nykh nauk. Vyp. 2. M.: 1998. Pp. 329-332. (rus)
44. Rimshin V.I. Povrezhdeniia i metody rascheta usileniia zhelezobetonnykh konstruktssii : avtoref. dis. dokt. tekhn. nauk : 05.23.01 / Belgorod, 2000. 35 p. (rus)
45. Rimshin V.I., Kustikova Iu.O. Mekhanika deformirovaniia i razrusheniia usilennykh zhelezobetonnykh konstruktssii // Izvestiia OrelGTU. Stroitel'stvo. Transport, 2007. No. 3/15 (537). Pp. 53-56. (rus)
46. Usileniia pri rekonstruktssii zdaniy i sooruzhenii. Ustroistvo i raschety usilenii zdaniy pri rekonstruktssii / Sanzharovskii R. S., Astav'ev D. O., Ulitskii V. M., Ziber F. SPb, SPb gos. arkh.-stroit. un-t, 1998. 637 p. (rus)
47. Tatarenkov A.I. Prochnost' i deformativnost' izgibaemykh zhelezobetonnykh konstruktssii, usilennykh pod nagruzkoi: avtoref. dis. ... kand. tekhn. nauk : 05.23.01 / Orel, 2005. 23 p. (rus)
48. Cheryachukin V. V., Guchkin I. S., Pankov A. V. Rafter strengthen the design of reinforced concrete beams of the combined system // Vestnik VolGASU. Ser.: Str.-vo i arkh. 2010. No. 17 (36). Pp. 9-13. (rus)
49. Povetkin M. S. Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie usilennykh pod nagruzkoi zhelezobetonnykh izgibaemykh prednapriazhennykh elementov: diss of D. Sc.: 05.23.01. Kursk, 2009. 213 p. (rus)
50. Duarte M. V. Faria V. J. G. Lucio A. P. R. Strengthening of flat slabs with post-tensioning using anchorages by bonding // Engineering Structures, Volume 33, Issue 6. 2011. Pp. 2025 – 2043.
51. Budin A. Ya., Chekreneva M. V. Usilenie portovykh sooruzhenii. M.: Transport, 1983. 178 p. (rus)
52. Budin, A. Ya. Tonkie podpornye stenki. L.: Stroizdat, 1974. 191 p. (rus)
53. Budin A. Ya. Ekspluatatsiia i dolgovechnost' portovykh gidrotekh-nicheskikh sooruzhenii. M.: Transport, 1977. 318 p. (rus)
54. Budin A. Ya. Tonkie podpornye stenki dlia uslovii Severa. L.: Stroizdat, 1982. 288 p. (rus)
55. Metodicheskie ukazaniia po povysheniiu nesushchei sposobnosti i opredelenie effektivnosti remonta i usileniia portovykh gidrotekhnicheskikh sooruzhenii. L.: Transport, 1982. 52 p. (rus)
56. Metodicheskie ukazaniia po ekspluatatsii i usileniiu pricha'nykh sooruzhenii, imeiushchikh lokal'nye povrezhdeniia. L.: Transport, 1977. 26 p. (rus)
57. Rukovodiashchii tekhnicheskii material. Otsenka effektivnosti re-monta betonnykh i zhelezobetonnykh konstruktssii gidrotekhnicheskikh sooruzhenii: RTM 212.0116-82. (rus)
58. Ubaidulloev M. N. Laboratornye issledovaniia raboty staticheskii neopredelimykh ramnykh konstruktssii, usilivaemykh bez vyvoda iz ekspluatatsii // Povyshenie effektivnosti ekspluatatsii i rekonstruktssii sooruzhenii APK. Sb. nauch. trudov LSKhI. L.: 1989. Pp. 25-29. (rus)

59. Ubaidulloev M. N. *Eksperimental'nye dannye o nesushchei sposobnosti usilivaemykh pod nagruzkoi odnoproletnykh ram // Tezisy dokladov nauchno-proizvodstvennoi konferentsii «Problemy obsledovaniia, ispytaniia, usileniia i rekonstruktsii sooruzhenii». Daugavpils, 1989. Pp. 78-79. (rus)*
60. Ubaidulloev M. N., Kamalov A., Pinne M. *Osobennosti usileniia staticheskii neopredelimykh konstruktsii // Tezisy dokladov k konferentsii molodykh uchenykh i studentov LSKhI. L.: 1990. 146 p. (rus)*
61. Ubaidulloev M. N. *Pereraspredelenie usilii v staticheskii neopredelimykh sistemakh pri vozniknovenii lokal'nykh povrezhdenii // Sovershenstvovaniia metodov stroitel'stva i ekspluatatsii sooruzhenii agropromyshlennogo kompleksa. Sb. nauchnykh trudov. LSKhI. L.: 1988. Pp. 72-76. (rus)*
62. Ubaidulloev M. N. *Otsenka nesushchei sposobnosti staticheskii neopredelimykh konstruktsii, poluchivshikh lokal'nye povrezhdeniia // Trudy mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii po problemam mekhaniki gruntov, fundamentosstroeniia i transportnomu stroitel'stvu. Perm', 2004. Pp. 202-207. (rus)*
63. *Nesushchaia sposobnost' usilivaemykh staticheskii neopredelimykh ramnykh konstruktsii / Budin A. Ya., Chekreneva M. V., Korezina T. V., Ubaidulloev M. N. // Povyshenie effektivnosti ekspluatatsii i rekonstruktsii sooruzhenii APK. Sb. nauchnykh trudov LSKhI. L.: 1989. Pp. 5 – 14. (rus)*
64. Ubaidulloev M. N. *Usilenie staticheskii neopredelimykh konstruktsii gidrotekhnicheskikh i meliorativnykh sooruzhenii : avtoreferat dis. ... kandidata tekhnicheskikh nauk : 05.23.07 / Len. gos. tekhn. un-t. Leningrad, 1990. 18 p. (rus)*
65. Ubaidulloev Madzhid Nasrievich. *Usilenie staticheskii neopredelimykh konstruktsii gidrotekhnicheskikh i meliorativnykh sooruzhenii: diss of Ph. D.: 05.23.07 / Leningrad, 1990. 213 p. (rus)*
66. Ubaidulloev M. N. *Otsenka napriazhenno-deformirovannogo sostoiianiia konstruktsii posle ikh usileniia // Trudy NGASU. Vol. 6, No. 6 (27). Novosibirsk, 2003. Pp. 148-153. (rus)*
67. Ubaidulloev M. N. *On definition of bearing capacity of strengthened statically indeterminable structures with taking into account plastic deformation // Structural mechanics of engineering constructions and buildings. 2008. No. 4. Pp. 28-33. (rus)*
68. Ubaidulloev M. N., Serazutdinov M. N. *Otsenka effektivnosti usileniia nagruzhennykh konstruktsii s uchetom plasticheskikh deformatsii // Izv. vuzov. Stroitel'stvo. 2009. No. 1. Pp. 106-111. (rus)*
69. Ubaidulloev M. N. *Calculation of statically indeterminable structures strengthened by the method of redistribution of stiffness // Structural mechanics of engineering constructions and buildings. 2010. No. 4. Pp. 45-51. (rus)*
70. Golyshev A.B., Krivosheev P.I., Kozeletskii P.M. [et. al.] *Usilenie nesushchikh zhelezobetonnykh konstruktsii proizvodstvennykh zdani i prosadochnykh osnovanii. K.: Logos, 2004. 219 p. (rus)*
71. Golyshev A.B., Tkachenko I.N. *Proektirovanie usilenii nesushchikh zhelezobetonnykh konstruktsii proizvodstvennykh zdani i sooruzhenii. K.: Logos, 2001. 172 p. (rus)*
72. *Rekomendatsii po proektirovaniu usileniia zhelezobetonnykh konstruktsii zdani i sooruzhenii i sooruzhenii rekonstruiemykh predpriatii. Nadzemnye konstruktsii i sooruzheniia // Khar'kovskii PromstroinIlproekt, NIIZhB, M.: Stroiizdat, 1992. 191 p. (rus)*
73. *Seismic Behavior of Reinforced Concrete Frame with Split Columns, Z.X. Li // Special Publication, 238, October 1, 2006, Pp. 465-474.*
74. *Modeling Error of Strength of Short Reinforced Concrete Columns, W. Zhou and H.P. Hong // Structural Journal, May 1, 2000, Pp. 427-435.*
75. Babkin A. V. *Prikladnaia mekhanika sploshnykh sred. M.: MGTU, 2006. 520 p. (rus)*
76. Filin A. P. *Prikladnaia mekhanika tverdogo deformiruemogo tela. V 3t. M.: Nauka, 1975. Vol. 12. 832 p. (rus)*
77. Filin A. P. *Prikladnaia mekhanika tverdogo deformiruemogo tela. V 3t. M.: Nauka, 1978. Vol. 2. 616 p. (rus)*
78. Aleksandrov A. V., Potapov V. D., Derzhavin B. P. *Soprotivlenie materialov: Ucheb. dlia vuzov 5-e izd.ster. M.: Vyssh. shk., 2007. 560 p. (rus)*
79. Gorshkov A. G., Troshin V. N., Shalashilin V. I. *Soprotivlenie materialov: Ucheb. pos. 2-e izd., ispr. M.: FIZMATLIT, 2002. 544 p. (rus)*
80. Darkov A. V., Shaposhnikov N. N. *Stroitel'naia mekhanika. M.: Vysshiaia shkola, 1986. 607 p. (rus)*
81. Kaiumov R. A. *Soprotivlenie materialov. Konspekt lektsii. Kazan': KGASU, 2010. 170 p. (rus)*
82. Pisarenko G. S., Iakovlev A. P., Matveev V. V. *Spravochnik po soprotivleniiu materialov. 3-e izd. pererab. i dop. K.: Izdatel'stvo Del'ta, 2008. 816 p. (rus)*
83. Teregulov I. G. *Soprotivlenie materialov i osnovy teorii uprugosti i plastichnosti. M.: Vyssh. shk., 1984. 472 p. (rus)*

84. Timoshenko S. P., DZh. Gere. *Mekhanika materialov*. Mir, 1976. 672 p. (rus)
85. Feodos'ev V. I. *Soprotivlenie materialov. Uchebnik dlia vuzov. 10-e izd., pererab. i dop.* M.: Izd-vo MGTU im. N.Z. Bauman., 2001. 592 p. (rus)
86. Shul'kin Iu. B. *Teoriia uprugikh sterzhnevnykh konstruksii*. M.: Nauka, 1984. 272 p. (rus)
87. Bate K., Vilson E. *Chislennye metody analiza i metod konechnykh elementov*. M.: Stroizdat, 1982. 448 p. (rus)
88. Golovanov A. I., Tiuleneva O. N., Shigabutdinov A. F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksii*. M.: FIZMATLIT, 2006. 391 p. (rus)
89. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike*. M.: Mir, 1975. 511 p. (rus)
90. Zenkevich O., Morgan K. *Konechnye elementy i approksimatsiia*. M.: Mir, 1986. 318 p. (rus)
91. Rozin L. A. *Sterzhnevye elementy, kak sistemy konechnykh elementov*. L.: Izd. LTU, 1976. 232 p. (rus)
92. Rozin L. A. *Zadachi teorii uprugosti i chislennye metody ikh resheniia*. SPb.: Izd. SPbGTU, 1998. 428 p. (rus)
93. Postnov V. A. *Chislennye metody rascheta sudovykh konstruksii*. L.: Sudostroenie, 1974. 344 p. (rus)
94. Savin G. M., Tul'gii V. I. *Spravochnik po kontsentratsii napriazhenii*. Kiev: Vysshaia shkola, 1976. 412 p. (rus)
95. Budin A. Ya., Madatov A. M. *Usilenie staticheskii neopredelimykh konstruksii // Uluchshenie sudokhodnykh uslovii na rekakh i povyshenie ekspluatatsionnykh kachestv sudokhodnykh i portovykh gid-rotekhnicheskikh sooruzhenii: Sb. nauch. tr. LIVTa. L.: 1986. Pp. 110-122.* (rus)
96. Budin A. Ya. *Teoreticheskie osnovy ratsional'noi ekspluatatsii i povysheniia dolgovechnosti sel'skokhoziaistvennykh zdani i sooruzhenii // Problemy stroitel'stva i ekspluatatsii sooruzhenii agropromyshlennogo kompleksa: Sb. nauch. tr. LSKhI. L.: 1987. Pp. 4-16.* (rus)
97. Svetlitskii V. A. *Stroitel'naia mekhanika. Mekhanika sterzhnei. V 2-kh tomakh. Tom 1. Statika*. M.: Fizmatlit, 2009. 408 p. (rus)
98. Serazutdinov M.N., Khairullin F.S. *Metod rascheta krivolineinykh sterzhnei // Izv. vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura. 1991. No. 5. Pp. 104-108.* (rus)
99. Iakupov N. M., Serazutdinov M. N. *Raschet uprugikh tonkostennykh konstruksii slozhnoi geometrii*. Kazan', 1984. 206 p. (rus)
100. Demidov S. P. *Teoriia uprugosti. Uchebnik dlia vuzov*. M.: Vyssh. shkola, 1979. 432 p. (rus)
101. Trapezin I. I. *Teoriia kruchenii i izgiba prizmaticheskikh brus'ev. Variatsionnye metody*. Moskovskii aviatsionnyi institut, 1977. 77 p. (rus)
102. Serazutdinov M. N., Ubaidulloev M. N., Abragim Kh. A. *Variatsionnyi metod rascheta sterzhnevnykh sistem pri plasticheskikh deformatsiakh // Sbornik trudov Mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi i obrazovatel'noi konferentsii «Obrazovanie i nauka - proizvodstvu». Naberezhnye Chelny, 28-31 marta 2010 g. Ch.1, kniga 1. KGIEA, 2010. Pp. 43-46.* (rus)
103. Serazutdinov M. N., Abragim Kh. A. *Raschet usilivaemykh sterzhnevnykh sistem variatsionnym metodom // BEM&FEM-2009. Materialy 23-ei mezhdunarodnoi konferentsii «Matematicheskoe modelirovanie v mekhanike deformiruemykh tel i konstruksii. Metody granichnykh i konechnykh elementov». 28 sentiabria – 01 oktiabria 2009. Sankt-Peterburg, Trudy. Tom 2. Izd. OOO «NITs MORINTEKH», 2009. Pp. 410-415.* (rus)
104. Serazutdinov M.N., Ubaidulloev M.N., Abragim Kh.A. *Variatsionnyi metod opredeleniia nesushchei sposobnosti usilivaemykh konstruksii // Materialy vtoroi mezhdunarodnoi konferentsii «Problemy nelineinoi mekhaniki deformiruемого tverdogo tela». Kazan', Rossiia, 8-11 dekabria 2009 g. Izd. KGU, 2009. Pp. 337-339.* (rus)
105. Serazutdinov M. N., Ubaidulloev M. N., Abragim Kh. A. *Raschet usilivaemykh nagruzhennykh konstruksii variatsionnym metodom // Izv. vuzov. Stroitel'stvo. 2010. No. 7. Pp. 118-123.* (rus)
106. Abragim Kh. A. *Metodika chislennogo rascheta predvaritel'no napriazhennoi sterzhnevoi sistemy. / Sbornik materialov mezhdunarodnoi molodezhnoi nauchnoi konferentsii po estestvennonauchnym i tekhnicheskim distsiplinam. Ioshkar-Ola, 16-17 apreliia 2010 g. Ch.3. Pp. 128-129.* (rus)
107. Vlasov V. Z. *Tonkostennye uprugie sterzhni*. M.: Fizmatgiz, 1959. 566 p. (rus)
108. Slivker V. I. *Stroitel'naia mekhanika. Variatsionnye osnovy. Uchebnoe posobie*. M.: Izdatel'stvo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2005. 736 p. (rus)
109. Astakhov I. V. *Prostranstvennaia ustoichivost' elementov konstruksii iz kholodnogutykh profilei : dis. ... na soisk. uch. st. kand. tekhn. nauk / SPb, 2006. 123 p.* (rus)
110. Belyi G. I. *O rachete uprugoplasticheskikh tonkostennykh sterzhnei po prostranstvenno-deformirovannoi skheme s uchetom kasatel'nykh napriazhenii i deformatsii sdviga // Metallicheskie konstruksii i ispytaniia sooruzhenii. L.: 1985. Pp.10-23.* (rus)

111. Tusnin A. R. *Chislennyi raschet konstruksii iz tonkostennykh sterzhnei otkrytogo profilia*. M.: Izd-vo ASV, 2009. 143 p. (rus)
112. Cheng Y., Schafer B. W. Simulation of cold-formed steel beams in local and distortional buckling with applications to the direct strength method // *Journal of Constructional Steel Research*. Volume 63, Issue 5. 2007. Pp. 581-590.
113. Rasmussen K. J. R. Experimental investigation of local-overall interaction buckling of stainless steel lipped channel columns // *Journal of Constructional Steel Research*. Volume 65, Issue 8-9. 2009. Pp. 1677-1684.
114. Hancock G. J. Compression tests of high strength cold-formed steel channels with buckling interaction // *Journal of Constructional Steel Research*. Volume 65, Issue 2. 2009. Pp. 278-289.
115. Lalin V. V., Rybakov V. A. *Konechnye elementy dlia rascheta ograzhdaiushchikh konstruksii iz tonkostennykh profilei* // *Magazine of civil engineering*. 2011. No. 8. Pp. 69-80. (rus)
116. Lalin V. V., Rybakov V. A., Morozov S. A. The finite elements research for calculation of thin-walled bar systems // *Magazine of civil engineering*. 2012. No. 1. Pp. 53-73. (rus)
117. Serazutdinov, M.N. *Variatsionnye sootnosheniia teorii tonkostennykh sterzhnei otkrytogo profilia* // *Vestnik KGTU. Kazan'*, 2013. No. 5. Pp. 216 – 222. (rus)
118. Serazutdinov M. N., Ubaidulloev M. N. *Uprugoplasticheskii raschet konstruksii usilivaemykh bez vyvoda iz napriazhennogo sostoiianiia* // *Aktual'nye problemy nelineinnoi mekhaniki obolochek. Materialy mezhdunarodnogo seminara. KGU, Kazan'*, 2008. Pp. 108-110. (rus)
119. Serazutdinov M. N., Abragim Kh. A. *Nesushchaia sposobnost' sterzhnevyykh elementov konstruksii, usilivaemykh v napriazhennom sostoianii* // *Vestnik KGTU. Kazan'*, 2010. No. 9. Pp. 512-518. (rus)
120. Serazutdinov M. N., Ubaidulloev M. N., Abragim Kh. A. *Povyshenie nesushchei sposobnosti usilivaemykh nagruzhennykh konstruksii* // *Nauchno tekhnicheskii zhurnal «Stroitel'naia mekhanika inzhenernykh konstruksii i sooruzhenii»*. Rossiiskii universitet druzhby narodov, Moskva, 2011. Pp. 23–30. (rus)
121. Serazutdinov M. N., Abragim Kh. A. *Opreделение sil, neobkhodimyykh dlia sblizheniia sterzhnei pri modelirovanii usileniia konstruksii* // *Izvestiia Kazanskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo un-ta*. 2011. No. 3(17). Pp. 188-193. (rus)
122. Serazutdinov M. N., Ubaidulloev M. N., Abragim Kh. A. *Opreделение nesushchei sposobnosti usilivaemykh nagruzhennykh konstruksii s uchetom montazhnykh napriazhenii* // *Izvestiia Kazanskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo un-ta*. 2011. No. 4(18). Pp. 293-299. (rus)
123. Serazutdinov M. N., Ubaydulloyev M. N. Strengthening of the beam structures taking into account repair and mounting forces influence // *Magazine of civil engineering*. 2012. No. 1(27). Pp. 98-105. (rus)
124. Ubaydulloyev M. N., Serazutdinov M. N. *Modelirovanie napriazhenno-deformirovannogo sostoiianiia usilivaemykh sterzhnevyykh sistem* // *Nauchno tekhnicheskii zhurnal «Stroitel'naia mekhanika inzhenernykh konstruksii i sooruzhenii»*. Rossiiskii universitet druzhby narodov, Moskva, 2012. Pp. 43–51. (rus)
125. Ubaydulloyev M. N. Calculation of ferroconcrete constructions strengthened by keeping stress conditions // *Scientific herald of the Voronezh state university of architecture and civil engineering. Construction and Architecture*. No. 4 (28), 2012. Pp. 9-16. (rus)
126. Ubaydulloyev M. N. *Raschet sterzhnevyykh konstruksii usilivaemykh inym materialom* / *Nauchno tekhnicheskii zhurnal «Stroitel'naia mekhanika i raschet sooruzhenii»*. № 1. Moskva, 2013. Pp. 74 – 78. (rus)
127. Ata El' Karim Shoeab Soliman. *Ratsional'noe ispol'zovanie stekloplastika dlia usileniia elementov betonnykh i zhelezobetonnykh konstruksii* : diss. of Ph. D. / Belgorod., 2005. 159 p. (rus)
128. Surovtsev I. S., Potapov Y. B., Borisov Y. M. Durability and deformability of reinforced concrete bending constructions strengtened by polimeric composites // *Scientific herald of the Voronezh state university of architecture and civil engineering. Construction and Architecture*. No. 1. 2008. Pp. 12-22. (rus)
129. D'iachkova A. A., Kuznetsov V. D. *Raschet usileniia zhelezobetonnykh plit uglerodnymi kompozitsionnymi materialami* // *Magazine of civil engineering*. 2009. No. 3. Pp. 25-28. (rus)
130. Smerdov D. N. *Otsenka nesushchei sposobnosti zhelezobetonnykh proletnykh stroenii mostov, usilennykh kompozitnymi materialami*: diss. of Ph. D: 05.23.11. / Novosibirsk, 2010. 159 p. (rus)