

Напряженно-деформированное состояние элементов каркасных сооружений из тонкостенных стержней

The stress-strain state of frame constructions' elements from thin-walled cores

к.т.н., ассистент Рыбаков Владимир Александрович
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
fishermanoff@mail.ru
Санкт-Петербург
Российская Федерация

Ph. D., Assistant Vladimir Aleksandrovich Rybakov
Saint-Petersburg State Polytechnical University
fishermanoff@mail.ru
Saint-Petersburg
Russian Federation

старший преподаватель Гамаюнова Ольга Сергеевна
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
gamayunova@inbox.ru
Санкт-Петербург
Российская Федерация

Senior lecturer Olga Sergeevna Gamayunova
Saint-Petersburg State Polytechnical University
gamayunova@inbox.ru
Saint-Petersburg
Russian Federation

Ключевые слова: тонкостенный стержень, депланация, бимомент, стесненное кручение, метод конечных элементов, деформация сдвига; коэффициент влияния формы сечения.

Данная статья посвящена обзору особенностей и проблем анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) в элементах тонкостенных каркасных конструкций открытого и замкнутого профилей, а также некоторых специфических эффектах их работы (депланация поперечного сечения, «бимоментное» распределение нормальных напряжений по сечению и др.). Каркасные конструкции и сооружения данного типа на сегодняшний день открывают перспективное направление развития строительства в России и могут быть использованы, в частности, при строительстве уникальных зданий и сооружений гражданского назначения.

В статье показана на конкретных примерах неприменимость гипотезы плоских сечений при анализе НДС тонкостенных стержней.

Предложено использование полусдвиговой теории Сливкера В. И. в качестве теории, позволяющей применять единый алгоритм при расчете тонкостенных конструкций из стержней открытого, замкнутого и комбинированного профилей, что является важным при использовании метода конечных элементов и современных информационных технологий.

Key words: thin-walled beam, warping, bimoment, restrained torsion, finite-element method, deformation of shear, factor of cross-section influence.

This article provides an overview of features and problems concerning analysis of stress-strain state (SSS) in elements of thin-frame structures both open and closed sections; as well as some of the specific effects of their work (warping of the cross-section, "bi-moment" distribution of the normal stress on the cross section, etc.). Nowadays frame construction and structures of this type offer a promising direction of development of civil engineering in Russia and can be used in particular in the construction of unique civil buildings and structures.

The inapplicability of the plane sections hypothesis for the analysis of thin-frame structures SSS is determined by specific examples in the article.

The V.I. Slivker's half-shear theory is proposed to be used that applies a single algorithm in the calculation of thin-frame structures of open, closed and combined profiles, which is important when using the finite element method and modern information technology.

Введение

В последние годы в России динамично развивается металлургия и наблюдается широкое применение металлоконструкций в современном строительстве. Металлические конструкции демонстрируют себя как универсальные, прочные, но легкие, и, соответственно, быстровозводимые, чему строительные компании придают огромное значение. В целях снижения сроков строительства, строительные компании стараются минимизировать объем «мокрых» работ и переходят на использование металлических конструкций.

Особое место в строительной индустрии занимают легкие стальные тонкостенные конструкции (ЛСТК), имеющие ряд технологических и эксплуатационных достоинств (легкость, быстровозводимость и т.д.) [76].

Однако столь важное свойство, как легкость может заметно сказаться на несущей способности конструкции. Поэтому легкие стальные тонкостенные конструкции перед их внедрением в строительство должны быть подвергнуты тщательному анализу по несущей способности.

Однако, несмотря на столь широкую распространенность подобных конструкций в России, на сегодняшний день имеются существенные недостатки нормативной, методической и расчетно-вычислительной баз по расчету ЛСТК.

Теории расчета, основанные на гипотезе плоских сечений, оказываются неприменимы к тонкостенным стержням ввиду малой их толщины и несовпадения центров тяжести и изгиба.

Для решения инженерных задач расчета элементов тонкостенных конструкций можно выделить 2 группы способов расчета: основанные на оболочечном моделировании и на стержневом.

Первая группа способов связана с представлением тонкостенного стержня в виде оболочки и дальнейшем численном расчете, как правило, с помощью метода конечных элементов, в программных комплексах SCAD, Lira, SOFiSTiK и т.д. [69, 34, 35, 90, 91, 74, 87 и др.]. Такие способы расчета являются достаточно точными, но весьма трудоемкими в инженерно-конструкторской деятельности, особенно с точки зрения комплексного расчета конструкции.

Во второй группе способов можно выделить аналитические и численные методы расчета тонкостенных стержней, связанные с введением дополнительной «седьмой» степени свободы и соответствующего силового фактора - бимомента [2, 3, 83, 84 и многие др].

Следует отметить, что в инженерной практике бимомент B_ω является важной характеристикой, поскольку он напрямую влияет на нормальные напряжения σ :

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{B_\omega}{I_\omega} \omega. \quad (1)$$

где N , M_y , M_z – внутренние усилия (соответственно продольная сила и изгибающие моменты относительно осей y и z - рисунок 13); A, I_z, I_y, I_ω – геометрические характеристики поперечного сечения (соответственно площадь, моменты инерции: относительно осей y и z и секториальный); ω – секториальная координата.

Как известно, нормальные напряжения относятся к первой группе предельного состояния конструкции, нормируются строительными нормами, отвечают за прочность и устойчивость конструкции и, соответственно, нуждаются в точном вычислении.

Также следует отметить, что в новом своде правил «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*» [83], введенном в действие с 20 мая 2011г. бимомент как силовой фактор фигурирует наравне с остальными силовыми факторами: формула (43) для поперечно-изгибаемых элементов сплошного сечения; формулы (105) и (106) – для элементов, воспринимающих продольную силу с изгибом.

$$\frac{M_y}{I_y R_y \gamma_c} z \pm \frac{M_z}{I_z R_y \gamma_c} y \pm \frac{B_\omega \omega}{I_\omega R_y \gamma_c} \leq 1 \quad (2)$$

где R_y – предел текучести стали; γ_c – коэффициент условия работы;

Формулы (43), (105) и (106) свода правил [83] по своей сути являются модификацией формулы (1), приведенной выше.

Согласно теоретическим и экспериментальным исследованиям [16, 2, 5, 83, 70, 3 и др.], в тонкостенных конструкциях, находящихся в условиях изгибного кручения, составляющая нормальных напряжений от бимоента может значительно превышать составляющую от изгибающего момента, а влияние касательных напряжений на напряженно-деформированное состояние мало по сравнению с влиянием нормальных напряжений.

Первые попытки решения задачи об изгибе стержней были произведены в XV веке Леонардо да Винчи (1452-1519), исследовавшего данное явление и предположившего, что прочность балок, опертых обоими концами, изменяется в обратном отношении к длине и в прямом отношении к ширине [80].

В дальнейшем, на протяжении XVI-XIX веков теорией изгиба стержней занимались Галилео Галилей (1564-1642), Эдм Мариотт (1620-1684), Яков Бернулли (1654-1705), Леонард Эйлер (1707-1783), Антуан Паран (1666-1716), Луи Мари Анри Навье (1666-1716), Жан Виктор Понселе (1788-1867), Софи Жермен (1776-1831), Симеон Дени Пуассон (1781-1840), Барре де Сен-Венан (1796-1886), Д.И. Журавский (1821-1891), Отто Христиан Мор (1835-1918), совершенствуя эту теорию, учитывая все больше и больше факторов и неуклонно своими исследованиями стремясь к точному результату [80].

Однако все они исследовали стержни, толщина стенок или контура которых сопоставима с размерами поперечного сечения, т.е. не являющиеся тонкостенными.

В 1855 г. Сен-Венаном разработана теория кручения призматического стержня. Было установлено, что для некруглого стержня при наличии связей, мешающих искажению сечения, возникает изгибное или стесненное кручение, при котором в элементе возникают дополнительные нормальные напряжения. Впоследствии подобное явление было замечено в 1909 г. Бахом

Огромный вклад в развитие теории тонкостенных стержней открытого профиля внес Власов В. З. [22, 23, 24], считающийся, по сути, основоположником данной теории. В эти же годы Уманским А. А. была создана теория тонкостенных стержней открытого профиля [93].

Немалый вклад в развитие теории устойчивости тонкостенных стержней внес С.П. Тимошенко [89, 90].

Теории Власова В. З. и Уманского А. А. продолжали и развивали в своих трудах на протяжении последних 70 лет Лукаш П. А., Кузьмин Н. А., Милейковский И. Е. [3], Бейлин Е. А. [7, 8, 9], Александров В. Г. [4], Анучин А. П. [6], Бычков Д. В., Мрошинский А. К. [14, 15, 16], Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г. [30], Горбунов Б. Н., Стрельбицкая А. И. [26], Постнов В. А., Хархурим И. Я. [73, 74], Белый Г. И. [2, 11, 12], Гуркова М. [28], Туснин А. Р. [92], Синельщиков А. В. [79], Ветюков Ю. М. [20, 21], Юзиков В. П. [103], Оробей В. Ф. [66], Сурьянинов Н. Г. [66, 84], Лимаренко А. М. [66, 59], Самофалов М. [105], Хайруллин Ф. С. [94], Чернов С. А. [95], Мельников Б. Е., Семенов А. С. [101] и другие.

Следует отметить, что использование двух различных теорий (открытого и замкнутого профилей) является крайне неудобным с точки зрения унификации расчетов систем тонкостенных конструкций.

В 2005 г. **Сливкер В. И.** [80] предложил **полусдвиговую теорию**, учитывающую часть деформаций сдвига в срединной поверхности стенок стержней, вызванных действием секториальных сил.

Теория В.И. Сливкера, по сравнению с теорией В.З. Власова, имеет ряд достоинств:

1) Полусдвиговая теория подходит для стержней как открытого, так и замкнутого (а также открыто-замкнутого и многоконтурного) профилей ввиду схожести дифференциальных уравнений по теориям В.И. Сливкера и А.А. Уманского, что дает возможность использования единой расчетной схемы в комбинированных конструкциях из открытых и замкнутых профилей;

2) Повышается точность вычисления вследствие учета части деформации сдвига.

Однако аналитические решения данной теории являются сложными либо невозможными **для расчета систем тонкостенных стержней** и возникает необходимость использования численных методов расчета, например, метода конечных элементов (далее - МКЭ).

В настоящее время ни один из численных методов расчета для полусдвиговой теории не реализован.

Данное обстоятельство свидетельствует об актуальности темы работы.

1. Понятие тонкостенного стержня, классификация

Экспериментально и теоретически установлено, что возможность применения того или иного метода расчета конструкции зависит от соотношения размеров в каждом ее элементе. Поэтому в строительной механике по геометрическому признаку все элементы расчетных моделей традиционно классифицируются на три типа [40, 76]:

1. Стержень (рисунок 1.1, а) – прямолинейный объект, у которого один из размеров намного больше двух других. Т.е. два размера (b и h) находятся в пределах одного порядка, а третий (l) находится в пределах другого, большего, порядка: $b \ll l$ и $h \ll l$.

Мерой порядка в строительной механике обычно служит число 10: два размера (в данном случае b и h) имеют один порядок, если их отношение лежит в пределах $0,1 < b/h < 10$.

Основными характеристиками стержня являются его **ось** (геометрическая форма оси) и **поперечное сечение** (геометрические характеристики профиля) [4].

Частным видом стержня является балка – прямолинейный стержень, работающий на поперечный изгиб.

2. Оболочка (рисунок 1, б) – объект, у которого один из размеров значительно меньше двух других. Т.е. два размера (b и l) находятся в пределах одного порядка, а третий (h) находится в пределах другого (меньшего) порядка: $b \gg h$ и $l \gg h$. В расчетной схеме оболочку представляют срединной поверхностью (поверхностью, расположенной посередине толщины) и толщиной.

Частным случаем оболочки являются пластина – оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость (рисунок 1, в).

3. Трехмерное тело (рисунок 1, г) – объект, у которого все три габарита соизмеримы, т. е. находятся в пределах одного порядка.

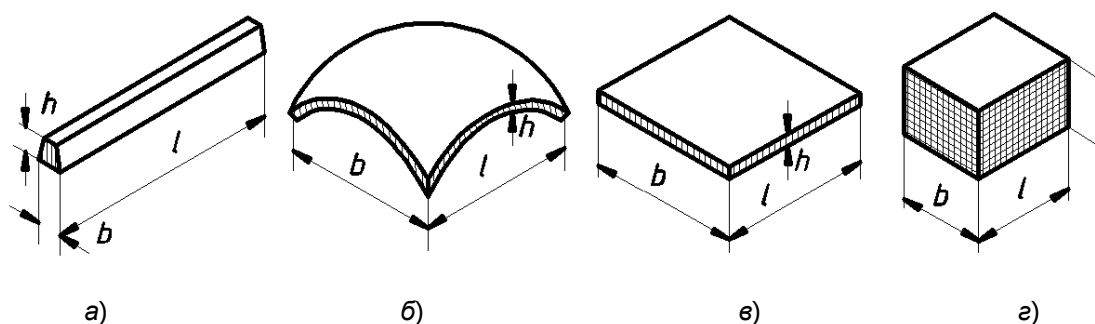


Рисунок 1. Основные виды расчетных элементов:
а) – стержень; б) – оболочка; в) – пластина; г) – твердое тело

Приведенная классификация является условной. Тем не менее, она позволяет установить, какой метод для данного тела способен дать достоверные результаты расчета.

Существует еще и четвертый, особый, вид элемента – так называемый **тонкостенный стержень** [51, 24, 76 и др.].

В строительной механике тонкостенным стержнем (рисунок 1) называется брус призматической или цилиндрической формы, у которого все три измерения выражаются величинами разных порядков ($t \ll b$ и $t \ll h$). Толщина стенок такого стержня значительно меньше размеров контура поперечного сечения, а размеры контура значительно меньше длины стержня ($b \ll l$ и $h \ll l$).

Все тонкостенные стержни можно разделить на 2 категории:

1. стержни замкнутого (закрытого) профиля (рисунок 2);
2. стержни незамкнутого (открытого) профиля (рисунки 3-4).

К стержням первой категории относятся профили квадратного, прямоугольного и круглого сечения.

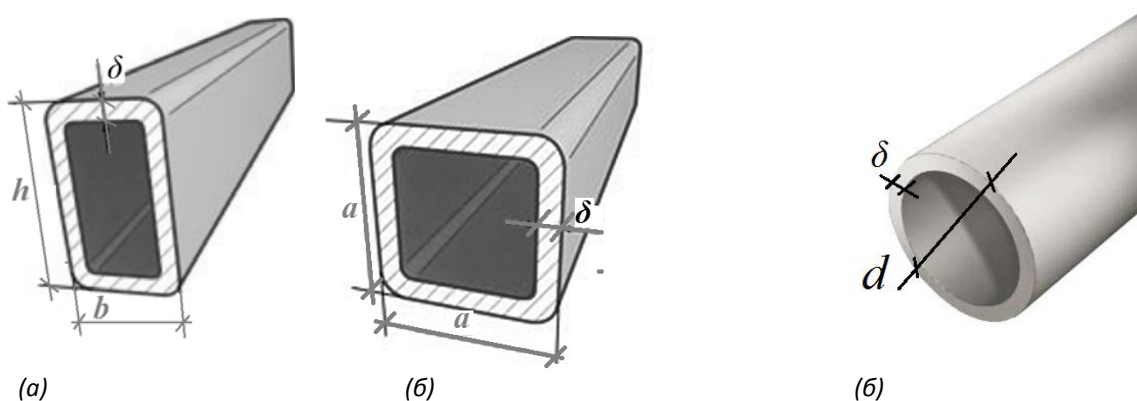
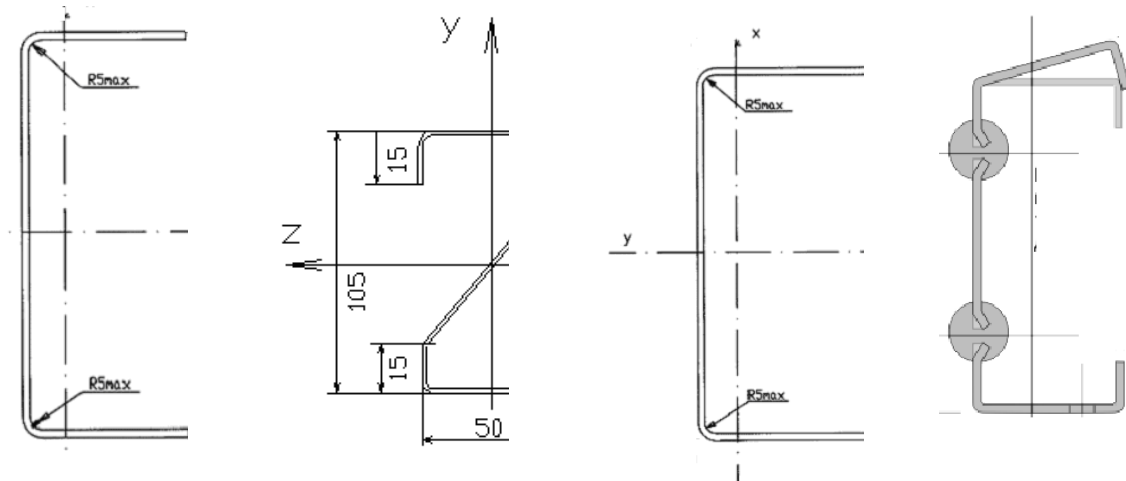


Рисунок 2. Замкнутые профили:
а) – квадратный, б) – прямоугольный, в) круглого сечения

Такие профили, как правило, являются прокатными либо горячедеформированными, толщина их варьируется от 2 до 12мм, в зависимости от габаритов сечения.



а)
швеллеровый
(направляющий)
профиль

б)
z-образный профиль

в)
С-образный
профиль

г)
Е-образный
профиль

Рисунок 3. Основные виды тонкостенных холодногнутых профилей

К профилям квадратного и круглого типа применимы обычные теории и методики расчета, основанные на гипотезе плоских сечений [40, 29]. В тонкостенных стержнях же прямоугольного профиля при определенном соотношении толщины и высоты гипотеза плоских сечений вносит в расчет существенную погрешность [93, 30].

Также распространенными в строительной практике являются открытые профили, к которым принадлежат профили двутаврового, швеллерового, уголкового, z-образного и Е-образного и других очертаний. К незамкнутым профилям относятся такие профили, как швеллер, двутавр, уголкового

Кроме того, холодногнутые профили, в зависимости от «сплошности», стенки бывают: перфорированные (рисунок 4, а) и с отсутствием перфорации (рисунок 4, б).

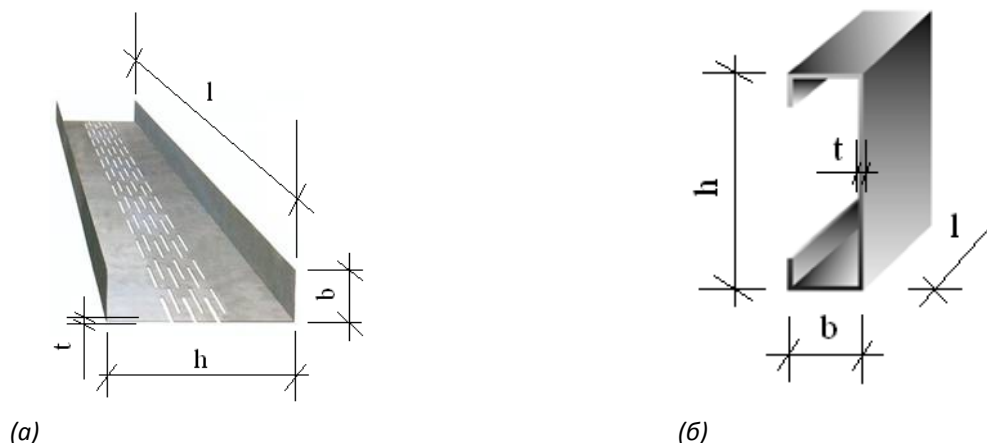


Рисунок 4. Тонкостенный профиль: а) – перфорированный, б) – без перфорации

Далее рассмотрим области применения тонкостенных холодногнутых неперфорированных профилей, а также особенности напряженно-деформированного состояния и известные теории и методики их расчета.

2. Преимущества и области применения легких стальных тонкостенных конструкций

Строительные конструкции, состоящие из тонкостенных стержней, носят название **легкие стальные тонкостенные конструкции** [34, 50, 76, 2, 17, 18, 5, 64 и др.] – рисунок 5.

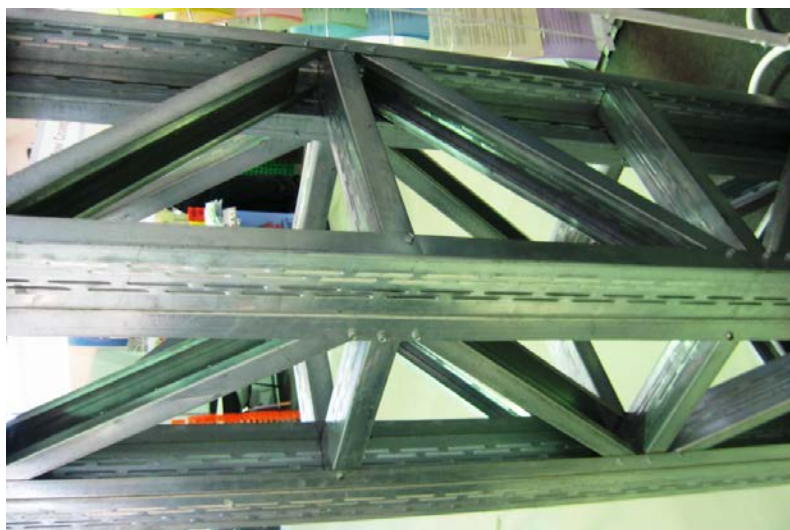


Рисунок 5. тонкостенная конструкция (из профилей с перфорацией)

К основным достоинствам способа строительства с использованием ЛСТК можно отнести следующие:

1. Нет необходимости устраивать массивные железобетонные фундаменты, заглубленные ниже глубины промерзания грунта. Для быстровозводимых сооружений облегченных строительных конструкций обычно требуется фундамент мелкого заложения (монолитная плита), свайный или винтовой фундамент.
2. Сборка каркаса строительного сооружения благодаря легкости и точным, размерам профилей является относительно простой и быстрой.
3. Отсутствие необходимости применения кранов или грузоподъемных механизмов на всех этапах установки каркаса стен, кровли, перегородок.

4. Многовариантность фасадных систем (облицовочный кирпич, виниловый или металлический сайдинг, имитация под искусственный или натуральный камень, деревянная вагонка или «блок-хаус», профлисты с полимерным покрытием и другие современные фасадные материалы) или систем внешней отделки стен здания.

5. Машиностроительная точность размеров внутренних стен, перегородок и потолков до минимума сводит затраты времени и материалов на отделочные работы.

6. Отсутствие «мокрых» процессов позволяет вести работы круглогодично без остановки строительного процесса.

8. Применение ЛСТК позволяет свести до минимума неперерабатываемые отходы, а также обеспечить чистоту на строительной площадке, не нанося ущерба окружающей среде.

9. Возможность эффективного ремонта и реконструкции.

10. Широкие возможности для архитектурных решений и проектов. В качестве комплексной строительной системы ЛСТК могут применяться для возведения малоэтажных зданий высотой до четырех этажей. На основе ЛСТК можно возводить быстрособираемые модульные дома.

К традиционным и перспективным направлениям применения в строительстве конструкций данного типа можно отнести следующие:

1. Наружные ограждающие конструкции в сборно-монолитном строительстве (термопанели)

Это панели наружных стен с каркасом из термопрофилей (рисунок 4,а). Из термопанелей строятся наружные стены многоэтажных зданий на железобетонном или стальном каркасе, которые воспринимают ветровую нагрузку, действующую на фасад, и переносят её на основной несущий каркас здания (рисунок 6).

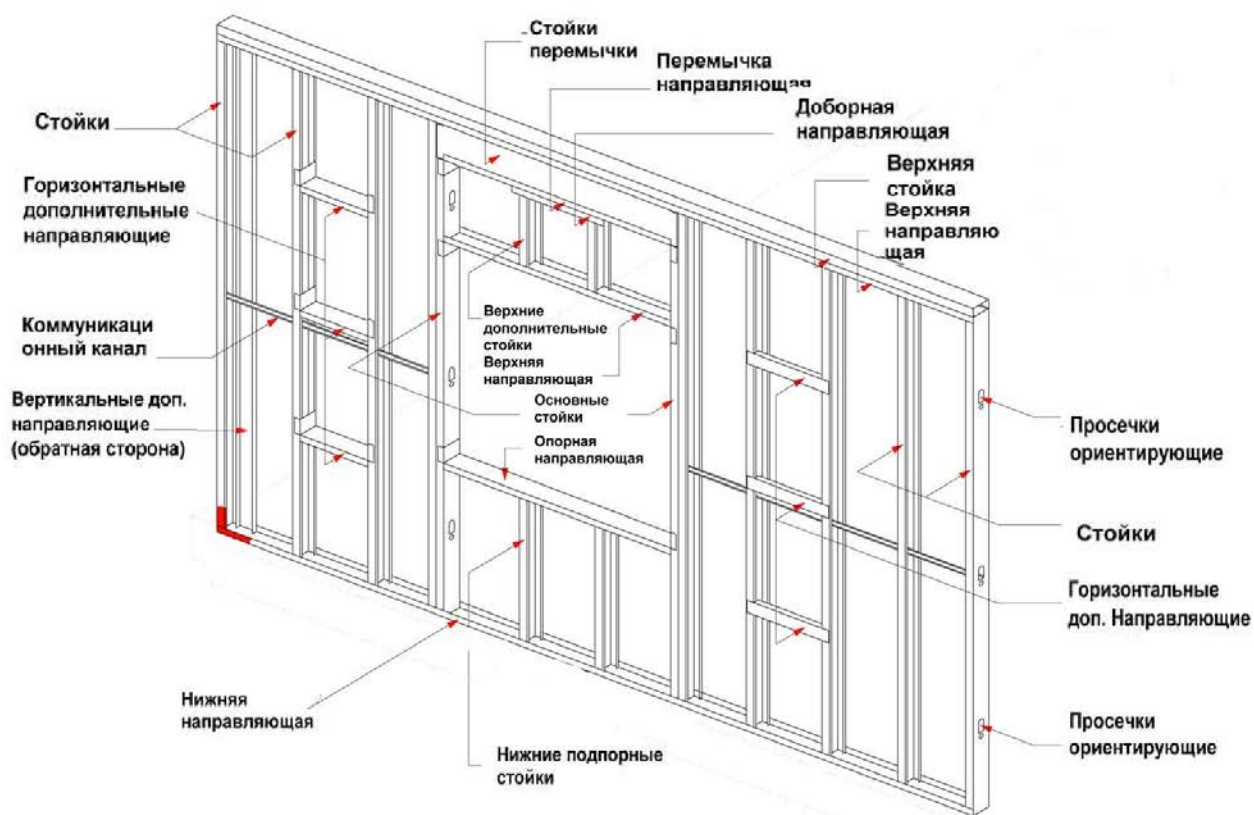


Рисунок 6. Металлический каркас термопанели

2. Строительство индивидуальных загородных домов

В последнее время в крупных городах возник спрос на постоянное место жительства за чертой города. Загородная недвижимость в данный момент представлена коттеджным строительством.

Конструкция здания (рисунок 1.8) из ЛСТК [5, 65, 17] состоит из следующих элементов:

1. Стеновая система (несущие стены толщиной от 1,5 до 2 мм, изготовленные из термопрофилей и оцинкованных профилей, оснащенные теплоизоляцией в виде минераловатных плит)
2. Система перекрытий (несущие конструкции для создания межэтажных перекрытий, шаг П-образного и С-образного профилей при этом обычно составляет 600 мм; сами же потолки делаются из листов гипсокартона или других материалов)
3. Кровельное перекрытие (стропильная система из термопрофилей или оцинкованных профилей толщиной от 1,5 до 2 мм, оснащенная теплоизоляцией, обрешеткой, контробрешеткой и твердым покрытием)



Рисунок 7. Принципиальная схема устройства здания на основе каркаса из ЛСТК

3. Надстройка мансардных этажей офисных зданий старого фонда

В истории развития большинства городов вся деловая среда формировалась от центра к периферии. Прошли столетия, ситуация практически не изменилась, но город столкнулся с проблемой нехватки свободного бизнес-пространства в центре. Например, в исторической части города Санкт-Петербурга около 10 тыс. зданий – старого фонда, которые были построены с конца XVIII в. до 1917 г. Они являются культурным наследием города, пребывают под охраной КГИОП, и поэтому не подлежат сносу.

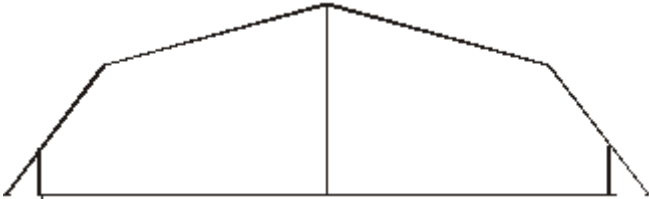
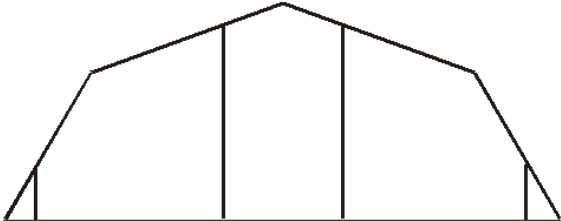
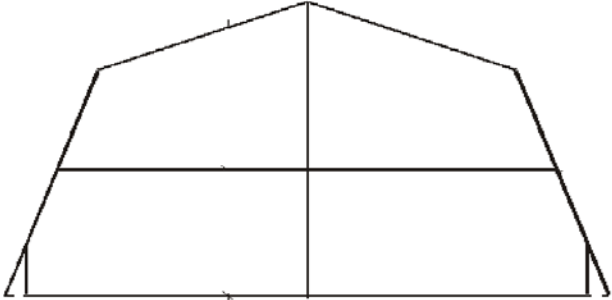
С другой стороны с развитием городской инфраструктуры возникает потребность в новых полезных площадях, что создаёт определённую проблему для города.

Возведение мансард позволяет не просто продлить срок службы существующих зданий, преобразить их внешний облик, но и создать новые жилые и офисные площади в престижных районах, где получение площадок под новое строительство практически исключено.

Решением сложившейся проблемы может стать реконструкция существующих зданий с надстройкой мансардных этажей.

Оптимальным вариантом конструктивной схемы, минимизирующей нагрузку на фундамент, являются ЛСТК [52, 76, 17]. В таблице 1. представлены основные типы конструктивных схем рамного типа.

Таблица 1. Варианты конструктивных схем мансард

№	Область применения	Конструктивные схемы мансард
1	Для здания с продольными несущими стенами	
2	Для зданий с двумя продольными несущими стенами	
3	Для зданий с несущей способностью стен, оснований и фундаментов, позволяющей осуществлять надстройку двух этажей	

4. Реконструкция жилых домов фонда первых массовых серий с надстройкой мансардных этажей

В период с 1956 по 1985 гг. по всей России велось активное строительство пятиэтажных зданий массовых серий, в ходе которого появилось около 290 млн м² общей площади, что составляет приблизительно 10% от существующего на сегодняшний день. Наиболее массовыми на территории Санкт-Петербурга были жилые панельные дома серий 1-507, ГИ, 1-335, ОД и кирпичные постройки серий 1-527 и 1-528. К «хрущевкам» также относятся дома серий 2-ГП, Г-4п, Г-24, АГ-502, Лг-502-6, Лг-504-3, Га2П, Га3П. Проекты большинства типовых домов разрабатывались проектным институтом ЛенПроект [38].

От 10 февраля 2000 г. Правительством Санкт-Петербурга было разработано Постановление N 4 [72], согласно которому около 70% фонда необходимо отремонтировать без расселения граждан. Однако в настоящее время правительство города, в основном, ориентируется на снос пятиэтажек, мотивируя это необходимостью повысить плотность заселения городских кварталов. В работе рассматривается конструктивное решение, являющееся достойной альтернативой правительственной программе [35].

В Санкт-Петербурге уже существует положительный опыт реконструкции типовых пятиэтажек. Одним из первых проектов подобного типа явился проект реконструкции пятиэтажного жилого дома по ул. Торжковская дом 16, разработанный ОАО «ЛенжилНИИпроект» в 2000 г. по заказу датской группы компаний «Carl Bro A/S» (рисунок 8). Основными конструктивными элементами несущего каркаса мансарды явились легкие стальные тонкостенные конструкции, позволяющие значительно минимизировать нагрузку на существующий фундамент.



Рисунок 8. Реконструированный жилой дом по ул. Торжковская, д.16 (до и после реконструкции)

В работе [38] показана целесообразность реконструкции жилых домов с надстройкой мансардных этажей. Предложен вариант создания новой инфраструктуры рассматриваемого квартала и планировок квартир, соответствующий современным требованиям нормативных документов и потребностей общества.

Реконструкция домов ФПМС может так же частично решить проблему социального жилья, т.к. новая площадь возникает в зоне с развитой инфраструктурой, на благоустроенных и озелененных территориях. Именно такая площадь нужна для предоставления ветеранам ВОВ и труда.

3. Основы теории расчета тонкостенных стержней Власова В.3.

Теоретическими и экспериментальными исследованиями установлено, что распределение напряжений и деформаций в брус при поперечном изгибе зависит не только от величины изгибающего момента, но также и от положения плоскости действия внешних сил (плоскости изгиба).

Гипотеза плоских сечений, лежащая в основе элементарной теории изгиба балок, соблюдается только в одном из частных случаев внешней поперечной нагрузки, а именно в случае, когда эта нагрузка проходит через так называемый центр изгиба.

Если поперечная нагрузка $q_{\text{рез}}$ не проходит через центр изгиба (рисунок 9), то брус кроме деформаций изгиба будет испытывать также и деформации кручения. Поперечные сечения бруса в этом случае не остаются плоскими. Наиболее актуально это для балок, имеющих несимметричный профиль, либо имеющих одну ось симметрии, не совпадающую с осью загрузки (рисунок 9, а).

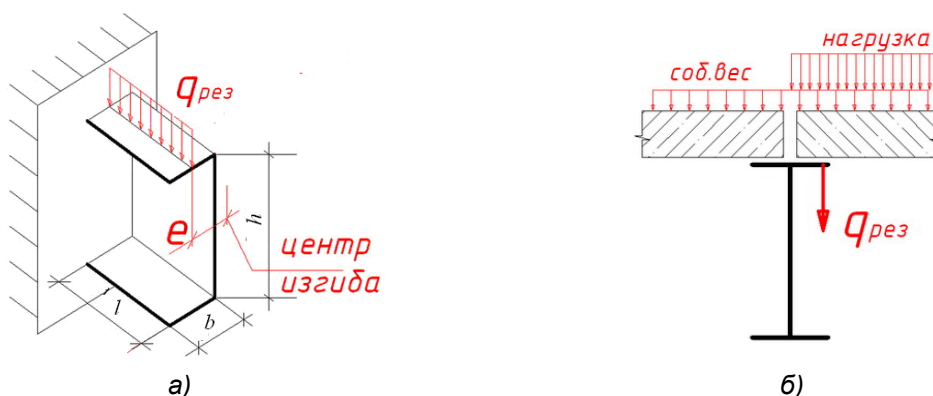


Рисунок 9. Несовпадение плоскости загрузки с центром изгиба:

а) – в несимметричном профиле; б) – в симметричном

Но даже и для балок, имеющих симметричный профиль, зачастую это может быть также опасно. Типичный пример: на двутавр опирается перекрытие, неравномерно нагруженное полезной нагрузкой (рисунок 9, б).

В бресе (балке открытого профиля), как правило, возникают дополнительные нормальные напряжения (рисунок 10), не следующие закону линейного распределения по высоте сечения и образующие по сечению систему продольных сил, статически эквивалентную нулю (рисунок 11) - бимомент.

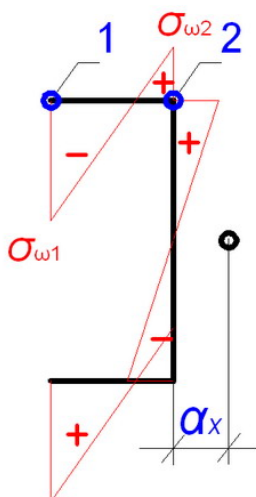


Рисунок 10. Эпюра напряжений от бимомента

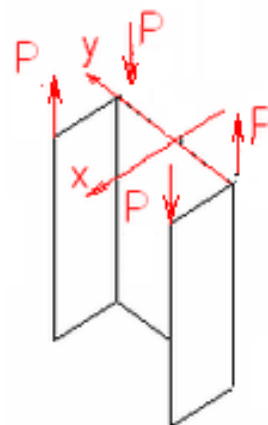


Рисунок 11. Система сил, статически эквивалентная нулю

В 1855 году Сен-Венаном разработана теория кручения призматического стержня. Было установлено, что для некруглого стержня при наличии связей, мешающих искажению сечения, возникает изгибное или стесненное кручение, при котором в элементе возникают дополнительные нормальные напряжения. Дальнейшее развитие теории привело к разработке мембранной аналогии кручения Прандтля.

Отклонение от закона плоских сечений при действии поперечной нагрузки, не проходящей через центр изгиба, также обнаружил в 1909 году Бах.

Вопросом изгиба и кручения тонкостенных стержней в связи со своей работой по устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки занимался проф. С.П. Тимошенко [87, 88]. Он экспериментальным путем установил жесткости двутавровых балок при чистом кручении и подробно изучил вопрос о кручении, при котором в поперечных сечениях наряду с касательными напряжениями возникают также и нормальные. Такое состояние балки легко себе представить, если концы ее закрепить от прогибов и углов закручивания, а в пролете приложить крутящий момент в виде пары сил, действующих

в плоскостях полок. Каждая полка при таком нагружении находится в условиях изгиба, причем прогибы полок имеют разные знаки. В поперечных сечениях возникают деформации, не следующие закону плоских сечений. Эпюра нормальных напряжений от кручения антисимметрична относительно обеих осей симметрии сечения.

Измеренные в опытах Тимошенко С. П. углы кручения хорошо совпали с теоретическими, вычисленными по его формулам.

Наибольший вклад в развитие теории тонкостенных стержней внес профессор, доктор технических наук, член-корреспондент Академии наук СССР, лауреат Государственной премии, Василий Захарович Власов (1906-1958).

Техническая теория тонкостенных стержней открытого профиля [22 - 24, 51] построена на следующих геометрических гипотезах:

- стержень рассматривается как оболочка, обладающая в плоскости поперечного сечения жестким контуром;
- деформации сдвига в срединной поверхности отсутствуют.

Депланация - перемещение точек поперечного сечения некоторого сечения, преобразующее его в кривую поверхность или совокупность плоскостей (рисунок 1.14)

Депланацию сечений тонкостенных стержней открытого профиля иллюстрирует рисунок 1.15. Прямолинейные участки сечений остаются прямолинейными, но выходят из начальной плоскости.

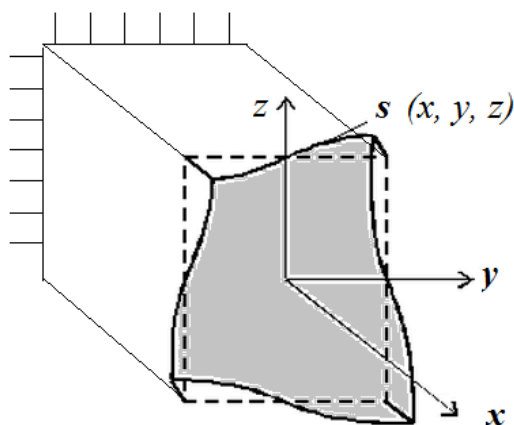


Рисунок 12

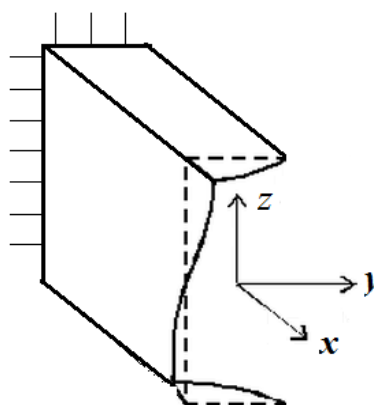


Рисунок 13

Если продольные перемещения точек происходят беспрепятственно (свободная депланация), то нормальные напряжения в сечении не возникают. В таком случае кручение называют **свободным** или **чистым**.

Если же депланация стеснена, то в поперечных сечениях наряду с касательными возникают и нормальные напряжения, и кручение носит название стесненного.

Под **стесненным кручением** понимается такое кручение, при котором депланация сечений ограничена.

Для сплошных сечений этот эффект проявляется в значительно меньшей степени и на практике не учитывается

С учетом нагрузок на стержень по всем семи степеням свободы, система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях принимает следующий вид:

$$\begin{cases} EA\xi'' = q_x \\ -EI_y\zeta^{IV} + q_z = 0 \\ -EI_x\eta^{IV} + q_y = 0 \\ -EI_\omega\theta^{IV} + GI_d\theta'' + m_x - m'_B = 0 \end{cases} \quad (3)$$

где EA, EI_y, EI_z – жесткости на растяжение-сжатие и изгиб в двух плоскостях; EI_ω и GI_d – жесткости на деформацию и кручение соответственно; q_x, q_y, q_z, m_x, m_y – распределенные по длине внешние силовые факторы соответственно: 3 силовых нагрузки вдоль осей x, y и z , далее – 2 изгибающие моментные нагрузки относительно осей y и z . Также определим функции перемещений в общем случае: продольных $\xi = \xi(x)$ по оси X (рисунок 13); поперечных $\eta = \eta(x), \zeta = \zeta(x)$ соответственно по осям Y и Z .

Четвертое уравнение системы (3) можно представить в виде:

$$\theta^{IV} - k^2 \theta'' = \frac{m_x - m'_B}{EI_\omega}, \quad (4)$$

где k – изгибно-крутильная характеристика стержня, обозначенная как

$$k = \sqrt{\frac{GI_d}{EI_\omega}} \quad (5)$$

Решение уравнения (4) имеет вид:

$$\theta(x) = f_0(x) + f(x), \quad (6)$$

где $f_0(x)$ – общий интеграл однородного дифференциального уравнения, соответствующего (4), равный

$$f_0(x) = Ashkx + Bchkx + Cx + D; \quad (7)$$

$f(x)$ – частный интеграл уравнения (4), зависящий от характера загрузки стержня, а произвольные постоянные интегрирования A, B, C, D зависят от граничных условий.

Аналитические решения уравнения (4) для наиболее распространенных в инженерной практике расчетных схем приводятся в книге [76].

Определив функции $\zeta(z), \xi(z), \eta(z)$ и $\theta(z)$ из системы уравнений (3), можно найти нормальные и касательные напряжения, а также крутящие моменты, возникающие в поперечном сечении стержня. Для этих напряжений и моментов в мы имеем следующие выражения:

$$\begin{cases} \sigma = E(\xi' - \zeta'' z - \eta'' y - \theta'' \omega) \\ \tau = E(\zeta''' \frac{S_y(s)}{\delta} + \eta''' \frac{S_z(s)}{\delta} - \theta''' \frac{S_\omega(s)}{\delta}) \\ H = GI_d \theta' \end{cases}, \quad (8)$$

где δ – толщина профиля; S_y и S_z статические моменты относительно осей x и y ; S_ω – секториальный статический момент инерции:

$$S_{\omega\omega} = \int_{s(\Gamma)}^s \delta \omega ds, \quad (9)$$

зависящий от секториальной координаты $\omega(s)$

Секториальная координата (секториальная площадь) представляет из себя удвоенную площадь, описываемую радиус-вектором PA при движении точки A по контуру от начала отсчета O до некоторого значения дуги s . Если радиус-вектор r вращается по часовой стрелке, приращение площади ds имеет знак плюс, против часовой стрелки – минус. Секториальная площадь является функцией дуги s и зависит от начала отсчета s и положения полюса P (рисунок 14).

$$\omega = \int_0^s r ds, \quad (10)$$

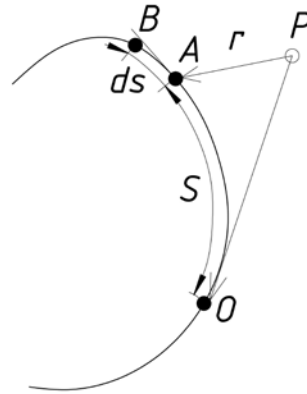


Рисунок 14. Определение секториальной площади

В формулах (9), (10) используется главная секториальная координата, вычисленная относительно координат центра изгиба (в главных центральных осях), которые определяются по формулам:

$$y = \frac{1}{I_{yA}} \oint \omega dA; \quad (11)$$

$$z = \frac{1}{I_{zA}} \oint \omega dA. \quad (12)$$

Также обозначим I_ω - секториальный момент инерции:

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA. \quad (13)$$

Домножив слагаемые первого уравнения системы (8) последовательно на dA , zdA , ydA , ωdA и проинтегрировав по площади поперечного сечения A , с учетом известных [76] определений геометрических характеристик A, I_y, I_z получим силовые факторы (соответственно: продольную силу, изгибающие моменты и бимомент) для общего случая нагружения:

$$N = EA \xi', \quad (14)$$

$$M_y = -EI_y \zeta'', \quad (15)$$

$$M_z = -EI_z \eta'', \quad (16)$$

$$B_\omega = -EI_\omega \theta''. \quad (17)$$

Тогда первую формулу (8) можно переписать в виде

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{B_\omega}{I_\omega} \omega. \quad (18)$$

Ввиду того, что секториальная координата не является постоянной характеристикой поперечного сечения (рисунок 18), для вычисления напряжений и деформаций необходимо использовать их конкретное значение в рассматриваемой точке.

Исследования формулы (18) с точки зрения практической значимости четвертого слагаемого в расчетах стержневых тонкостенных конструкций приведены в следующей части статьи.

Как следует из второго и третьего уравнений (8), касательные напряжения при этих допущениях разлагаются на два вида напряжений: симметрично распределенные по толщине стенки и кососимметричные (рисунки 15 и 16)

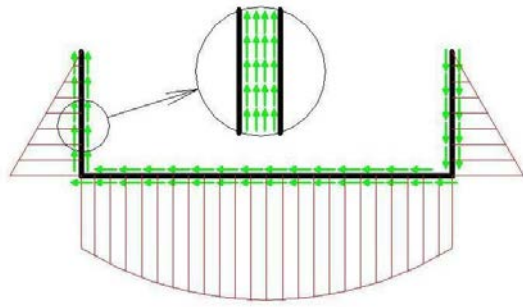


Рисунок 15. Симметричные касательные напряжения

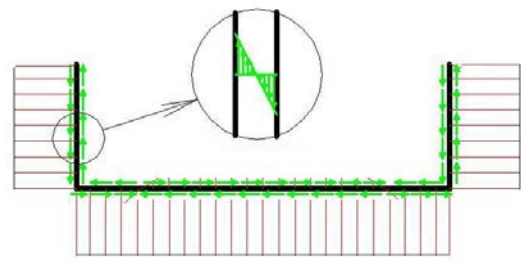


Рисунок 16. Кососимметричные касательные напряжения

Домножив слагаемые второго уравнения (8) последовательно на dA , zdA , ydA , ωdA и проинтегрировав по площади, получаем еще три силовых фактора: Q_x – поперечная сила в направлении x ; Q_y – поперечная сила в направлении y ; M_ω – секториальный крутящий момент:

$$Q_x = -EI_x \xi''' = \frac{dM_y}{dz}, \quad (19)$$

$$Q_y = -EI_y \eta''' = \frac{dM_x}{dz}, \quad (20)$$

$$M_\omega = -EI_\omega \theta''' = \frac{dB_\omega}{dz}, \quad (21)$$

Отметим, что представленные выше силовые факторы, отвечающие за «симметричные» касательные напряжения, связаны дифференциальными зависимостями с силовыми факторами нормальных напряжений (соответственно формулы (19-21) вторых частей равенств.

Касательные напряжения τ в поперечном сечении стержня в общем случае нагружения состоят из напряжений простого кручения τ_κ , из касательных напряжений поперечного изгиба в обоих направлениях ($\tau_{изг(y)}$ и $\tau_{изг(z)}$) и вторичных касательных напряжений стесненного кручения τ_ω .

Касательные напряжения вычисляются по формулам:

$$\tau = \frac{H\delta}{I_d}. \quad (22)$$

$$\tau = \pm \frac{Q_x S_y}{I_y \delta} \pm \frac{Q_y S_x}{I_x \delta} \pm \frac{M_\omega S_\omega}{I_\omega \delta}. \quad (23)$$

Характерно, что три составляющие τ в (23) в общем случае симметрично и равномерно распределены по толщине профиля (рисунок 15) и соответствуют второй формуле в системе (8), а составляющая от момента чистого кручения (22) – кососимметрично (рисунок 16) и соответствует третьей формуле (8).

При этом для касательных напряжений, так же как и для нормальных, справедлива оговорка, что знаки слагаемых в уравнении могут быть как положительными, так и отрицательными, в зависимости от физического их смысла, характеризующегося эпюрами внутренних силовых факторов.

В литературе [76, 22, 51] приводятся аналитические исследования, согласно которым касательные напряжения несущественно влияют на напряженно-деформированное состояние тонкостенного стержня.

Итак, основные неизвестные теории стесненного кручения:

1. перемещения: θ – угол закручивания; θ' – мера деформации;
2. внутренние усилия: B_ω – бимомент; H – момент чистого кручения; M_ω – секториальный крутящий момент (момент стесненного кручения);
3. деформации: χ_x – деформация крутки; χ_B – относительная деформация; γ_ω – деформация сдвига.

Основные уравнения бесдвиговой теории стесненного кручения:

1. Уравнения равновесия

$$-H' - B_{\omega}'' = m_x + m_B', \quad (24)$$

$$-B_{\omega}' + M_{\omega} = m_B, \quad (25)$$

где m_x – внешний погонный крутящий момент, m_B – внешний погонный бимомент;

2. Геометрические уравнения

$$\chi_x = \theta' \quad \chi_B = -\theta'' \quad \gamma_{\omega} = 0 \quad (26)$$

3. Физические уравнения

$$H = GI_d \theta' \quad (27)$$

$$B_{\omega} = -EI_{\omega} \theta'' \quad (28)$$

Запишем функционал Лагранжа [89], условие минимума которого отвечает уравнениям равновесия (3):

$$L = E - \Pi_S, \quad (29)$$

в котором $E = E(\xi, \theta, \zeta, \eta)$ – выражение энергии деформации, а $\Pi_S = \Pi_S(\xi, \theta, \zeta, \eta)$ – силовой потенциал, зависящие от функций перемещений.

Выражение энергии деформации E тонкостенного стержня можно представить как функционал от столбца перемещений $u(\xi, \theta, \zeta, \eta)$:

$$E(\xi, \theta, \zeta, \eta) = \frac{1}{2} \int_0^l ((EA(\xi')^2 + EI_y(\zeta'')^2 + EI_z(\eta'')^2 + EI_{\omega}(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2) dx, \quad (30)$$

Депланационно-крутильная составляющая функционала (30), включающая в себя только функцию кручения $\theta = \theta(x)$, примет вид:

$$E(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_{\omega}(\theta'')^2 + GI_d(\theta')^2) dx. \quad (31)$$

Силовой потенциал в общем случае будет иметь вид:

$$\Pi_S(\xi, \theta, \zeta, \eta) = \int_0^l (\xi q_x + \eta q_y + \zeta q_z + \theta m_x + \eta' m_z - \zeta' m_y - \theta' m_B) dx, \quad (32)$$

4. Влияние депланационной составляющей на нормальные напряжения в тонкостенных стержнях

В данном параграфе проанализируем степень влияния нормальных напряжений, вызванных действием бимоента (депланационная составляющая напряженно-деформированного состояния) на общую картину напряжений в профиле.

Рассмотрим свободно опертую однопролетную балку с двумя вариантами швеллерового тонкостенного профиля по ТУ 1108-011-70841391-2006:

– АИ ПН 150-50-1,5;

Таблица 2. Геометрические характеристики профиля ПН 150-1,5

	Параметр	Значение АИ ПН 150-1,5	Единицы измерения
A	Площадь поперечного сечения	3,6403	см ²
It	Момент инерции при свободном кручении	0,0273	см ⁴
Iw	Секториальный момент инерции	316,91746	см ⁶
Wu+	Максимальный момент сопротивления относительно оси U	15,83269	см ³
I _u	Максимальный момент инерции	118,74525	см ⁴
Y _b	Координата центра изгиба по оси Y	-1,682	см

Изгибно-крутильная характеристика, являющаяся физической постоянной поперечного сечения и математически представляющая собой характеристическое число дифференциального уравнения равновесия 4-го порядка, составит:

$$k = \sqrt{\frac{GJ_t}{EJ_\omega}} = 0,005764 \text{ см}^{-1}, \quad (33)$$

где: $G=0,81 \cdot 10^6$ кгс/см² – модуль сдвига стали С-255;

$E=2,1 \cdot 10^6$ кгс/см² – модуль упругости стали С-255.

Дело в том, при приложении равномерно распределенной нагрузки и доведении ее до максимального (разрушающего) значения ввиду достаточно большой податливости профиля верхней полки, которая будет существенно деформироваться, профиль потеряет свою первоначальную геометрическую форму. Нагрузка, в большинстве случаев являясь «штамповой», т. е. более жесткой, чем профиль по своей природе, будет уже не вплотную прилегать к полке. Для косвенного учета этой геометрической нелинейности приложим нагрузку не равномерно по полке, а по закону треугольника, что является достаточно распространенным методом. Тогда результирующий вектор нагрузки пройдет через центр тяжести эпюры нагрузки, лежащей в точке пересечения медиан треугольника, т.е. на расстоянии $\frac{b}{3}$ от края стенки.

Как видно из рисунка 17, полный эксцентриситет приложения нагрузки будет складываться из эксцентриситета, обусловленного несовпадением центра тяжести и центра изгиба поперечного сечения α_x , (равного Y_b - координате центра изгиба по оси y) и непосредственного эксцентриситета приложения нагрузки, равного:

$$e = \alpha_x + \frac{b}{3} = 1,682 + \frac{5}{3} = 3,35 \text{ см} \quad (34)$$

Эпюра секториальных координат профиля представлена на рисунке 18. Максимальные секториальные координаты необходимы для выявления напряжения от бимоента и составят:

$$\omega_1 = (\alpha_x - b) \frac{h}{2} = (1,682 - 5) \frac{15}{2} = 24,9 \text{ см}^2 \quad (35)$$

$$\omega_2 = \alpha_x \frac{h}{2} = 12,6 \text{ см}^2 \quad (36)$$

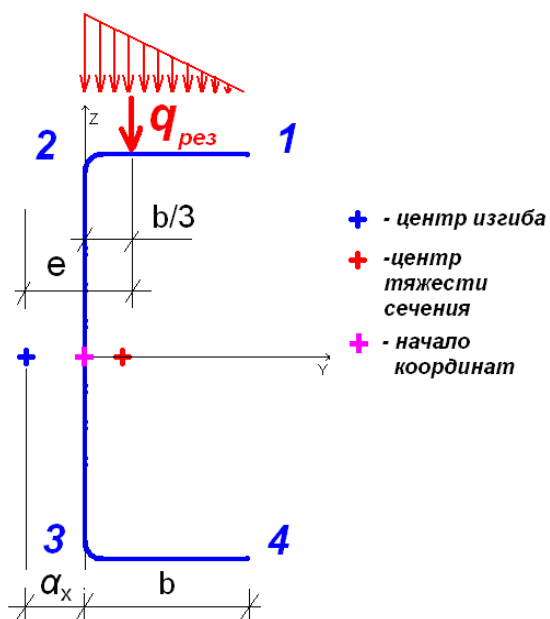


Рисунок 17

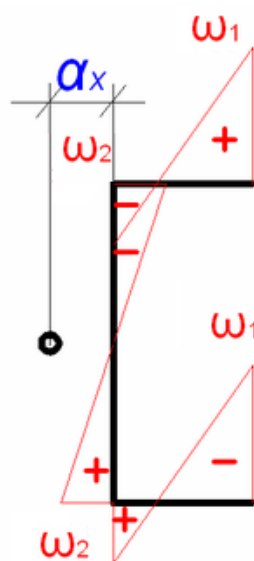


Рисунок 18

Максимальный изгибающий момент окажется в середине пролета и составит:

$$M_y = \frac{ql^2}{8} = \frac{1 \cdot 3^2}{8} = 1,125 \text{ кг м} = 112,5 \text{ кг см} \quad (37)$$

Эпюра изгибающих моментов представлена на рисунке 20.

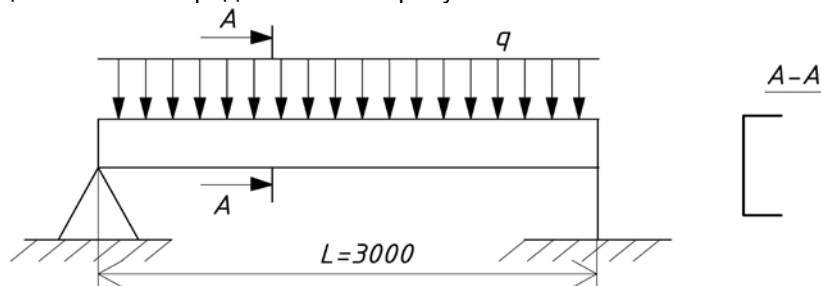


Рисунок 19. Случай загрузки балки симметричной нагрузкой

$q=1 \text{ кг/м}$

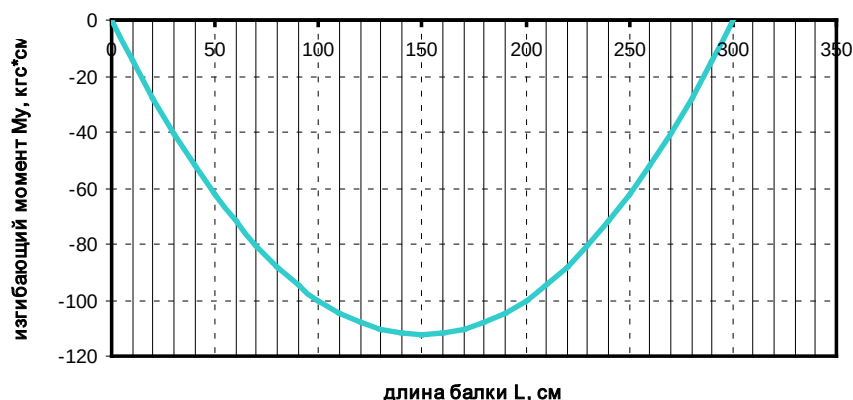
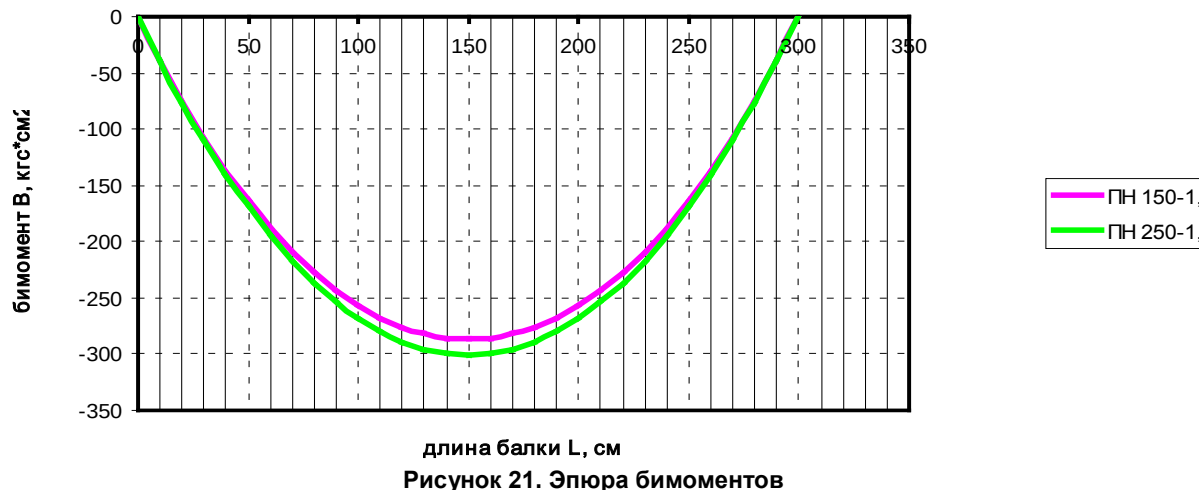


Рисунок 20. Эпюра изгибающих моментов

Бимомент будет распределяться по длине балки по следующему закону:

$$B_{\omega} = \frac{qe}{k^2} \left(1 - \frac{ch \frac{k(l-2x)}{2}}{ch \frac{kl}{2}} \right) \quad (38)$$

Эпюра бимоментов (рисунок 21) подобна эпюре изгибающих моментов, [85].



Максимальный бимомент составит:

$$B_{\omega} = \frac{qe}{k^2} \left(1 - \frac{1}{ch \frac{kl}{2}} \right) = \frac{0,01 \cdot 3,35}{0,005764^2} \left(1 - \frac{1}{1,398} \right) = 287,06 \text{ кг см}^2 \quad (39)$$

Максимальные нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ возникающие наиболее напряженном поперечном сечении, находящемся в середине пролета, окажутся различными в четырех характерных точках (1,2,3 и 4 соответственно) поперечного сечения (рисунок 22) и составят:

$$\sigma_1 = \sigma_{x1} + \sigma_{\omega 1} = -\frac{M_y}{W_y} + \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega_1 \quad (40)$$

$$\sigma_1 = -\frac{112,5}{15,83} + \frac{287,06}{316,32} \cdot 24,9 = -7,107 + 22,597 = +15,49 \text{ кг/см}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_{x2} + \sigma_{\omega 2} = -\frac{M_y}{W_y} - \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega_2 \quad (41)$$

$$\sigma_2 = -\frac{112,5}{15,83} - \frac{287,06}{316,32} \cdot 12,6 = -7,107 - 11,434 = -18,54 \text{ кг/см}^2$$

$$\sigma_3 = \sigma_{x3} + \sigma_{\omega 3} = +\frac{M_y}{W_y} + \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega_2 \quad (42)$$

$$\sigma_3 = +\frac{112,5}{15,83} + \frac{287,06}{316,32} \cdot 12,6 = +7,107 + 11,434 = +18,54 \text{ кг/см}^2$$

$$\sigma_4 = \sigma_{x4} + \sigma_{\omega 4} = +\frac{M_y}{W_y} - \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega_1 \quad (43)$$

$$\sigma_4 = +\frac{112,5}{15,83} - \frac{287,06}{316,32} \cdot 24,9 = +7,107 - 22,597 = -15,49 \text{ кг/см}^2$$

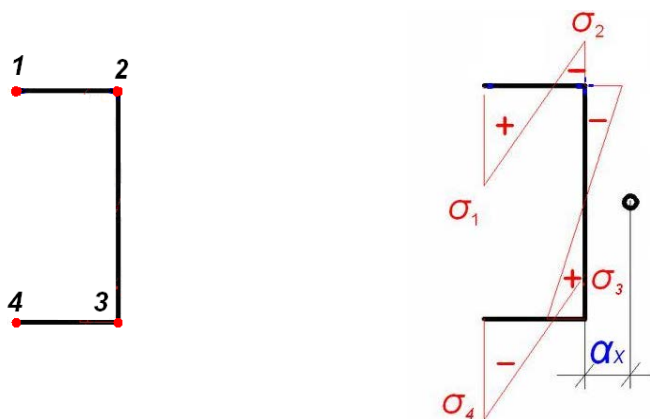


Рисунок 22. Схема поперечного сечения тонкостенного профиля и эпюра нормальных напряжений

На рисунке 23 рассмотрен случай загрузки балки одной сосредоточенной нагрузкой. Максимальный изгибающий момент окажется в середине пролета и составит:

$$M_x = \frac{Pl}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4} = 0,75 \text{ кг м} = 75 \text{ кг см} \quad (44)$$

Эпюра изгибающих моментов представлена на рисунке 24.

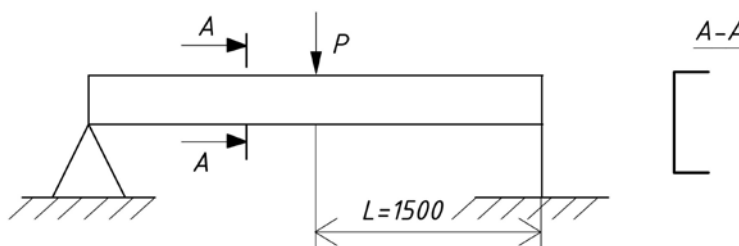


Рисунок 23.

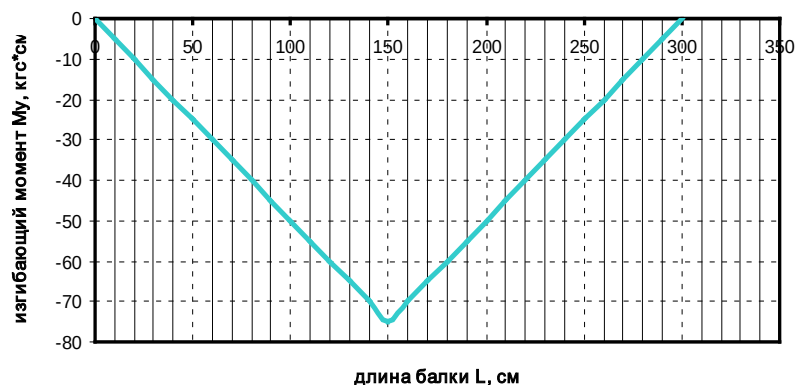


Рисунок 24. Эпюра изгибающих моментов

$$B_\omega = \frac{Pe}{k} \frac{sh(kx) \cdot sh \frac{kl}{2}}{sh(kl)}, \text{ при } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (45)$$

$$B_{\omega} = \frac{Pe}{k} \frac{\operatorname{sh}(k(l-x)) \cdot \operatorname{sh} \frac{kl}{2}}{\operatorname{sh}(kl)}, \text{ при } \frac{l}{2} < x \leq l \quad (46)$$

Эпюра бимоментов представлена на рисунке 25. Максимальный бимомент составит:

$$B_{\omega} = \frac{Pe}{k} \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{kl}{2}}{\operatorname{sh}(kl)} = \frac{1 \cdot 3,35}{0,005764} \cdot \frac{0,976^2}{2,729} = 202,87 \text{ кг см}^2 \quad (47)$$

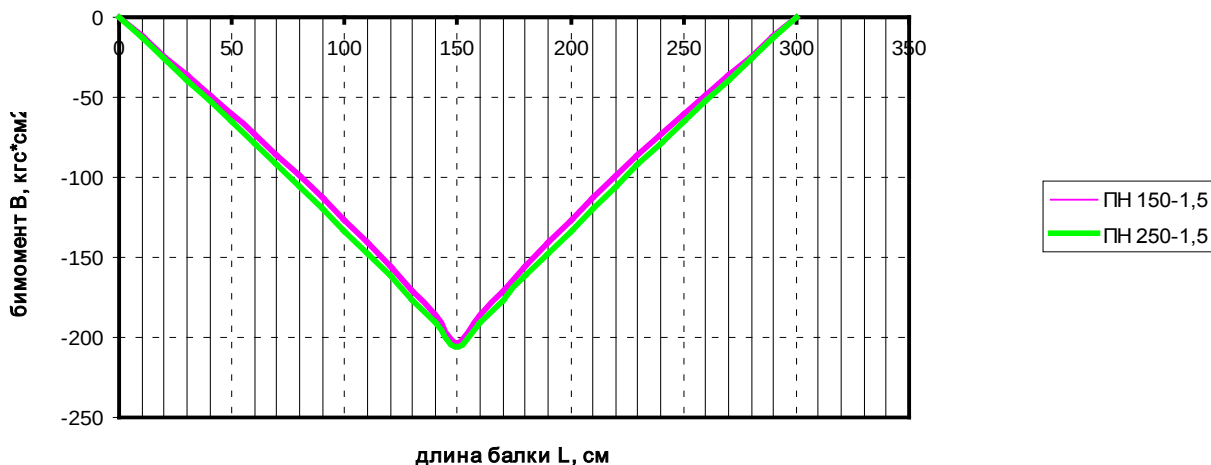


Рисунок 25. Эпюра бимоментов

Максимальные нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ возникающие в наиболее напряженном поперечном сечении, находящемся в середине пролета, представлены во второй строке таблицы 3.

На рисунке 26 рассмотрен случай загрузки балки двумя сосредоточенными нагрузками

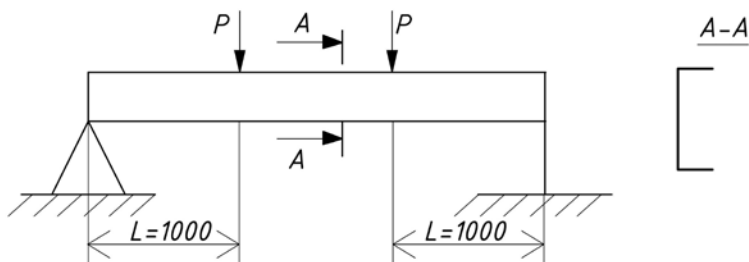


Рисунок 26

Максимальный изгибающий момент (рисунок 27) окажется в середине пролета и составит:

$$M_x = \frac{Pl}{3} = \frac{1 \cdot 3}{3} = 1 \text{ кг м} = 100 \text{ кг см} \quad (48)$$

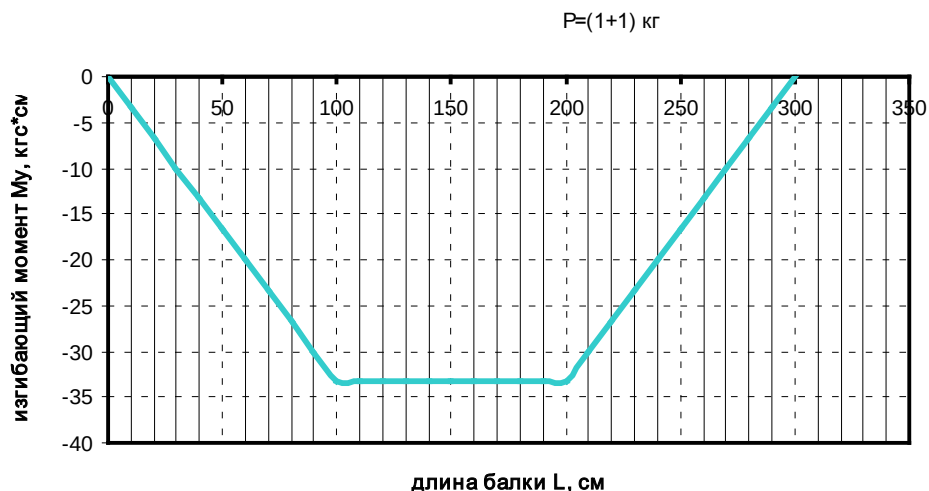


Рисунок 27. Эюра изгибающих моментов

Распределение бимоента по длине балки описывается следующими зависимостями:

$$B_{\omega} = \frac{Pe}{k} \frac{sh(kx)}{sh(kl)} \left(sh \frac{2kl}{3} + sh \frac{kl}{3} \right), \text{ при } 0 \leq x \leq \frac{l}{3} \quad (49)$$

$$B_{\omega} = \frac{Pe}{k} \frac{sh \frac{kl}{3}}{sh(kl)} (sh(k(l-x)) + sh(kx)), \text{ при } \frac{l}{3} < x \leq \frac{2l}{3} \quad (50)$$

$$B_{\omega} = \frac{Pe}{k} \frac{sh(k(l-x))}{sh(kl)} \left(sh \frac{2kl}{3} + sh \frac{kl}{3} \right), \text{ при } \frac{2l}{3} < x \leq l \quad (51)$$

Эюра изгибающих бимоментов представлена на рисунке 27.

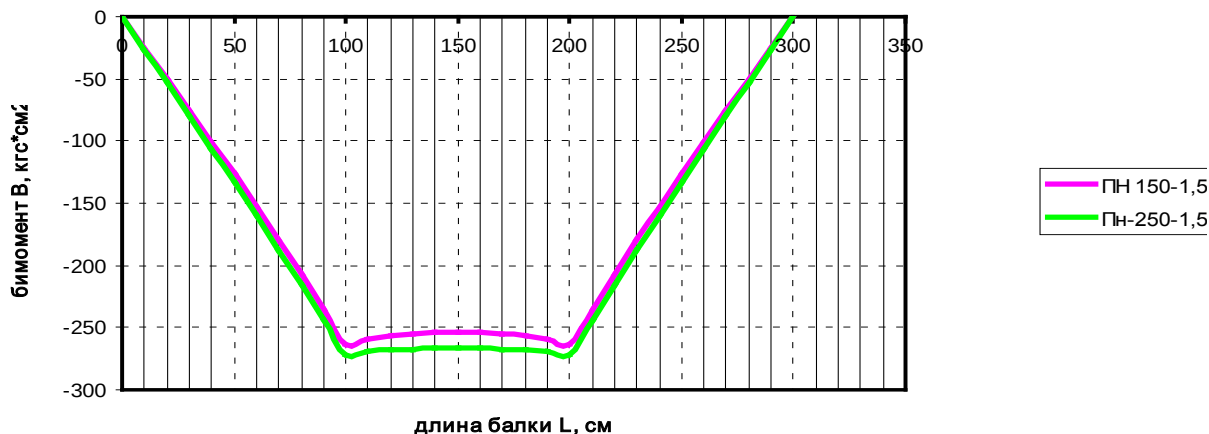


Рисунок 28. Эюра бимоментов

Максимальный бимомент составит:

$$B_{\omega} = \frac{Pe}{k} \frac{sh^2 \frac{kl}{2}}{sh(kl)} \left(sh \frac{kl}{3} + sh \frac{2kl}{3} \right) = 263,77 \text{ кг см}^2 \quad (52)$$

Максимальные нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ возникающие в наиболее напряженном поперечном сечении, находящемся в середине пролета, представлены в третьей строке таблицы 3.

Таблица 3. Сопоставление составляющих напряжений

№	Вид нагрузки	Номер точки	σ_x , кгс/см ²		
			Составляющие напряжения		Общее напряжение
			изгибные напряжения	напряжения от бимомента	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Профиль типа ПН-150-1,5					
1.	q=1кг/м	1	-7,12	+22,61	+15,49
		2	-7,12	-11,42	-18,54
		3	+7,12	11,42	+18,54
		4	+7,12	-22,61	-15,49
2.	P=1кгс	1	-4,74	+16,36	+11,62
		2	-4,74	-8,28	-13,02
		3	+4,74	+8,28	+13,02
		4	+4,74	-16,36	-11,62
3.	P=(1кг+1кг)	1	-6,317	+20,767	+14,45
		2	-6,317	-10,5	-16,82
		3	+6,317	+10,503	+16,82
		4	+6,317	-20,77	-14,45

Из таблицы видно, что вклад бимоментной составляющей в формуле (1.16) является существенным: напряжения от бимомента превышают изгибные напряжения в 1,5...3 раза и в некоторых точках даже могут иметь противоположный знак.

5. Развитие теории расчета тонкостенных стержней в научно-исследовательских работах в XX-XXI веках

Джанелидзе Г. Ю. и Пановко Я. Г. в [30] рассматривают основные уравнения, описывающие статическую работу тонкостенных стержней при условии малых перемещений, прикладная теория Власова В. З. [24] для тонкостенных стержней с открытым профилем и прикладная теория Уманского А. А. [93] для тонкостенных стержней с замкнутым профилем. В данных работах проанализированы гипотезы, принятые Власовым В. З. о недеформируемости контура сечения и отсутствии деформаций сдвига в срединной поверхности стержня.

Анализируя деформации тонкостенных стержней, авторы приходят к выводу о возможности разделения деформаций связанных с кручением стержня и деформаций от изгиба и растяжения. Произведено исследование влияния на деформации стержня двух близкорасположенных сосредоточенных крутящих моментов, равных по величине и имеющих противоположное направление. В результате выявлено, что данное силовое воздействие эквивалентно действию бимомента, величину которого можно определить как произведение величины крутящих моментов на расстояние между ними. Также показано несоблюдение принципа Сен-Венана в случае загрузки тонкостенных стержней открытого профиля нагрузками, статически эквивалентными нулю. Рассмотрены задачи кручения тонкостенного стержня относительно оси, не проходящей через центр изгиба сечения и сформированной особенностями конструкции (закрепление профиля на уровне полок, составные стержни, продольная ось которых не проходит через центры изгиба ветвей). Установлено, что при кручении стержня относительно такой в нем возникают изгибающие моменты. Сформулированы упрощенные теории, позволяющие в ряде случаев получать с достаточной инженерной точностью результаты. Авторами показана необходимость разработки практической методики расчета подобных конструкций.

В [4] Александровым В. Г. исследована работа неразрезных тонкостенных балок с открытым профилем и установлено, что при приложении нагрузки с эксцентриситетом от вертикального давления крана напряжения в балке несимметричного сечения возрастают до 1,5 раз, вследствие стесненного кручения. При устройстве тормозной балки напряжения в отдельных точках сечения увеличиваются до 1,3 раза, а в некоторых точках сечения меняют знак. Касательные напряжения из-за стесненного кручения в сечении меняются незначительно.

В [6] Анушкиным А. П. исследованы вопросы устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля под действием сжимающей нагрузки. Показано, что для неравнополочных уголков форма потери

устойчивости практически всегда крутильная. Для швеллеровых профилей крутильная форма потери устойчивости возможна при отношении момента инерции в плоскости стенки к моменту инерции в плоскости полок менее 8,9. Для двутавровых и составных профилей с двумя осями симметрии и полками, направленными внутрь профиля, такая потеря устойчивости возможна, при соотношении данных параметров менее 1,4. Как правило, колонны и стойки двутаврового и швеллерного сечения обычно имеют соотношение моментов инерции соответственно больше 1,4 и 8,9, поэтому расчет их производят без проверки на закручивание. Связевые элементы из угловых, тавровых и крестовых профилей должны обязательно проверяться на закручивание.

Бычковым Д. В. и Мрощинским А. К. [14] кроме теории кручения тонкостенных стержней открытого профиля получена методика расчета одно- и многопролетных тонкостенных балок. Авторами получены специальные графики, таблицы и формулы, позволяющие определить усилия при стесненном кручении тонкостенных стержней открытого профиля с различными условиями закрепления по концам. Также в работе [15] Бычковым Д. В. рассмотрены вопросы расчета балочных и рамных систем из тонкостенных открытых профилей в условиях стесненного кручения. Установлено, что известные в механике методы сил и перемещений, могут применяться и при расчете с учетом стесненного кручения. Автором получены зависимости, сведенные в табличной форме для определения коэффициентов, используемых при вычислении усилий и перемещений в системе. Данные исследования стали важной предпосылкой для разработки численной методики расчета. Также установлено, что для большинства рам угловые и линейные перемещения узлов незначительно влияют на бимоменты и приближенный расчет можно выполнять без учета этих перемещений. Бимоменты по длине балки затухают значительно быстрее, чем изгибающие моменты, поэтому при расчете неразрезных балок можно ограничиться 4 или даже 3 смежными пролетами, в отличие от 5 при расчете на изгиб. Однако в работе рассмотрены только плоские рамы с предположением того, что разработанная методика может быть доработана для пространственных систем. Важным достоинством работы также является построение зависимостей и таблиц для расчета простых тонкостенных систем (прямолинейный стержень с различными граничными условиями, плоские рамы), которые можно использовать в практике проектирования. Невозможность использования предложенной методики расчета для пространственных систем ограничивает область применения результатов данного исследования.

В [26] Горбуновым Б. Н. и Стрельбицкой А. И. рассмотрены вопросы практического расчета рам из тонкостенных стержней при действии пространственной нагрузки. Авторами разработаны методы расчета рам с открытым и замкнутым сечениями. При расчете тонкостенных стержней с открытым профилем использована теория Власова В.З., при расчете тонкостенных стержней с замкнутым профилем – теория Уманского А. А. Для расчета рам предложено использовать метод деформаций и метод сил. В качестве параметра, характеризующего деформацию стержней, введено понятие меры деформации; используется «метод моторных тензоров», реализующий метод перемещений в матричной форме. Приведена методика построения матриц нагрузки и жесткости, составление системы линейных уравнений для нахождения неизвестных перемещений узлов плоских рам. Общее число неизвестных перемещений в узле, принятое в расчетах, семь: три угловых, три поступательных перемещений и деформация. Основным расчетным случаем являются прямоугольные плоские рамы без эксцентриситетов в узлах при одинаковой, для всех сходящихся в узле, стержней мере деформации. Ось стержня располагается по оси центров изгиба, полки стержней, сходящихся в узле, параллельны плоскости рамы. Также авторами проведены расчеты плоских прямоугольных рам при действии нагрузок, вызывающих кручение и деформацию рам из плоскости. Исследовано влияние на работу рам эксцентриситетов в узлах, вызванных несовпадением центров изгиба и тяжести и невозможностью пересечения в одной точке осей нескольких стержней, соединяемых в узле.

Наличие эксцентриситетов влияет на расчет рам следующим образом:

- усложняется структура матрицы жесткости за счет добавления новых элементов при сохранении общего числа неизвестных;
- линейные перемещения центра узла не совпадают с линейными перемещениями центров тяжести или центров изгиба примыкающих узлов, поэтому для определения усилий в стержнях, после определения перемещений узлов, необходимо определить перемещения концов стержней и по ним определить усилия;
- усложняется уравнение равновесия бимоментов в узле.

В общем случае деформация узла вызывает дополнительные углы поворота и линейные перемещения концов стержней, примыкающих к рассматриваемому узлу.

К достоинствам данной работы следует отнести разработку методики матричного расчета плоских рам из стержней с полками параллельными плоскости рамы без эксцентриситетов в узлах, постановку вопроса о необходимости учета эксцентриситетов в узлах. Отсутствие данных о построении матрицы жесткости стержневой системы при эксцентриситетах в узлах с произвольной ориентацией стержней, не позволяет напрямую использовать результаты исследований при расчете пространственных стержневых конструкций.

Методика численного расчета разработана Постновым В. А. и Хархуримом И. Я. [74]. Предложен конечный элемент тонкостенного стержня открытого профиля для численного расчета судовых конструкций. Узлы элемента имеют по четыре степени свободы: линейное перемещение, угол поворота, угол закручивания и производную от угла закручивания (депланация). Матрица жесткости элемента имеет размерность 8×8 . Для перехода из местной в общую систему координат используется матрица преобразования, включающая направляющие косинусы местных осей X' и Y'_i относительно общих осей X и Y . Деplanация в общей и местной системе координат считается одинаковой. Разработанная матрица может применяться только при расчете плоских перекрытий: сопоставление результатов численных расчетов с известными решениями показали их хорошее соответствие. Использование предложенной матрицы жесткости для расчета пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля (узлы имеют по 7 степеней свободы) с различными узловыми сопряжениями при наличии эксцентриситетов в узлах невозможно.

В работах Бейлина Е. А. [7, 8, 9] предлагается вариант теории стесненного кручения тонкостенных стержней (открытого, замкнутого и комбинированного), который в зависимости от жесткости депланационных связей монотонно переходит либо в теорию Власова В. З., либо в теорию стержней замкнутого профиля Уманского А. А..

С помощью уравнений этой теории удалось решить много новых задач статики и динамики. В частности, обнаружен эффект повышения устойчивости и частот свободных изгибно-крутильных колебаний тонкостенных стержней по мере снижения жесткости депланационных связей.

Белым Г. И. [11, 12] предложен приближенный аналитический метод расчета тонкостенных стержней по деформированной схеме. Решение основано на аппроксимации пространственных форм деформирования в виде линейной комбинацией частных форм: форм, полученных недеформационным расчетом, и форм потери устойчивости. Физическая нелинейность учитывается введением дополнительных пространственных перемещений сечений стержня. Этот метод в дальнейшем использован в работах Сотникова Н. Г., Родикова Н. Н., Пичугина С. Н., Сергеева С. Н., Пяткина П. А. и многих других исследователей.

Тугаевым А. С. в [90] исследованы вопросы статической и динамической устойчивости прямоугольных пластин с упругими граничными условиями и местной устойчивости тонкостенных стержней, а также закритического поведения этих конструкций.

На основе полученного автором обобщения точного решения Тимошенко С. П. задач статической устойчивости сжатых прямоугольных пластин с произвольными условиями на продольных сторонах решена задача динамической устойчивости для таких пластин.

Методами двучленной аппроксимации и модифицированным энергетическим методом, предложенными Каном для широкого класса задач устойчивости и колебаний упругих систем, определены критические усилия потери устойчивости равномерно сжатых в одном или двух направлениях прямоугольных пластин со сложными упругими граничными условиями,

С использованием решенных задач устойчивости для пластин исследованы задачи местной потери устойчивости конструкций типа тонкостенных стержней произвольного профиля, сотовых конструкций, многопанельных пластин.

Решены динамические геометрически нелинейные задачи устойчивости прямоугольных пластин с упруго защемленными сторонами, в том числе и с одной свободной стороной, местной потери устойчивости тонкостенных стержней и даны рекомендации для определения их несущей способности в закритической области.

6. Тонкостенные стержневые конструкции в методе конечных элементов

Метод конечных элементов (далее МКЭ) – основной метод современной строительной механики [36, 37, 29, 56, 73 и др.], лежащий в основе подавляющего большинства современных программных комплексов, предназначенных для выполнения расчетов строительных конструкций на ЭВМ. МКЭ также используется для решения других разнообразных задач, как в области прочностных расчетов, так и во многих других сферах, например задачах гидродинамики, электромагнетизма, теплопроводности и многих других.

Метод конечных элементов позволяет практически полностью автоматизировать расчет стержневых систем, хотя, как правило, требует выполнения значительно большего числа вычислительных операций по сравнению с классическими методами строительной механики. Однако в современных условиях большой объем вычислений не является серьезной проблемой, и, в связи с этим, при внедрении ЭВМ в инженерную практику МКЭ получил широчайшее распространение.

Разные источники указывают на разные годы создания и разных авторов, «впервые» использовавших этот метод. Но, так или иначе, МКЭ был создан в середине XX века на базе строительной механики и теории упругости, и уже только потом было дано его математическое обоснование и возможность использования во многих других видах инженерной деятельности.

Расчет конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля может выполняться с использованием МКЭ следующими способами:

1. Моделирование с помощью оболочечных конечных элементов.
2. Введение дополнительной степени свободы в стержневые конечные элементы
3. Использование стандартных стержневых конечных элементов с 6 степенями свободы (бистержневое моделирование).

Далее рассмотрим данные способы и обзор исследований, связанных с ними.

6.1. Использование оболочечных конечных элементов

Данный способ связан с представлением тонкостенного стержня в виде оболочки и дальнейшем численном расчете, как правило, с помощью метода конечных элементов, в расчетных программных комплексах SCAD, Lira, SOFiStiK и т.д. Такие способы расчета являются достаточно точными, но весьма трудоемкими в инженерно-конструкторской деятельности, особенно с точки зрения комплексного расчета конструкции.

На рисунке 29 представлены 2 примера результатов расчета тонкостенных профилей в ПК SCAD Office: (а) – балка междуэтажного перекрытия; (б) - направляющая ограждающей конструкции – термопанели (рисунок б).

Из рисунка видно, что знак напряжений меняется не только в пределах стенки, но и в пределах обеих полок в случаях профилей как со сплошной, так и с перфорированной стенками.

Данный способ конечноэлементного моделирования на основании программного комплекса SCAD Office [42, 43] нашел отражение в работах сотрудников Санкт-Петербургского государственного политехнического университета Поповой Е. Н., Смазнова Д. Н., Гордеевой А. О., Шатова Д. С. под общим руководством профессора Ватина Н. И. [27, 81, 82, 96, 18, 76 и др.]

В публикациях Дьякова И. Ф. и Чернова С. А. [31, 95] рассмотрена конечно-элементная модель оболочки, укрепленной тонкостенными стержнями. Описано влияние деформации сечения стержня при его кручении на напряженно-деформированное состояние конструкции в целом в результате переноса узловых перемещений стержня к узлам оболочки. Приведены необходимые преобразования матрицы жесткости стержня и сравнение результатов расчета с экспериментальными данными. Также рассмотрена пространственная конечно-элементная модель узла соединения тонкостенных стержней. Для моделирования узлов предложено использовать элементы оболочки, а вне узла – тонкостенные стержневые элементы.

Малинин М. Ю. в [60] исследует напряженно-деформированного состояния однослойных и многослойных оболочек сложной геометрии методом конечных элементов. Получены матрицы жесткости конечных элементов многослойной полой оболочки, обладающих повышенной сходимостью решения при минимальном количестве узлов. Разработаны: метод аппроксимации разрывной функции

непрерывной на основе решения вариационного уравнения методом конечных элементов; алгоритм автоматизированного построения сетки конечных элементов для пространственных тонкостенных конструкции и графического отображения результатов расчета на периферийных устройствах; методика построения дискретно-равнопрочной конструкции путем варьирования толщиной конечных элементов в расчетной схеме.

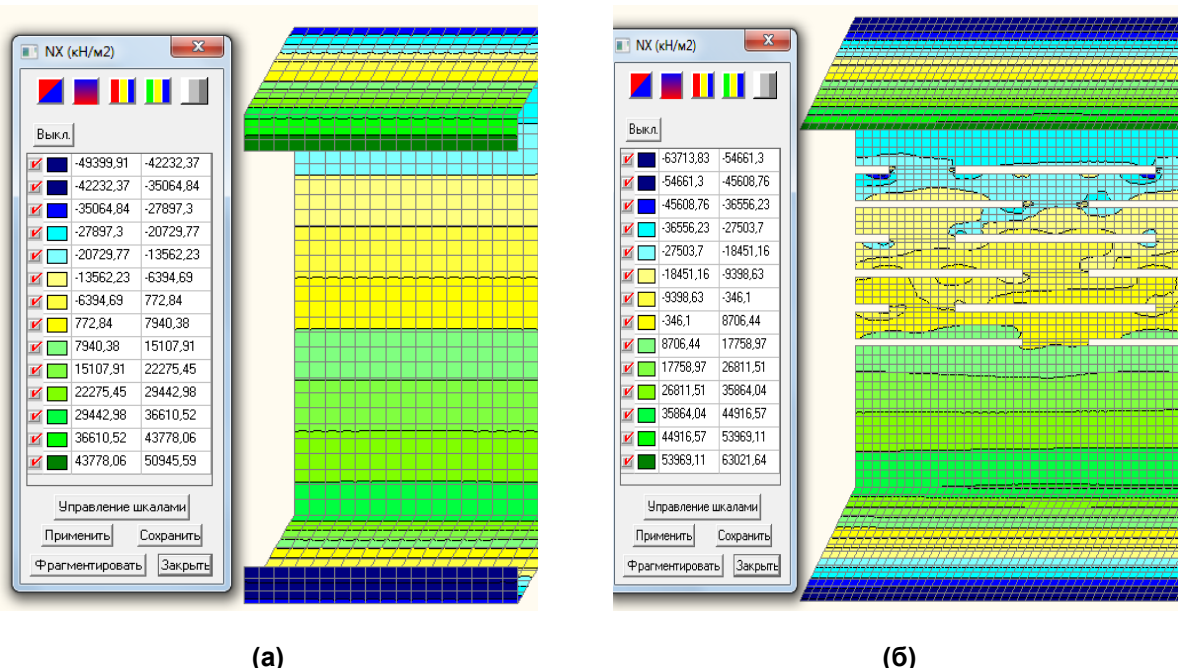


Рисунок 29. Результаты расчетов (фрагменты расчетных схем) по нормальным напряжениям в тонкостенных профилях: (а) – С-образный профиль; (б) – просечно-перфорированный швеллеровый профиль

В работах Хайруллина Ф. С. [94] и др. использованы вариационные методы определения напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций, основанных на использовании функций с конечными носителями произвольной степени аппроксимации, позволяющих производить расчеты тонких и толстых оболочек сложной формы, оболочечно-стержневых конструкций. Разработаны вариационный метод определения напряженно-деформированного состояния тонких оболочек сложной формы и численный метод параметризации срединных поверхностей и граничных линий оболочек, заданных совокупностью дискретных точек.

Шишкиным В. М. в [98] разработаны методы и алгоритмы решения физически нелинейных задач статики и динамики тонкостенных конструкций, нелинейность которых обусловлена соответственно пластическими и демпфирующими свойствами материала, а также методов решения обратных задач, обеспечивающих требуемые демпфирующие свойства конструкции и механические характеристики материала. Получены системы разрешающих уравнений метода конечных элементов с учетом пластических свойств материала.

Ивановым В. Н. в [39] изучены законы формообразования поверхностей с системой плоских координатных линий. Исследованы напряженно-деформированного состояния оболочек сложной геометрии и изучение возможностей применения безмоментной теории их расчета.

Каменских И. В. в [41] разработаны физическая, математическая и численная модели оценки устойчивости тонкостенных конструкций на основе метода модуль-элементов (ММЭ). Доказана приемлемость дискретизации конструкции на пространственные модуль-элементы. Установлено, что ММЭ снижает размер системы уравнений равновесия в 10-100 раз по сравнению с МКЭ; доказана возможность применения ММЭ к оценке устойчивости тонкостенных конструкций.

Однако применение подобного рода конечных элементов требует, во-первых, тщательного выбора сетки разбиения конструкции и анализа сходимости, например, по методике Шварцмана Б. С. [88] и сложности построения модели. А во-вторых, при таком способе число узлов и элементов возрастает по сравнению со стержневой аппроксимацией на несколько порядков, особенно при рассмотрении пространственной конструкции, что является основными недостатками модели с такими конечными элементами.

Способ оболочечных конечных элементов использован в разделе 5.5 при анализе напряженно-деформированного состояния узловых соединений тонкостенных стержневых конструкций.

6.2. Метод конечных элементов с использованием дополнительной степени свободы

Как было показано в главе 1.3., поперечное сечение тонкостенного стержня, имеет не 6, а 7 степеней свободы, и соответственно двухузловой стержневой конечный элемент будет иметь не по 6 степеней свободы в каждом узле, а по 7. Соответственно в матрице жесткости появятся дополнительные компоненты, а в матрицах-столбцах узловых перемещений и узловых нагрузок добавится по одному компоненту на каждый узел: соответственно относительной деформации узла и узлового бимоента.

Большой вклад в развитие теории тонкостенных конечных элементов внес Туснин А. Р., в работе которого [92] предлагается так называемый «метод тонкостенных конечных элементов»,

Разработка матриц жесткости тонкостенного конечного элемента основана на теории Власова В. З.

Матрицы жесткости «тонкостенных конечных элементов» (ТКЭ), которые имеют размерность 14x14. (таблица 4), построены с помощью аналитических зависимостей и включают в себя реакции в связях при их возможных единичных перемещениях, в качестве которых рассматриваются угол поворота относительно продольной оси и деформация сечения стержня.

Таблица 4. Пример матрицы жесткости конечного элемента тонкостенного стержня открытого профиля

	u^H	v^H	w^H	α^H	β^H	γ^H	δ^H	u^K	v^K	w^K	α^K	β^K	γ^K	δ^K
u^H	$r_{1,1}$							$r_{1,8}$						
v^H		$r_{2,2}$				$r_{2,6}$			$r_{2,9}$				$r_{2,13}$	
w^H			$r_{3,3}$		$r_{3,5}$					$r_{3,10}$		$r_{3,12}$		
α^H				$r_{4,4}$			$r_{4,7}$				$r_{4,11}$			$r_{4,14}$
β^H					$r_{5,5}$					$r_{5,10}$		$r_{5,12}$		
γ^H						$r_{6,6}$			$r_{6,9}$				$r_{6,13}$	
δ^H							$r_{7,7}$				$r_{7,11}$			$r_{7,14}$
u^K								$r_{8,8}$						
v^K									$r_{9,9}$				$r_{9,13}$	
w^K										$r_{10,10}$		$r_{10,12}$		
α^K											$r_{11,11}$			$r_{11,14}$
β^K												$r_{12,12}$		
γ^K													$r_{13,13}$	
δ^K														$r_{14,14}$

Компонентами матрицы жесткости являются реакции в связях, возникающие при единичных перемещениях связей.

Неравные нулю элементы матрицы жесткости равны:

$$\begin{aligned}
 r_{1,1} = r_{8,8} &= \frac{EA}{l}, & r_{1,8} &= -\frac{EA}{l}, & r_{2,2} = r_{9,9} &= \frac{12EI_z}{l^3}, & r_{2,6} = r_{2,13} &= \frac{6EI_z}{l^2}, \\
 r_{2,9} &= -\frac{12EI_z}{l^3}, & r_{9,13} &= -\frac{6EI_z}{l^2}, & r_{3,3} = r_{10,10} &= \frac{12EI_y}{l^3}, & r_{3,5} = r_{3,12} &= -\frac{6EI_y}{l^2}, \\
 r_{3,10} &= -\frac{12EI_y}{l^3}, & r_{10,12} &= \frac{6EI_y}{l^2}, & r_{4,4} = r_{11,11} &= \frac{\lambda EI_\omega}{l^3}, & r_{4,7} = r_{4,14} &= \frac{a EI_\omega}{l^2}, \\
 r_{4,11} &= -\frac{\lambda EI_\omega}{l^3}, & r_{11,14} &= -\frac{a EI_\omega}{l^2}, & r_{5,5} = r_{12,12} &= \frac{4EI_y}{l}, & r_{5,10} &= \frac{6EI_y}{l^2}, \\
 r_{5,12} &= \frac{2EI_y}{l}, & r_{6,6} = r_{13,13} &= \frac{4EI_z}{l}, & r_{6,9} &= -\frac{6EI_z}{l^2}, & r_{6,13} &= \frac{2EI_z}{l}, \\
 r_{7,7} = r_{14,14} &= \frac{\mu EI_\omega}{l}, & r_{7,11} &= -\frac{a EI_\omega}{l^2}, & r_{7,14} &= \frac{g EI_\omega}{l}.
 \end{aligned} \tag{53}$$

где μ, g, a, λ - безразмерные коэффициенты, определяемые по формулам (54).

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{k^2 l^2 (ch(kl) - 1)}{kl sh(kl) - 2ch(kl) + 2}, & g &= \frac{kl(sh(kl) - kl)}{kl sh(kl) - 2ch(kl) + 2}, \\
 \lambda &= \frac{k^3 l^3 sh(kl)}{kl sh(kl) - 2ch(kl) + 2}, & \mu &= \frac{kl(kl ch(kl) - sh(kl))}{kl sh(kl) - 2ch(kl) + 2},
 \end{aligned} \tag{54}$$

Однако анализируя метод ТКЭ, следует отметить следующее:

1. Предлагаемые автором конечные элементы построены на основе аналитических решений для отдельных элементов,
2. Некоторые коэффициенты μ, g, a, λ при компонентах матриц жесткости являются отношением гиперболических функций, знаменатель которых может обращаться в ноль;
3. Данные конечных элементов неприменимы для расчета тонкостенных стержней замкнутого профиля (коробчатый, составной и др.).

Еще один вариант конечноэлементного моделирования с учетом 7ой степени свободы рассмотрен в работе Мельникова Б. Е., Семенова А. С. [101] при расчете стеллажных конструкций производства «ДиКом». Расчет критической нагрузки по устойчивости проводился с помощью системы конечно-элементного анализа ANSYS. Задача решалась в линейной постановке с учетом возможной потери устойчивости. Трехпролетная рамная конструкция моделировалась балочными конечными элементами (BEAM 188), позволяющими наиболее корректно учесть форму профиля поперечного сечения балок.

Особенностью элемента BEAM 189 (как и близкого к нему по свойствам элемента BEAM 188) является возможность вывода изгибно-крутящих бимоментов, что не предусмотрено при использовании других балочных элементов из библиотеки ANSYS. Данные конечные элементы базируются на балочной теории Тимошенко С. И. Также возможен учет сдвиговых деформаций, нелинейности, ползучести, разных моделей пластичности.

Этот же метод анализа с помощью специальных конечных элементов использован в работах Оробея В. Ф., Сурьянинова Н. Г., Лимаренко А. М. [66] и др.

Лимаренко А. М. в [59] выполнены экспериментальные исследования станочных тонкостенных элементов открытого и замкнутого профилей, результаты которых хорошо согласуются с результатами вычислений методом конечных элементов в пакете ANSYS. Характер приложения нагрузки как в ходе эксперимента, так и при моделировании в ANSYS, обеспечивал изгиб тонкостенных балок в вертикальной плоскости и их кручение.

При статических и динамических расчетах конструктивных элементов металлорежущих станков впервые применен метод граничных элементов (МГЭ). Разработана методика решения задачи о крутильных колебаниях тонкостенных элементов по алгоритму МГЭ. Выведены аналитические выражения фундаментальных ортонормированных функций и функции Грина, которые являются основой алгоритма МГЭ. Решен ряд задач статики и динамики тонкостенных элементов станков МГЭ. Предложены способы

учета в расчетной схеме различных условий закрепления и нагружения, характерных для корпусных деталей металлорежущих станков. Разработана и реализована в программе ANSYS соответствующая методика расчета.

Сурьянинов Н. Г. в [84] обобщил метод граничных элементов к расчету стержней, пластин и оболочек. Построены математические модели тонкостенных стержневых систем открытого, замкнутого и комбинированного профиля при статических нагрузках и определены фундаментальные решения описывающих их дифференциальных уравнений. Предложена методика решения задач о свободных и вынужденных колебаниях тонкостенных стержней и стержневых систем на платформе МГЭ.

Гурковой М. А. в [28] разработан системный подход к изложению теории кручения тонкостенных стержней открытого и замкнутого профилей. Разработано два способа построения матриц жесткости (по дифференциальному уравнению и через матрицу податливости). Разработаны алгоритмы и программы получения геометрических характеристик тонкостенных стержней. Разработан способ построения матриц жесткости исходя из вариационного принципа Кастильяно (матрица податливости получена с использованием теоремы Кастильяно). Проведена проверка основной гипотезы Уманского об предоставлении продольного перемещения в виде произведения двух функций, первая из которых известна и берется из свободного кручения, а для получения второй составляется дифференциальное уравнение. Разработана численная методика построения матрицы жесткости при стесненном кручении тонкостенного стержня произвольного профиля на базе МКЭ (функция распределения перемещений в тонкостенных сечении получены путем численного решения о свободном кручении).

Работа на аналогичную тему была выполнена чуть позже, в 2005 году зарубежным исследователем Katy Saade (г. Брюссель) [106]. Получены аналогичные конечные элементы, рассмотрены вопросы учета сдвига на основе балочной теории Тимошенко.

Белым А. Г. в [10] рассматривается один из наиболее часто встречающихся в инженерной практике случаев нагружения - сжатие тонкостенных стержней с двухосным эксцентриситетом. Такие задачи для стержней произвольного профиля и при наличии деформационных связей, насколько нам известно, рассматриваются впервые в данной диссертации. Решение таких задач основано на варианте теории, предложенной Бейлиным Е. А.. Уравнения деформационного расчета этой теории позволяют определять напряженно-деформированное состояние, и исследовать устойчивость.

Синельщиковым А. В. и Юзиковым В. П. в [79] рассмотрена методика численного анализа систем с большим числом степеней свободы помощью МКЭ при расчете подъемных сооружений.

Ветюковым Ю. М. и Елисеевым В. В. в [20] представлена новая геометрически нелинейная теория тонкостенных стержней открытого профиля с учетом деформации и бимоента. Рассмотрен пример задачи об изгибно-крутильной потере устойчивости прямого стержня при сжатии в сравнении с классическим решением Эйлера, существующими решениями для тонкостенных стержней и численным решением в оболочечной постановке. Также ряд работ Ветюкова Ю. М., [21] и др. посвящен численному моделированию динамики движения (в т.ч. продольно-крутильного) буровых установок.

Осокиным А. В. в [67] Разработаны методика и алгоритмы построения матриц упругой жесткости конечного элемента тонкостенного стержня открытого профиля, при этом рассмотрены точная, приближенная и уточненная модели и проведен их сравнительный анализ. На основе предложенной модели конечного элемента тонкостенного стержня построена матрица геометрической жесткости применительно к случаю центрального и внецентренного сжатия или растяжения, а также поперечного изгиба. Получена матрица инерционных характеристик для решения задач собственных колебаний систем, состоящих из тонкостенных стержней открытого профиля. Разработаны методика и алгоритмы исследования деформированного состояния тонкостенных стержней открытого профиля в упругопластической стадии.

Юзиковым В. П., в [103] предложена методика учета сдвига срединной поверхности при расчете тонкостенных стержней открытого профиля. Получены дифференциальные уравнения изгиба и кручения, а также соответствующая матрица жесткости.

В работах Тананайко О. Д., Шварца М. А., Филина А. П., Черновой И. М. [85, 86] рассмотрены общие принципы построения разрешающих систем уравнений для статического расчета стержневых конструкций. Излагается общая теория тонкого стержня. Особое внимание уделено анализу топологических свойств расчетной схемы конструкции и методике получения систем уравнений метода сил со слабозаполненными матрицами.

Серпиком И. Н. в [78] исследованы вопросы механики тонкостенных конструкций с помощью одноуровневого многосеточного алгоритма раздельных и налагающихся местных деформаций для

расчетов по МКЭ в линейной постановке тонкостенных пространственных конструкций, которые могут включать пластины, оболочки и подкрепляющие их стержни.

Егоровым В. В. в [33] решены некоторые задачи по определению частот свободных изгибно-крутильных колебаний тонкостенных стержней вышеуказанного типа и исследуется их поведение в зависимости от геометрических, физических характеристик, а также и от уровня параметрической нагрузки.

6.3. Бистержневая модель тонкостенных конструкций

Несмотря на то, что в рассмотренных стержневых конечных элементах присутствует не 7, а всего лишь 6 степеней свободы в каждом узле, что, казалось бы, является неприемлемым для расчета тонкостенных стержней открытого профиля, использование обычных стержневых конечных элементов представляется возможным. Это достигается путем построения так называемой **бистержневой модели**, о которой изложено в разделе в книге Перельмутера А. В. и Сливкера А. И. [75], выдержку из которой приведем ниже.

При построении данной модели авторы исходят из энергетических соображений и рассматривают функционал (31).

Бистержневая модель состоит из двух стержней одинаковой длины l , которые названы основным и фиктивным стержнями (рисунок 30).

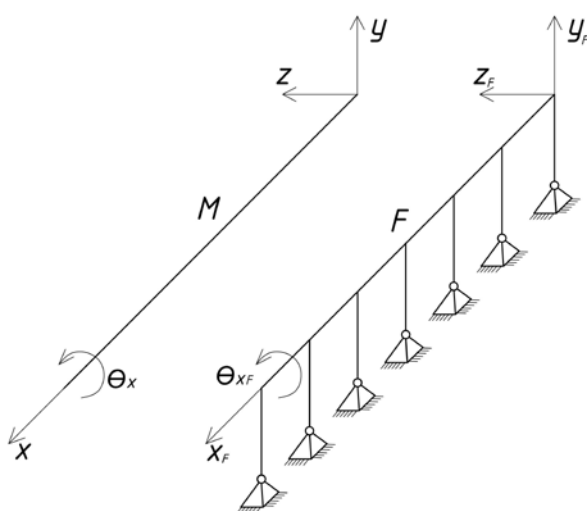


Рисунок 30. Основной и фиктивный стержни

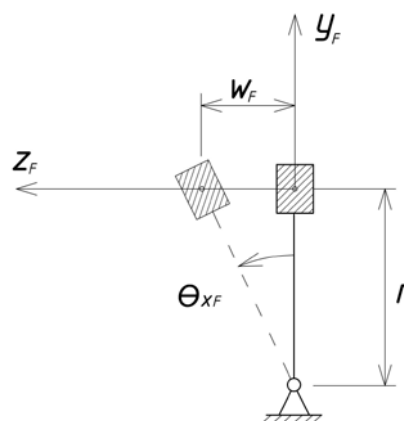


Рисунок 31. Механизм связи угла поворота и линейного смещения

Пусть (X, Y, Z) – местная система координат основного стержня, а (X_F, Y_F, Z_F) – фиктивного стержня. Оси X и X_F – продольные оси, а пары осей (Y, Z) и (Y_F, Z_F) – главные центральные оси инерции сечений основного и фиктивного стержней (рисунок 30).

Между перемещениями поперечных сечений стержней (основного и фиктивного) устанавливается связь, обеспечивающую равенство углов поворотов сечений этих двух стержней относительно осей X и X_F , то есть

$$\theta_x = \theta_{xF} \quad (55)$$

Кроме того, на перемещения фиктивного стержня накладываются внешние связи, препятствующие смещениям точек его продольной оси в осевом направлении (вдоль оси X_F) и в направлении одной из главных осей инерции – Y_F . Линейные перемещения фиктивного стержня вдоль другой главной оси связываются с углом закручивания θ_{xF} соотношением

$$\omega_F = r \theta_{xF}, \quad (56)$$

где ω_F - перемещение центра тяжести сечения фиктивного стержня в направлении оси Z_F , r - некоторая константа (рисунок 31).

На механическом уровне наложенные на фиктивный стержень внешние связи интерпретируются как подкрепление фиктивного стержня рядом абсолютно жестких «рычагов» (рисунок 30), направленных вдоль оси Y_F и имеющих длину r . Нижние концы рычагов закреплены от всех линейных перемещений и поворотов вокруг оси Z_F .

Таким образом, при закручивании основного стержня фиктивный стержень, благодаря установленным связям, получает поперечные перемещения w_F в направлении оси Z_F , вызывающие изгиб этого стержня относительно оси Y_F .

Энергия деформации E в построенной бистерженной модели является суммой энергий, накапливаемых порознь в основном и фиктивном стержнях. Если основной стержень наделить крутильной жесткостью GI , крутильную жесткость фиктивного стержня положить равной нулю, а жесткость фиктивного стержня при изгибе относительно Оси Y_F обозначить EI_{yF} , то функционал (31) будет выглядеть:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_{yF} (\omega_F'')^2 + GI_x (\theta_x')^2] dx, \quad (57)$$

что полностью совпадает с (31). Если учесть соотношения (55) и (56), то изгибную жесткость фиктивного стержня определить соотношение

$$EI_{yF} = EI_{\omega} / r^2. \quad (58)$$

Таким образом, построенная бистерженная модель энергетически эквивалентна исходному тонкостенному стержню.

Также в работе показано, что внутренние силы в фиктивном стержне можно интерпретировать как обобщенные усилия в исходном тонкостенном стержне, возникающие при стесненном кручении.

Действительно, для фиктивного стержня изгибающий момент относительно оси Y_F может быть записан в виде

$$M_{yF} = -EI_{yF} \omega_F''. \quad (59)$$

откуда с учетом все тех же зависимостей (55), (56), (57), получаем

$$B = r M_{yF}. \quad (60)$$

а секториальный крутящий момент M_{ω} , в свою очередь, получается дифференцированием бимоента B . Находим, что

$$Q_{zF} = M'_{yF}. \quad (61)$$

Далее, поперечная сила Q_{zF} является производной от момента M_{yF} , то есть

$$M_{\omega} = r Q_{zF}. \quad (62)$$

В практических расчетах удобно положить $r = 1$ в принятой системе единиц измерения длин.

Следует отметить, что при построении дискретной схемы бистерженной модели нельзя обеспечить выполнение условий связи (55) непрерывно вдоль всей оси X от нуля до l . Однако, разбив основной стержень по длине на некоторое количество (скажем, n) участков, устанавливаем тем самым на нем $(n + 1)$ узел, включая начальный и конечный узлы.

Пусть это будут узлы $M_1, M_2, \dots, M_{(n+1)}$. Разбивая теперь фиктивный стержень на точно такие же участки, образуем на нем соответствующие узлы $F_1, F_2, \dots, F_{(n+1)}$. Теперь непрерывные условия связи (55) можно приближенно заменить дискретными связями, заданными на конечном множестве точек с координатами $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, а именно в $n+1$ узлах основного и фиктивного стержней бистерженной модели. Соответственно и абсолютно жесткие рычаги в системе с дискретными связями сохраняются только в образованных узловых точках.

Таким образом, седьмая степень свободы, связанная с депланацией Θ' лишь внешне изменилась, превратившись в Θ_{yF} . Действительно, для бистерженной модели имеем

$$\theta'_x = \theta'_{xF} = \omega'_F / r = -\theta'_{yF} / r. \quad (63)$$

Однако, если θ'_x , нельзя напрямую связать с перемещениями узлов как жестких тел, то величина θ_{yF} естественным образом интерпретируется как повороты узлов фиктивного стержня относительно оси Y_f . Именно это обстоятельство и позволяет выполнять расчет тонкостенного стержня, оставаясь в рамках ограничений стандартного программного обеспечения, оперирующего конечными элементами с твердотельными узлами.

Если воспользоваться программным комплексом SCAD Office [43], то для задания связей вида

$$\theta_x(x_i) = \theta_{xF}(x_i). \quad (64)$$

гарантирующих равенство углов поворота соответствующих узлов основного и фиктивного стержней, имеется заложенный в эту программу специальный инструмент «объединение перемещений», реализованный в графической среде этой системы.

Если в используемой программе заложена возможность задания смещения оси центров сдвига относительно центроидной оси стержня, то можно в исходной информации к задаче опустить задание эксцентриситетов, описывающих рычаги, и заменить их заданием величины $e_{yF} = r$, где e_{yF} – смещение оси центров сдвига фиктивного стержня относительно его центроидной оси.

7. Основы полусдвиговой теории тонкостенных стержней Сливкера В. И.

В теории тонкостенных стержней открытого профиля, созданной многими учеными, но в своей наиболее общей и законченной форме обязанной трудам Власова В. З., в качестве одного из основополагающих постулатов служит гипотеза об отсутствии сдвигов в срединной поверхности тонкостенного стержня.

В процессе развития этой теории неоднократно возникали различного рода предложения по ее модификации, связанные с попытками отказа от гипотезы отсутствия сдвигов и учитывающие тем самым влияние деформаций сдвига на работу тонкостенного стержня в работах Ададурова [1], Джанелидзе и Пановко [30], Гольденвейзера, Воробьева [25], Мещерякова [62, 63].

Как известно, один из возможных способов построения приближенных теорий связан с разделением напряжений и деформаций на основные и второстепенные с последующим отбрасыванием в разрешающих уравнениях второстепенных компонент по сравнению с основными.

На уровне энергетического истолкования такое разделение соответствует пренебрежению энергией второстепенных компонент.

Если с этих позиций сопоставлять сдвиговую теорию тонкостенных стержней, изложенную в [80] с бессдвиговой теорией Власова В. З., то можно сказать, что в теории Власова В. З. в качестве основных компонент напряжений приняты нормальные напряжения σ_x и кососимметричные касательные напряжения от чистого кручения τ_k .

$$E_{полн} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{B_\omega^2}{EI_\omega} + \frac{H^2}{GI_d} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{Q_y^2}{GF_y} + \frac{Q_z^2}{GF_z} + \frac{M_\omega^2}{r^2 GF_\omega} + \frac{2Q_y Q_z}{GF_{yz}} + \frac{2Q_y Q_\omega}{r GF_{y\omega}} + \frac{2Q_z Q_\omega}{r GF_{z\omega}} \right) dx \quad (65)$$

$$E_V = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{B_\omega^2}{EI_\omega} + \frac{H^2}{GI_d} \right) dx \quad (66)$$

Что же касается касательных напряжений, распределенных равномерно по толщине стенки профилей, то они отнесены к второстепенным компонентам напряжений

В 2005 г. **Владимиром Исаевичем Сливкером** (1937-2011г.г.) в книге «Вариационные основы строительной механики» [80], а позже в отдельных главах книги по устойчивости в трех томах [69, 70, 71], была предложена **полусдвиговая теория тонкостенных стержней**.

В данной теории к основным напряжениям относятся, помимо нормальных, только касательные напряжения кручения τ_k и τ_ω .

Теория В.И. Сливкера, по сравнению с теорией В.З. Власова, имеет ряд достоинств:

1. Полусдвиговая теория подходит для стержней как открытого, так и замкнутого (а также открыто-замкнутого и многоконтурного) профилей ввиду схожести дифференциальных уравнений по теориям Сливкера В. И. и Уманского А. А., что дает возможность использования единой расчетной схемы в комбинированных конструкциях из открытых и замкнутых профилей;

2. Полусдвиговая теория является более простой и по сравнению с бессдвиговой теорией В.З. Власова с точки зрения реализации метода конечных элементов, поскольку функции перемещений (кручение и деформация) являются независимыми.

Итак, в полусдвиговой теории принято следующее выражение для энергии деформации:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{B_\omega^2}{EI_\omega} + \frac{H^2}{GI_d} + \frac{M_\omega^2}{r^2 GF_\omega} \right) dx, \quad (67)$$

где: r – полярный радиус инерции сечения:

$$r = \sqrt{\frac{I_r}{A}}; \quad (68)$$

F_ω – условная площадь среза вследствие стесненного кручения:

$$F_\omega = \frac{1}{\mu_{\omega\omega}} A; \quad (69)$$

$\mu_{\omega\omega}$ – коэффициент влияния формы сечения:

$$\mu_{\omega\omega} = \frac{I_r}{I_\omega^2} \int_{(l)} \frac{S_{\omega\omega}^2}{\delta} ds, \quad (70)$$

где I_r – полярный момент инерции; I_d – момент инерции при кручении; $S_{\omega\omega}$ – статический секториальный момент (9); I_ω – секториальный момент инерции (13); δ – толщина профиля; ω – секториальная координата (10):

Основные неизвестные полусдвиговой теории стесненного кручения совпадают с основными неизвестными теории Власова В. З. (часть 3 данной статьи).

Основные уравнения полусдвиговой теории стесненного кручения:

1. Уравнения равновесия

$$-H' - M_\omega' = m_x \quad (71)$$

$$-B_\omega' + M_\omega = m_B \quad (72)$$

Также совпадающие с уравнениями бессдвиговой теории Власова В. З.

2. Геометрические уравнения

$$\chi_x = \theta'; \chi_B = -\beta'; \gamma_\omega = \theta' - \beta' \quad (73)$$

3. Физические уравнения

$$M_\omega = \frac{GI_d}{\psi - 1} (\theta' - \beta') \quad (74)$$

$$H = GI_d \theta' \quad (75)$$

$$B_\omega = -EI_\omega \beta' \quad (76)$$

Окончательно система разрешающих уравнений равновесия, с учетом деформаций растяжения/сжатия и изгиба принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} EA\xi'' = q_x \\ -EI_y\zeta^{IV} + q_z = 0 \\ -EI_z\eta^{IV} + q_y = 0 \\ -EI_\omega\beta'' + \frac{r^2GA}{\mu_{\omega\omega}}(\theta' - \beta) = 0 \\ GI_d\theta'' - \frac{r^2GA}{\mu_{\omega\omega}}(\theta'' - \beta') = m_x + m'_B \end{array} \right. \quad (77)$$

Как видно из (77), для полусдвиговой теории задачи изгиба и кручения разделяются.

Кроме того, задачу стесненного кручения, описываемого двумя последними уравнениями системы (77), легко свести к одному дифференциальному уравнению третьего порядка относительно функции β .

Продифференцировав последнее уравнение (77) по x , выразив оттуда получившееся θ'' и подставив в предпоследнее уравнение (77), получим:

$$EI_\omega\left(1 + \frac{I_r}{\mu_{\omega\omega}I_d}\right)\beta'' - \frac{GI_r}{\mu_{\omega\omega}}\beta' = \frac{I_r}{\mu_{\omega\omega}I_d}m_x + \left(1 + \frac{I_r}{\mu_{\omega\omega}I_d}\right)m'_B \quad (78)$$

Введя безразмерный геометрический параметр ψ , получим единое дифференциальное уравнение для стесненного кручения в полусдвиговой теории:

$$\psi EI_\omega\beta'' - GI_d\beta' = m_x + \psi m'_B, \quad (79)$$

$$\text{где } \psi = 1 + \frac{\mu_{\omega\omega}I_d}{I_r}$$

Функционал энергии деформации будет выглядеть следующим образом:

$$E(\theta, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_\omega(\beta')^2 + GI_d(\theta')^2 + \frac{GI_d}{\psi - 1}(\theta' - \beta)^2) dx, \quad (80)$$

Как видно из формулы (80), вследствие независимости в функционале функций θ и β вместо вторых производных в функционале присутствуют только первые

Теория, рассмотренная в данном параграфе, учитывающая часть энергии сдвига (третье слагаемое подынтегрального выражения (80)), и подходящая для расчета тонкостенных стержней не только открытого, но и замкнутого профилей, в методе конечных элементов в настоящее время реализована в работах [57, 58]

Также следует отметить, что вышеописанная теория по своей сути является переносом на теорию тонкостенных стержней, соответствующей процедуры, иногда используемой при переходе от теории балок Бернулли-Эйлера к теории балок Тимошенко [87, 88] и при переходе от теории изгиба пластин Кирхгоффа к теории Рейсснера. Такая схема рассуждений в части учета деформаций сдвига в теории тонкостенных стержней, впервые предпринятая, по мнению Сливкера В. И. [80], в работе Воробьева Л. Н. [25], приводит к одному из наиболее простых вариантов сдвиговой теории тонкостенных стержней.

Заключение

Итак, в статье рассмотрены особенности и проблемы анализа напряженно-деформированного состояния в элементах тонкостенных каркасных конструкций открытого и замкнутого профилей, а также некоторых специфических эффектах их работы (депланация поперечного сечения, «бимоментное» распределение нормальных напряжений по сечению).

Показана на конкретных примерах неприменимость гипотезы плоских сечений при анализе напряженно-деформированного состояния тонкостенных стержней.

Предложено использование полусдвиговой теории Сливкера В. И. в качестве теории, позволяющей применять единый алгоритм при расчете тонкостенных конструкций из стержней открытого, замкнутого и

комбинированного профилей, что является важным при использовании метода конечных элементов и современных информационных технологий.

В связи с этим вытекающей из материалов статьи научной задачей является реализация метода конечных элементов для анализа напряженно-деформированного состояния тонкостенных стержневых систем открытого и замкнутого профиля по полусдвиговой теории стесненного кручения; соответствующей данной научной задачей является следующая практическая задача: разработка алгоритма и программы по вычислению внутренних усилий и перемещений в тонкостенных стержневых системах

Литература

1. Ададуров Р. А. Определение касательных напряжений в тонкостенных конструкциях вблизи заделки // Труды ЦАГИ. 1947. № 614. С. 1-13.
2. Айрумян Э. Л., Белый Г. И. Исследование работы стальной фермы из холодногнутых профилей с учетом их местной и общей устойчивости // Промышленное и гражданское строительство. 2010. № 5. С. 41-44.
3. Айрумян Э. Л., Каменщиков Н. И. Рамные конструкции стального каркаса из оцинкованных гнутых профилей для одноэтажных зданий различного назначения // Мир строительства и недвижимости. 2006. №36. С. 9-11.
4. Александров В. Г. Расчет тонкостенных неразрезных балок на совместное действие изгиба и кручения при подвижной нагрузке / дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н. Спец.: 05.23.01. Ростов н/Д, 1948. 130 с.
5. Альхименко А. И., Ватин Н. И., Рыбаков В. А. Технология легких стальных тонкостенных конструкций. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 27с.
6. Анучкин А. П. Изыскание оптимальных форм балок и колонн из тонкостенных штампованных профилей / дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н. Спец.: 05.23.01. М., 1949. 169 с.
7. Бейлин Е. А. Общие уравнения деформационного расчета и устойчивости тонкостенных стержней // Строительная механика и расчет сооружений. 1967. №4. С. 1-3.
8. Бейлин Е. А. Статика и динамика тонкостенных криволинейных стержней произвольного профиля // Известия вузов. Строительство. 1997. № 7. С. 19-26.
9. Бейлин Е. А. Элементы теории кручения тонкостенных стержней произвольного профиля – С.Пб: Изд-во СПбГАСУ, 2003. 113 с.
10. Белый А. Г. Деформационный расчет и устойчивость тонкостенных призматических стержней произвольного профиля сжатых с двухосным эксцентриситетом / дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н., Спец.: 05.23.17. СПб., 2000. 114 с.
11. Белый Г. И. Влияние эксцентричного опирания концов и уровня приложения нагрузки на устойчивость плоской формы изгиба тонкостенного криволинейного стержня // Сб.трудов ЛИСИ. 1974. С. 18-25.
12. Белый Г. И. Расчет упругопластических тонкостенных стержней по пространственно-деформируемой схеме // Межвуз. темат. сб. тр. 1983. №42 (Строительная механика сооружений). С. 40-48.
13. Брудка Я., Лубиньски М. Легкие стальные конструкции. Изд. 2-е, доп, Пер. с польск. / Под ред. С.С. Кармилова. М., Стройиздат, 1974. 342с.
14. Бычков Д. В., Мрощинский А. К. Кручение металлических балок / Д.В. Бычков М.: Стройиздат, 1944. 260 с.
15. Бычков Д. В. Расчет балочных и рамных стержневых систем из тонкостенных элементов. М.: Стройиздат, 1948. 208 с.
16. Бычков Д. В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций / Д.В. Бычков. М.: Госстройиздат, 1962. 476 с.
17. Конструирование зданий и сооружений. Легкие стальные тонкостенные конструкции: учеб. руководство / Ватин Н. И., Жмарин Е. Н., Куражова В. Г., Усанова К. Ю. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 266 с.
18. Ватин Н. И., Попова Е. Н. Термопрофиль в легких стальных тонкостенных конструкциях. СПб.:Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 63с.
19. Ватин Н. И., Рыбаков В. А. Расчет металлоконструкций: седьмая степень свободы // Журнал «СтройПРОФИль». 2007. № 3(57). С.32-35.
20. Ветюков Ю. М., Елисеев В. В. Упругие деформации и устойчивость равновесия тонкостенных стержней открытого профиля // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 2007. № 52-1. С. 49-53.
21. Ветюков Ю. М. Крутильно-продольные колебания бурильной колонны с долотом режущего типа: / дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н., Спец.: 01.02.06. СПб., 2004. 137 с.

22. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни (прочность, устойчивость, колебания) М.:Стройиздат, 1940. 276 с.
23. Власов В. З. Избранные труды Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 507 с.
24. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
25. Воробьев Л. Н. Деформационный расчет и устойчивость тонкостенных стержней открытого профиля // Сб.научн.тр. Новочеркасского политехнического института. 1958. Том 69/83. С.3-48.
26. Горбунов Б. Н., Стрельбицкая А. И. Теория рам из тонкостенных стержней. М.: Гостехиздат, 1948. 198 с.
27. Гордеева А. О., Ватин Н. И. Расчетная конечно-элементная модель холодногнутого перфорированного тонкостенного стержня в программно-вычислительном комплексе SCAD Office // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3(21). С. 36-46
28. Гуркова М. А. Кручение тонкостенного стержня открытого и замкнутого профиля и автоматизация процесса расчета / дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н., Спец.: 05.23.17. М., 2000. 168 с.
29. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1986. 607 с.
30. Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г. Статика упругих тонкостенных стержней. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 208 с.
31. Дьяков И. Ф., Чернов С. А. К расчету оболочки, укрепленной тонкостенными стержнями // Автоматизация и современные технологии: ежемесячный межотраслевой научно-технический журнал. 2008. №1. С. 16-20.
32. Дьяков С. Ф., Лалин В. В. Построение и анализ конечных элементов тонкостенного стержня открытого профиля с учетом деформации сдвига при кручении // Вестник Пермского государственного технического университета. Охрана окружающей среды, транспорт, безопасность жизнедеятельности. 2011. № 2. С. 130-148.
33. Егоров В. В. Свободные колебания тонкостенных криволинейных стержней произвольного профиля, нагруженных параметрической нагрузкой / дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н., Спец.: 05.23.17. СПб, 2001. 127 с.
34. Жмарин Е. Н., Рыбаков В. А. ЛСТК – инструмент для реализации программы «Доступное и комфортное жилье» // Журнал «СтройПРОФИль». 2007. № 6(60), № 7(61). С. 166-167.
35. Закон Санкт-Петербурга от 05.05.2006 N 221-32 "О жилищной политике Санкт-Петербурга" (принят ЗС СПб 26.04.2006. ред. от 02.11.2007).
36. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Пер. с англ./ под ред. Победри Б. Е. М.: Мир, 1975. 511 с.
37. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. Пер. с англ./ под ред. Бахвалова Н. С. М.: Мир, 1986. 318 с.
38. Золотарева Е. А., Петров К. В., Рыбаков В. А. Обоснование целесообразности реконструкции жилых домов фонда первых массовых серий (ФПМС) с надстройкой мансардных этажей // XXXVIII Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. Ч.1. 2009. С. 206-207.
39. Иванов В. Н. Геометрические исследования, формообразование, разработка методов расчета и численный анализ напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек сложной формы с системой плоских координатных линий / дисс. на соиск. учен. степ. д.т.н., Спец.: 05.23.17. Москва, 2006. 394 с.
40. Икрин В. А. Соппротивление материалов с элементами теории упругости и пластичности: Учебник для студентов, обучающихся по направлению 653500 «Строительство». М: Изд.АСВ, 2004. 424 с.
41. Каменских И. В. Математическое и численное моделирование задач устойчивости тонкостенных конструкций методом модуль-элементов / дисс. на соиск. учен. степ. д.ф-м. н. Спец: 05.13.18. Комсомольск-на-Амуре, 2004. 210 с.
42. SCAD OFFICE. Формирование сечений и расчет их геометрических характеристик / Карпиловский В. С., Криксунов Э. З., Перельмутер А. В., Перельмутер М. А. М: Издательство АСВ, 2004. 80с.
43. Карпиловский В. С., Криксунов Э. З., Маляренко А. А., Перельмутер А. В., Перельмутер М. А. Вычислительный комплекс SCAD. М: Издательство АСВ, 2007. 592с.
44. Катранов И. Г. Испытания и расчет винтовых соединений легких стальных тонкостенных конструкций на растяжение // Вестник МГСУ. 2010. № 2. С. 89-93.

45. Клименко А. Н., Распорский В. В., Рыбаков В. А. Легкие стальные тонкостенные термopанели как наружные ограждающие конструкции // XXXVIII Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. Ч.1. 2009. С.208-209.
46. Константинов И. А. Строительная механика: учебник / Константинов И. А., Лалин В. В., Лалина И. И.; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. М. : [Проспект] : [Кнорус], 2010. 425 с.
47. Константинов И. А. Теория упругости. Расчет плоских элементов сооружений с использованием программы SCAD : учеб. пособие / Константинов И. А., Лалин В. В., Лалина И. И.; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 87 с.
48. Константинов И. А. Строительная механика: Расчет стержневых систем с использованием программы SCAD: учебно-методический комплекс / Константинов И. А., Лалин В. В., Лалина И. И.; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 449 с.
49. Константинов И. А. Строительная механика. Расчет стержневых систем с использованием программы SCAD: учебное пособие / Константинов И. А., Лалин В. В., Лалина И. И.; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008-2009. Ч.2: Учебно-методический комплекс . 2009. 227 с.
50. Кузьменко Д. В., Ватин Н. И. Ограждающая конструкция «нулевой» толщины – термopанель // Инженерно-строительный журнал. 2008. №1. С.13-21.
51. Кузьмин Н. А., Лукаш П. А., Милейковский И. Е. Расчет конструкций из тонкостенных стержней и оболочек. М.: Госстройиздат, 1960. 264 с.
52. Куражова В. Г., Назмеева Т. В. Виды узловых соединений в легких стальных тонкостенных конструкциях // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3(21). С. 47-52.
53. Куц А. С., Рыбаков В. А. Обоснование конструктивных и технологических решений при реконструкции зданий старого фонда с надстройкой мансард // XXXVIII Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. Ч.1. 2009. С. 210-211.
54. Лалин В. В., Колосова Г. С. Курс лекций по теории упругости: учеб. пособие; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 135 с.
55. Лалин В. В. Различные формы уточнения нелинейной динамики упругих стержней // Механика материалов и прочность конструкций. Труды СПбГПУ №489, СПб. Изд-во СПбГПУ, 2004, С.121-128
56. Лалин В. В., Колосова Г. С. Численные методы в строительстве. Решение одномерных задач методом конечных элементов: Учеб.пособие; СПбГТУ . Санкт-Петербург. Изд-во СПбГТУ, 2001. 72 с.
57. Лалин В. В., Рыбаков В. А. Конечные элементы для расчета ограждающих конструкций из тонкостенных профилей // Инженерно-строительный журнал. 2011. №8(26). С. 69-80.
58. Лалин В. В., Рыбаков В. А., Морозов С. А. Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем // Инженерно-строительный журнал. 2011. №1(27). С. 53-73.
59. Лимаренко А. М. Моделирование и методы расчета корпусных деталей станков / дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н. Спец.: 05.02.02. Одесса, 2008.
60. Малинин М. Ю. Исследование напряженно-деформированного состояния пространственных тонкостенных конструкций сложной геометрии методом конечных элементов / дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н. Спец.:01.02.04. Брежнев, 1984. 153 с.
61. Мельников Б. Е., Семенов А. С., Семенов С. Г. Многомодельный анализ упругопластического деформирования ортотропного металла с изотропным упрочнением. Современное состояние // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. 2010. №53. С. 48-57
62. Мещеряков В. Б. О кручении тонкостенных стержней // Сб. научн. тр. Моск. ин-т. инж. ж-д. тр-та. 1967. Вып.236. С.77-85.
63. Мещеряков В. Б. Общие уравнения теории тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвигов // Сб.научн.тр. Моск. ин-т. инж. ж-д. тр-та. 1967. Вып.236. С.77-85.
64. Назмеева Т. В. Обеспечение пространственной жесткости покрытия в зданиях из ЛСТК // Инженерно-строительный журнал. 2009. №6(8). С. 12-15.
65. Никольчак М. В., Беженар И. С., Рыбаков В. А. Обоснование целесообразности применения технологии легких стальных тонкостенных конструкций в коттеджном строительстве // XXXVIII Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. 2009. Ч.1. С.219.
66. Оробей В.Ф., Сурьянинов Н. Г., Лимаренко А. М. Анализ напряженно-деформированного состояния тонкостенного стержня открытого профиля в программе ANSYS // Труды ОГАСА. 2005. Вып.17. С.195-200.

67. Осокин А. В. Развитие метода конечных элементов для расчета систем, включающих тонкостенные стержни открытого профиля / дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н. Спец.: 05.23.17. М., 2010. 134 с.
68. Сопротивление материалов: учебное пособие / Павлов П. А., Паршин Л. К., Мельников Б. Е., Шерстнев В. А. // Под ред. Б.Е. Мельникова. 2-е изд., испр. и доп. СПб.: Изд. "Лань", 2007г. 560 с.
69. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010. Том 1. 704 с.
70. Перельмутер А. В., Сливкер В. И., Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010. Том 2. 672 с.
71. Перельмутер А.В., Сливкер В.И., Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. т. 3/ А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. М: Изд-во СКАД СОФТ, 2011. 388 с.
72. Постановление Правительства Санкт-Петербурга от 10.02.2000 N 4 "О региональной программе реконструкции жилых домов первых массовых серий в Санкт-Петербурге"
73. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций/ В.А. Постнов. Л.: Судостроение, 1974. 344 с.
74. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций/ В.А. Постнов. – Л.: Судостроение., 1974. 342 с.
75. Перельмутер А. В., Сливкер, В. И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. М.: Изд-во ДМК Пресс. 2002. 618 с.
76. Рыбаков В. А. Основы строительной механики легких стальных тонкостенных конструкций: учеб. Пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2011. 207 с.
77. Семенов А. С., Мельников Б. Е., Горохов М. Ю. Циклическая неустойчивость при расчетах больших упругопластических деформациях // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного технического университета. 2003. Т. 33. №3. С.129
78. Серпик И. Н. Одноуровневые многосеточные алгоритмы решения задач строительной механики тонкостенных конструкций / дисс. на соиск. учен. степ. д.т.н. Спец.: 05.23.17. Брянск. 1999.
79. Синельщиков А. В., Юзиков В. П. // Математическая модель тонкостенного стержневого конечного элемента с прямолинейной осью и переменным сечением // Промышленное и гражданское строительство (ПГС). 2007. №9. С. 19-21.
80. Сливкер В. И. Строительная механика. Вариационные основы. Учебное пособие. М.:Изд-во АСВ, 2005. 736 с.
81. Смазнов Д. Н. Устойчивость при сжатии составных колонн, выполненных из профилей из высокопрочной стали // Инженерно-строительный журнал. 2009. №3(5). С. 42-49.
82. Смазнов Д. Н. Конечноеэлементное моделирование работы жестких вставок тонкостенных холодноформованных стальных профилей // Научный журнал КубГАУ. 2011. №67(03). С. 1-13.
83. СП 16.13330.2011 Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81
84. Сурьянинов Н. Г. Обобщение метода граничных элементов к расчету стержней, пластин и оболочек / дисс. на соиск. учен. степ. д.т.н. Спец.: 01.02.04. Луцк, 2010.
85. Тананайко О. Д., Шварц М. А. Смешанный метод расчета стержневых систем на прочность, колебания и устойчивость // Тр. ЛИИЖТ. 1976. Вып. 40. С. 23-28.
86. Тананайко О. Д., Шварц М. А. О выборе системы замкнутых контуров и их рациональной нумерации при расчете стержневых конструкций методом сил //Автоматизированное оптимальное проектирование конструкций. 1977. С.58-64.
87. Тимошенко С. П. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки // Изв. С Петербургского политех. института. 1905. т.4.вып.3-4., 1906. т.5. вып. 1-4.
88. Тимошенко С. П. Об устойчивости упругих систем // Изв. Киевского политехнического института. 1910. Кн.4. 182 с.
89. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов: с краткими сведениями из теории упругости и теории сооружений: Пер. с англ./ Под ред. А.Н. Митинского. Изд. 2-е, стереотипное. М.: КомКнига, 2006. 536с.
90. Тугаев А. С. Устойчивость пластин и тонкостенных стержней / дисс. на соиск. учен. степ. к.т.н. Спец.: 01.02.03. М, 2007.
91. ТУ 1121-001-1383-0080-2003. Профили стальные оцинкованные для системы каркасного строительства (ООО «Балтпрофиль»).

92. Туснин А. Р. Расчет и проектирование конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля / автореферат на соиск. учен. степ. к.т.н. Спец.: 05.23.01. М., 2004. 37 с.
93. Уманский А. А. Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций. М.:Оборонгиз, 1939. 112 с.
94. Хайруллин Ф. С. Вариационные методы расчета тонкостенных конструкций сложной формы на основе аппроксимирующих функций произвольного порядка с конечными носителями / дисс. на соиск учен. степ. ф-м. наук. Спец.: 01.02.04. Казань, 2007. 267 с.
95. Чернов С. А., Дьяков И. Ф. К расчету пространственной тонкостенной стержневой системы // Автоматизация и современные технологии: ежемесячный межотраслевой научно-технический журнал. 2008. №2. С. 3-6.
96. Шатов Д. С. Конечноеэлементное моделирование перфорированных стоек открытого сечения из холодногнутых профилей // Инженерно-строительный журнал. 2011. №3(21). С. 32-35.
97. Шварцман Б. С. Экстраполяционный метод нахождения численных решений с заданной точностью // Строительная механика и расчёт сооружений. 1992. С. 157-162.
98. Шишкин В. М. Разработка эффективных методов расчета тонкостенных конструкций с учетом пластических и демпфирующих свойств материала / дисс. на соиск. учен. степ. д.т.н. Спец.: 05.13.18. Казань, 2008. 414 с.
99. Юрченко В. В. Проектирование каркасов зданий из тонкостенных холодногнутых профилей в среде SCAD Office // Инженерно-строительный журнал. 2010. №8(18). С. 38-46.
100. Яваров А. В., Беляев Д. И., Лалин В. В. Расчет конструкций с односторонними связями в интегрированном программном комплексе SOFiSTiK. // Международный научно-практический семинар «Системы автоматизированного проектирования на транспорте». ПГУПС, 2010, С. 80-84
101. Экспериментально-теоретическое определение несущей способности металлических стеллажей [Электронный ресурс] / М.Ю. Горохов, Б.Е. Мельников, В.А. Шерстнев, А.С. Семенов . Электрон. текстовые дан. (1 файл : 116 Кб) // Материалы Недели науки СПбГПУ 24 - 29 ноября 2003г. Систем. Требования: Adobe Acrobat Reader 4.0. URL:<http://www.unilib.neva.ru/dl/004068.pdf> (дата обращения: 12.12.2012).
102. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424с.
103. Юзиков В. П. Завьялова О. Б. Расчет тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвига срединной поверхности // Известия вузов. Строительство. 2011. N 1. С. 108-115.
104. Cheng Y., Schafer B. W. Distortional buckling of cold-formed steel members in bending. Maryland: American Iron and Steel Institute Baltimore, 2005. 213 p.
105. Kacianauskas R., Samofalov M. Semi-analytical finite elements for the stability analysis of thin-walled beams/ R. Kacianauskas // Conference on Computational Mechanics. June 26-29, 2001 Cracow. Poland
106. Saade K. Finite element modeling of shear in thin walled beams with a single warping function. Bruxellesl, 2005. 134 p.
107. Sedlacek G., Bild, J. Ungermann, D. On the buckling of plates - Some recent developments in light weight structures // 4th international conference on aluminium weldments, Tokyo. 1988. Pp.10-17.
108. Schafer, B.W. Local, distortional, and euler buckling of thin-walled columns // Journal of structural engineering. 2002. 11 p.
109. Schafer W., Pekoz T. Computational modeling of cold-formed steel: characterizing geometric imperfections and residual stresses/ W. Schafer // Journal of Constructional Steel Research. №47. 1998. Pp.193–210.
110. Semenov A.S., Melnikov B.E., Gorokhov M.Yu., Ulbricht, V. Prevention of cyclic instability at the modeling of elasto-plastic deformation at large strains under proportional and non-proportional loading // Proc. of 9th International Workshop on Nondestructive Testing and Computer Simulations in Science and Engineering. Poland. Nanodesign, Technology, and Computer Simulations. Proc. of SPIE. Washington. 2007. Vol. 6597. Pp. 6597101-6597118.

References

1. Adadurov R. A. *Opredelenie kasatel'nyh naprjazhenij v tonkostennyh konstrukcijah vblizi zadelki* // *Trudy CAGI*. 1947. № 614. S. 1-13. (rus)
2. Ajrumjan Je. L., Belyj G. I. *Issledovanie raboty stal'noj fermy iz holodnognutyh profilej s uchetom ih mestnoj i obshhej ustojchivosti* // *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*. 2010. № 5. S. 41-44. (rus)
3. Ajrumjan Je. L., Kamenshhikov N. I. *Ramnye konstrukcii stal'nogo karkasa iz ocinkovannyh gnutyh profilej dlja odnojetazhnyh zdaniy razlichnogo naznacheniya* // *Mir stroitel'stva i nedvizhimosti*. 2006. №36. S. 9-11. (rus)

4. Aleksandrov V. G. Raschet tonkostennyh nerazreznih balok na sovmestnoe dejstvie izgiba i kruchenija pri podvizhnoj nagruzke / diss. na soisk. uchen. step. k.t.n. Spec.: 05.23.01. Rostov n/D, 1948. 130 s. (rus)
5. Al'himenko A. I., Vatin N. I., Rybakov V. A. Tehnologija legkih stal'nyh tonkostennyh konstrukcij. SPb: Izd-vo Politehn. un-ta, 2008. 27 s. (rus)
6. Anuchkin A. P. Izyskanie optimal'nyh form balok i kolonn iz tonkostennyh shtampovannyh profilej / diss. na soisk. uchen. step. k.t.n. Spec.: 05.23.01. M., 1949. 169 s. (rus)
7. Bejlin E. A. Obschie uravnenija deformatsionnogo rascheta i ustojchivosti tonkostennyh sterzhnej // Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij. 1967. №4. S. 1-3. (rus)
8. Bejlin E. A. Statika i dinamika tonkostennyh krivolinyjnyh sterzhnej proizvol'nogo profilja // Izvestija vuzov. Stroitel'stvo. 1997. № 7. S. 19-26.
9. Bejlin E. A. Jelementy teorii kruchenija tonkostennyh sterzhnej proizvol'nogo profilja – S.Pb: Izd-vo SPbGASU, 2003. 113 s. (rus)
10. Belyj A. G. Deformatsionnyj raschet i ustojchivost' tonkostennyh prizmaticheskikh sterzhnej proizvol'nogo profilja szhatyh s duhosnym jekscentrisitetom / diss. na soisk. uchen. step. k.t.n., Spec.: 05.23.17. SPb., 2000. 114 s. (rus)
11. Belyj G. I. Vlijanie jekscentrichnogo opiraniya koncov i urovnja prilozhenija nagruzki na ustojchivost' ploskoj formy izgiba tonkostennogo krivolinyjnogo sterzhnja // Sb.trudov LISI. 1974. S. 18-25. (rus)
12. Belyj G. I. Raschet uprugoplasticheskikh tonkostennyh sterzhnej po prostranstvenno-deformiruemoj sheme // Mezhvuz. temat. sb. tr. 1983. №42 (Stroitel'naja mehanika sooruzhenij). S. 40-48. (rus)
13. Brudka Ja., Lubin'ski M. Legkie stal'nye konstrukcii. Izd. 2-e, dop, Per. s pol'sk. / Pod red. S.S. Karmilova. M., Strojizdat, 1974. 342 s. (rus)
14. Bychkov D. V., Mroshhinskij A. K. Kruchenie metallicheskih balok / D.V. Bychkov M.: Strojizdat, 1944. 260 s. (rus)
15. Bychkov D. V. Raschet balochnyh i ramnyh sterzhnevnyh sistem iz tonkostennyh jelementov. M.: Strojizdat, 1948. 208 s. (rus)
16. Bychkov D. V. Stroitel'naja mehanika sterzhnevnyh tonkostennyh konstrukcij / D.V. Bychkov. M.: Gosstrojizdat, 1962. 476 s. (rus)
17. Konstruirovanie zdaniy i sooruzhenij. Legkie stal'nye tonkostennye konstrukcii: ucheb. rukovodstvo / Vatin N. I., Zhmarin E. N., Kurazhova V. G., Usanova K. Ju. SPb.: Izd-vo Politehn. un-ta, 2012. 266 s. (rus)
18. Vatin N. I., Popova E. N. Termoprofil' v legkih stal'nyh tonkostennyh konstrukcijah. SPb.:Izd-vo Politehn. un-ta, 2006. 63 s. (rus)
19. Vatin N. I., Rybakov V. A. Raschet metallokonstrukcij: sed'maja stepen' svobody // Zhurnal «StrojPROFIL». 2007. № 3(57). S.32-35. (rus)
20. Vetjukov Ju. M., Eliseev V. V. Uprugie deformacii i ustojchivost' ravnovesija tonkostennyh sterzhnej otkrytogo profilja // Nauchno-tehnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta. 2007. № 52-1. S. 49-53. (rus)
21. Vetjukov Ju. M. Krutyl'no-prodol'nye kolebanija buril'noj kolonny s dolotom rezhushhego tipa: / diss. na soisk. uchen. step. k.t.n., Spec.: 01.02.06. SPb., 2004. 137 s. (rus)
22. Vlasov V. Z. Tonkostennye uprugie sterzhni (prochnost', ustojchivost', kolebanija) M.:Strojizdat, 1940. 276 s. (rus)
23. Vlasov V. Z. Izbrannye trudy T. 2. M.: Izd-vo AN SSSR, 1963. 507 s. (rus)
24. Vlasov V. Z. Tonkostennye uprugie sterzhni. M.: Fizmatgiz, 1959. 568 s. (rus)
25. Vorob'ev L. N. Deformatsionnyj raschet i ustojchivost' tonkostennyh sterzhnej otkrytogo profilja // Sb.nauchn.tr. Novocherkasskogo politehnicheskogo instituta. 1958. Tom 69/83. S.3-48. (rus)
26. Gorbunov B. N., Strel'bickaja A. I. Teorija ram iz tonkostennyh sterzhnej. M.: Gostehizdat, 1948. 198 s. (rus)
27. Gordeeva A. O., Vatin N. I. Raschetnaja konechno-jelementnaja model' holodnognutogo perforirovannogo tonkostennogo sterzhnja v programmno-vychislitel'nom komplekse SCAD Office // Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2011. №3(21). S. 36-46. (rus)
28. Gurkova M. A. Kruchenie tonkostennogo sterzhnja otkrytogo i zamknutogo profilja i avtomatizacija processa rascheta / diss. na soisk. uchen. step. k.t.n., Spec.: 05.23.17. M., 2000. 168 s. (rus)
29. Darkov A. V., Shaposhnikov N. N. Stroitel'naja mehanika. M.: Vysshaja shkola, 1986. 607 s. (rus)

30. Dzhaneldze G. Ju., Panovko Ja. G. Statika uprugih tonkostennyh sterzhnej. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1948. 208 s. (rus)
31. D'jakov I. F., Chernov S. A. K raschetu obolochki, ukreplennoy tonkostennymi sterzhnjami // Avtomatizacija i sovremennye tehnologii: ezhemesjachnyj mezhotraslevoj nauchno-tehnicheskij zhurnal. 2008. №1. S. 16-20. (rus)
32. D'jakov S. F., Lalin V. V. Postroenie i analiz konechnyh jelementov tonkostennogo strezhnja otkrytogo profilya s uchetom deformacii sdviga pri kruchenii // Vestnik Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ohrana okruzhajushhej sredy, transport, bezopasnost' zhiznedejatel'nosti. 2011. № 2. S. 130-148. (rus)
33. Egorov V. V. Svobodnye kolebanija tonkostennyh krivolinejnyh sterzhnej proizvol'nogo profilya, zagruzhennyh parametricheskoy nagruzkoy / diss. na soisk. uchen. step. k.t.n., Spec.: 05.23.17. SPb, 2001. 127 s. (rus)
34. Zhmarin E. N., Rybakov V. A. LSTK – instrument dlja realizacii programmy «Dostupnoe i komfortnoe zhil'e» // Zhurnal «StrojPROfil'». 2007. № 6(60), № 7(61). S. 166-167. (rus)
35. Zakon Sankt-Peterburga ot 05.05.2006 N 221-32 "O zhilishhnoj politike Sankt-Peterburga" (prinjat ZS SPb 26.04.2006. red. ot 02.11.2007). (rus)
36. Zenkevich O. Metod konechnyh jelementov v tehnike. Per. s angl./ pod red. Pobedri B. E. M.: Mir, 1975. 511 s. (rus)
37. Zenkevich O., Morgan K. Konechnye jelementy i approksimacija. Per. s angl./ pod red. Bahvalova N. S. M.: Mir, 1986. 318 s. (rus)
38. Zolotareva E. A., Petrov K. V., Rybakov V. A. Obosnovanie celesobraznosti rekonstrukcii zhilyh domov fonda pervyh massovyh serij (FPMS) s nadstrojkoy mansardnyh jetazhej // XXXVIII Nedelja nauki SPbGPU: materialy mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Ch.1. 2009. S. 206-207. (rus)
39. Ivanov V. N. Geometricheskie issledovaniya, formoobrazovanie, razrabotka metodov rascheta i chislennyj analiz naprjazhenno-deformirovannogo sostojaniya tonkostennyh obolochek slozhnoj formy s sistemoy ploskih koordinatnyh linij / diss. na soisk. uchen. step. d.t.n., Spec.: 05.23.17. Moskva, 2006. 394 s. (rus)
40. Ikrin V. A. Soprotivlenie materialov s jelementami teorii uprugosti i plastichnosti: Uchebnik dlja studentov, obuchajushhij po napravleniju 653500 «Stroitel'stvo». M: Izd.ASV, 2004. 424 s. (rus)
41. Kamenskih I. V. Matematicheskoe i chislennoe modelirovanie zadach ustojchivosti tonkostennyh konstrukcij metodom modul'-jelementov / diss. na soisk. uchen. step. d.f-m. n. Spec: 05.13.18. Komsomol'sk-na-Amure, 2004. 210 c. (rus)
42. SCAD OFFICE. Formirovanie sechenij i raschet ih geometricheskikh harakteristik / Karpilovskij V. S., Kriksunov Je. Z., Perel'muter A. V., Perel'muter M. A. M: Izdatel'stvo ASV, 2004. 80 s. (rus)
43. Karpilovskij V. S., Kriksunov Je. Z., Maljarenko A. A., Perel'muter A. V., Perel'muter M. A. Vychislitel'nyj kompleks SCAD. M: Izdatel'stvo ASV, 2007. 592 s. (rus)
44. Katranov I. G. Ispytanija i raschet vintovyh soedinenij legkih stal'nyh tonkostennyh konstrukcij na rastjazhenie // Vestnik MGSU. 2010. № 2. S. 89-93. (rus)
45. Klimenko A. N., Rasporskij V. V., Rybakov V. A. Legkie stal'nye tonkostennye termopaneli kak naruzhnye ograzhdajushhie konstrukcii // XXXVIII Nedelja nauki SPbGPU: materialy mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Ch.1. 2009. S.208-209. (rus)
46. Konstantinov I. A. Stroitel'naja mehanika: uchebnik / Konstantinov I. A., Lalin V. V., Lalina I. I.; Sankt-Peterburgskij gosudarstvennyj politehnicheskij universitet. M. : [Prospekt] : [Knorus], 2010. 425 s. (rus)
47. Konstantinov I. A. Teorija uprugosti. Raschet ploskih jelementov sooruzhenij s ispol'zovaniem programmy SCAD : ucheb. posobie / Konstantinov I. A., Lalin V. V., Lalina I. I.; Sankt-Peterburgskij gosudarstvennyj politehnicheskij universitet. SPb. : Izd-vo Politehn. un-ta, 2007. 87 s. (rus)
48. Konstantinov I. A. Stroitel'naja mehanika: Raschet sterzhnevnyh sistem s ispol'zovaniem programmy SCAD: uchebno-metodicheskij kompleks / Konstantinov I. A., Lalin V. V., Lalina I. I.; Sankt-Peterburgskij gosudarstvennyj politehnicheskij universitet. SPb.: Izd-vo Politehn. un-ta, 2007. 449 s. (rus)
49. Konstantinov I. A. Stroitel'naja mehanika. Raschet sterzhnevnyh sistem s ispol'zovaniem programmy SCAD: uchebnoe posobie / Konstantinov I. A., Lalin V. V., Lalina I. I.; Sankt-Peterburgskij gosudarstvennyj politehnicheskij universitet. SPb.: Izd-vo Politehn. un-ta, 2008-2009. Ch.2: Uchebno-metodicheskij kompleks . 2009. 227 s. (rus)
50. Kuz'menko D. V., Vatin N. I. Ograzhdajushhaja konstrukcija «nulevoj» tolshhiny – termopanel' // Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2008. №1. S.13-21. (rus)
51. Kuz'min N. A., Lukash P. A., Milejkovskij I. E. Raschet konstrukcij iz tonkostennyh sterzhnej i obolochek. M.: Gosstrojizdat, 1960. 264 s. (rus)

52. Kurazhova V. G., Nazmeeva T. V. Vidy uzlovyyh soedinenij v legkih stal'nyh tonkostennyh konstrukcijah // *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal*. 2011. №3(21). S. 47-52. (rus)
53. Kuc A. S., Rybakov V. A. Obosnovanie konstruktivnyh i tehnologicheskikh reshenij pri rekonstrukcii zdaniy starogo fonda s nadstrojkoy mansard // XXXVIII Nedelja nauki SPbGPU: materialy mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Ch.1. 2009. S. 210-211. (rus)
54. Lalin V. V., Kolosova G. S. Kurs lekcij po teorii uprugosti: ucheb. posobie; Sankt-Peterburgskij gosudarstvennyj politehnicheskij universitet. SPb.: Izd-vo Politehn. un-ta, 2008. 135 s. (rus)
55. Lalin V. V. Razlichnye formy utochnenija nelinejnoj dinamiki uprugih sterzhnej // *Mehanika materialov i prochnost' konstrukcij. Trudy SPbGPU №489*, SPb. Izd-vo SPbGPU, 2004, S.121-128. (rus)
56. Lalin V. V., Kolosova G. S. Chislennye metody v stroitel'stve. Reshenie odnomernyh zadach metodom konechnyh jelementov: Ucheb.posobie; SPbGTU. Sankt-Peterburg. Izd-vo SPbGTU, 2001. 72 s. (rus)
57. Lalin V. V., Rybakov V. A. Konechnye jelementy dlja rascheta ograzhdajushhih konstrukcij iz tonkostennyh profilej // *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal*. 2011. №8(26). S. 69-80. (rus)
58. Lalin V. V., Rybakov V. A., Morozov S. A. Issledovanie konechnyh jelementov dlja rascheta tonkostennyh sterzhnevyyh sistem // *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal*. 2011. №1(27). S. 53-73. (rus)
59. Limarenko A. M. Modelirovanie i metody rascheta korpusnyh detalej stankov / diss. na soisk. uchen. step. k.t.n. Spec.: 05.02.02. Odessa, 2008. (rus)
60. Malinin M. Ju. Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostojanija prostranstvennyh tonkostennyh konstrukcij slozhnoj geometrii metodom konechnyh jelementov / diss. na soisk. uchen. step. k.t.n. Spec.:01.02.04. Brezhnev, 1984. 153 s. (rus)
61. Mel'nikov B. E., Semenov A. S., Semenov S. G. Mnogomodel'nyj analiz uprugoplasticheskogo deformirovanija ortotropnogo metalla s izotropnym uprochneniem. Sovremennoe sostojanie // *Trudy CNII im. akad. A.N. Krylova*. 2010. №53. S. 48-57(rus)
62. Meshherjakov V. B. O kruchenii tonkostennyh sterzhnej // *Sb. nauchn. tr. Mosk. in-t. inzh. zh-d. tr-ta*. 1967. Vyp.236. S.77-85. (rus)
63. Meshherjakov V. B. Obshhie uravnenija teorii tonkostennyh sterzhnej otkrytogo profilja s uchetom sdvigov // *Sb.nauchn.tr. Mosk. in-t. inzh. zh-d. tr-ta*. 1967. Vyp.236. S.77-85. (rus)
64. Nazmeeva T. V. Obespechenie prostranstvennoj zhestkosti pokrytija v zdaniyah iz LSTK // *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal*. 2009. №6(8). S. 12-15. (rus)
65. Nikol'chak M. V., Bezhenar I. S., Rybakov V. A. Obosnovanie celesoobraznosti primenenija tehnologii legkih stal'nyh tonkostennyh konstrukcij v kottedzhnom stroitel'stve // XXXVIII Nedelja nauki SPbGPU: materialy mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. 2009. Ch.1. S.219. (rus)
66. Orobej V.F., Sur'janinov N. G., Limarenko A. M. Analiz napryazhenno-deformirovannogo sostojanija tonkostennogo sterzhnja otkrytogo profilja v programme ANSYS // *Trudy OGASA*. 2005. Vyp.17. S.195-200. (rus)
67. Osokin A. V. Razvitie metoda konechnyh jelementov dlja rascheta sistem, vkluchajushhih tonkostennye sterzhni otkrytogo profilja / diss. na sosik. uchen. step. k.t.n. Spec.: 05.23.17. M., 2010. 134 s. (rus)
68. Soprotivlenie materia-lov: uchebnoe posobie / Pavlov P. A., Parshin L. K., Mel'nikov B. E., Sherstnev V. A. // *Pod red. B.E. Mel'nikova*. 2-e izd., ispr. i dop. SPb.: Izd. "Lan", 2007g. 560 c. (rus)
69. Perel'muter A. V., Slivker V. I. Ustojchivost' ravnovesija konstrukcij i rodstvennye problemy. M.: Izd-vo SKAD SOFT, 2010. Tom 1. 704 s. (rus)
70. Perel'muter A. V., Slivker V. I., Ustojchivost' ravnovesija konstrukcij i rodstvennye problemy. M: Izd-vo SKAD SOFT, 2010. Tom 2. 672 s. (rus)
71. Perel'muter A.V., Slivker V.I., Ustojchivost' ravnovesija konstrukcij i rodstvennye problemy. t. 3/ A.V. Perel'muter, V.I. Slivker. M: Izd-vo SKAD SOFT, 2011. 388 s. (rus)
72. Postanovlenie Pravitel'stva Sankt-Peterburga ot 10.02.2000 N 4 "O regional'noj programme rekonstrukcii zhilyh domov pervyh massovyh serij v Sankt-Peterburge" (rus)
73. Postnov V. A. Chislennye metody rascheta sudovyh konstrukcij L.: Sudostroenie, 1974. 344 s. (rus)
74. Postnov V. A., Harhurim I. Ja. Metod konechnyh jelementov v raschetah sudovyh konstrukcij/ V.A. Postnov. – L.: Sudostroenie., 1974. 342 s. (rus)
75. Perel'muter A. V., Slivker, V. I. Raschetnye modeli sooruzhenij i vozmozhnost' ih analiza. M.: Izd-vo DMK Press. 2002. 618 s. (rus)

76. Rybakov V. A. *Osnovy stroitel'noj mehaniki legkih stal'nyh tonkostennykh konstrukcij: ucheb. Posobie.* SPb.: Izd-vo SPbGPU, 2011. 207 s. (rus)
77. Semenov A. S., Mel'nikov B. E., Gorohov M. Ju. *Ciklicheskaja nestabil'nost' pri raschetah bol'shix uprugoplasticheskikh deformacijah // Nauchno-tehnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta.* 2003. T. 33. №3. S.129 (rus)
78. Serpik I. N. *Odnourovnevye mnogosetochnye algoritmy reshenija zadach stroitel'noj mehaniki tonkostennykh konstrukcij / diss. na soisk. uchen. step. d.t.n. Spec.: 05.23.17. Brjansk.* 1999. (rus)
79. Sinel'shnikov A. V., Juzikov V. P. // *Matematicheskaja model' tonkostennogo sterzhnevoego konechnogo jelementa s prjamolinejnoj os'ju i peremennym secheniem // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo (PGS).* 2007. №9. S. 19-21. (rus)
80. Slivker V. I. *Stroitel'naja mehanika. Variacionnye osnovy. Uchebnoe posobie.* M.:Izd-vo ASV, 2005. 736 s. (rus)
81. Smaznov D. N. *Ustojchivost' pri szhatii sostavnykh kolonn, vypolnennykh iz profilej iz vysokoprochnoj stali // Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal.* 2009. №3(5). S. 42-49. (rus)
82. Smaznov D. N. *Konechnojelementnoe modelirovanie raboty zhestkikh vstavok tonkostennykh holodnoformovannykh stal'nykh profilej // Nauchnyj zhurnal KubGAU.* 2011. №67(03). S. 1-13. (rus)
83. SP 16.13330.2011 *Stal'nye konstrukcii. Aktualizirovannaja redakcija SNIIP II-23-81* (rus)
84. Sur'janinov N. G. *Obobshhenie metoda granichnykh jelementov k raschetu sterzhnej, plastin i obolochek / diss. na soisk. uchen. step. d.t.n. Spec.: 01.02.04. Luck,* 2010. (rus)
85. Tananajko O. D., Shvarc M. A. *Smeshannyj metod rascheta sterzhnevnykh sistem na prochnost', kolebanija i ustojchivost' // Tr. LIIZhT.* 1976. Vyp. 40. S. 23-28. (rus)
86. Tananajko O. D., Shvarc M. A. *O vybore sistemy zamknutykh konturov i ih racional'noj numeracii pri raschete sterzhnevnykh konstrukcij metodom sil // Avtomatizirovannoe optimal'noe proektirovanie konstrukcij.* 1977. S.58-64. (rus)
87. Timoshenko S. P. *Ob ustojchivosti ploskoj formy izgiba dvutavrovoy balki // Izv. S Peterburgskogo politeh. instituta.* 1905. t.4.vyp.3-4., 1906. t.5. vyp. 1-4. (rus)
88. Timoshenko S. P. *Ob ustojchivosti uprugih sistem // Izv. Kievskogo politehnicheskogo instituta.* 1910. Kn.4. 182 s. (rus)
89. Timoshenko S.P. *Istorija nauki o soprotivlenii materialov: s kratkimi svedenijami iz teorii uprugosti i teorii sooruzhenij: Per. s angl./ Pod red. A.N. Mitinskogo. Izd. 2-e, stereotipnoe. M.: KomKniga,* 2006. 536s. (rus)
90. Tugaev A. S. *Ustojchivost' plastin i tonkostennykh sterzhnej / diss. na soisk. uchen. step k.t.n. Spec.: 01.02.03. M,* 2007. (rus)
91. TU 1121-001-1383-0080-2003. *Profili stal'nye ocinkovannye dlja sistemy karkasnogo stroitel'stva (ООО «Baltprofil»).* (rus)
92. Tusnin A. R. *Raschet i proektirovanie konstrukcij iz tonkostennykh sterzhnej otkrytogo profila / avtoreferat na soisk. uchen. step. k.t.n. Spec.: 05.23.01. M.,* 2004. 37 s. (rus)
93. Umanskij A. A. *Kruchenie i izgib tonkostennykh aviakonstrukcij. M.:Oborongiz,* 1939. 112 s. (rus)
94. Hajrullin F. S. *Variacionnye metody rascheta tonkostennykh konstrukcij slozhnoj formy na osnove approksimirujushhih funkcij proizvol'nogo porjadka s konechnymi nositeljami / diss. na soisk uchen. step. f-m. nauk. Spec.: 01.02.04. Kazan',* 2007. 267 s. (rus)
95. Chernov S. A., D'jakov I. F. *K raschetu prostranstvennoj tonkostennoj sterzhnevoj sistemy // Avtomatizacija i sovremennye tehnologii: ezhemesjachnyj mezhotraslevoj nauchno-tehnicheskij zhurnal.* 2008. №2. S. 3-6. (rus)
96. Shatov D. S. *Konechnojelementnoe modelirovanie perforirovannykh stoek otkrytogo sechenija iz holodnognutyh profilej // Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal.* 2011. №3(21). S. 32-35. (rus)
97. Shvarcman B. S. *Jekstrapoljacionnyj metod nahozhdenija chislennykh reshenij s zadannoju tochnost'ju // Stroitel'naja mehanika i raschjot sooruzhenij.* 1992. S. 157-162. (rus)
98. Shishkin V. M. *Razrabotka jeffektivnykh metodov rascheta tonkostennykh konstrukcij s uchetom plasticheskikh i dempfirujushhih svojstv materiala / diss. na soisk. uchen. step. d.t.n. Spec.: 05.13.18. Kazan',* 2008. 414 s. (rus)
99. Jurchenko V. V. *Proektirovanie karkasov zdaniy iz tonkostennykh holodnognutyh profilej v srede SCAD Office // Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal.* 2010. №8(18). S. 38-46. (rus)
100. Javarov A. V., Beljaev D. I., Lalin V. V. *Raschet konstrukcij s odносторонними svjazjami v integrirovannom programmnom komplekse SOFiSTiK. // Mezhdunarodnyj nauchno-prakticheskij seminar «Sistemy avtomatizirovannogo proektirovanija na transporte». PGUPS,* 2010, S. 80-84. (rus)

101. Jeksperimental'no-teoreticheskoe opredelenie nesushhej sposobnosti metallicheskih stellazhej [web source] / M.Ju. Gorohov, B.E. Mel'nikov, V.A. Sherstnev, A.S. Semenov . Jelektron. tekstovye dan. (1 fajl : 116 Kb) // Materialy Nedeli nauki SPbGPU 24 - 29 nojabrja 2003g. Sistem. Trebovanija: Adobe Acrobat Reader 4.0. URL:<http://www.unilib.neva.ru/dl/004068.pdf> (date of reference: 12.12.2012). (rus)
102. Jel'sgol'c L. Je. Differencial'nye uravnenija i variacionnoe ischislenie. M.: Nauka, 1969. 424 s. (rus)
103. Juzikov V. P. Zav'jalova O. B. Raschet tonkostennyh sterzhnej otkrytogo profilja s uchetom sdviga sredinnoj poverhnosti // Izvestija vuzov. Stroitel'stvo. 2011. N 1. S. 108-115.(rus)
104. Cheng Y., Schafer B. W. Distortional buckling of cold-formed steel members in bending. Maryland: American Iron and Steel Institute Baltimore, 2005. 213 p.
105. Kacianauskas R., Samofalov M. Semi-analitical finite elements for the stability analysis of thin-walled beams/ R. Kacianauskas // Conference on Computational Mechanics. June 26-29, 2001 Cracow. Poland
106. Saade K. Finite element modeling of shear in thin walled beams with a single warping function. Bruxellesl, 2005. 134 p.
107. Sedlacek G., Bild, J. Ungermann, D. On the buckling of plates - Some recent developments in light weight structures // 4th international conference on aluminium weldments, Tokyo. 1988. Pp.10-17.
108. Schafer, B.W. Local, distortional, and euler buckling of thin-walled columns // Journal of structural engineering. 2002. 11 p.
109. Schafer W., Pekoz T. Computational modeling of cold-formed steel: characterizing geometric imperfections and residual stresses/ W. Schafer // Journal of Constructional Steel Research. №47. 1998. Pp.193–210.
110. Semenov A.S., Melnikov B.E., Gorokhov M.Yu., Ulbricht, V. Prevention of cyclic instability at the modeling of elasto-plastic deformation at large strains under proportional and non-proportional loading // Proc. of 9th International Workshop on Nondestructive Testing and Computer Simulations in Science and Engineering. Poland. Nanodesign, Technology, and Computer Simulations. Proc. of SPIE. Washington. 2007. Vol. 6597. Pp. 6597101-6597118.

Данная статья публикуется в рамках работы по проекту

530603-TEMPUS-1-2012-1-LT-TEMPUS-JPCR

This article is published in the framework of project

530603-TEMPUS-1-2012-1-LT-TEMPUS-JPCR