Строительство уникальных зданий и сооружений. ISSN 2304-6295. 8 (13). 2013. 34-41

Construction of Unique Buildings and Structures

journal homepage: www.unistroy.spb.ru

Субстанциальная производная и ее использование в гидравлике

***О. И. Зайцев**[1], **Е. Н. Кожевникова**[2], **Е. А. Локтионова**[3], **В. Т. Орлов**[4]*

ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 195251, Россия, Санкт-Петербург, Политехническая, 29.

ИНФОРМАЦИЯ О СТАТЬЕ	История	Ключевые слова
УДК 6.60 Методическая статья	Подана в редакцию 2 октября 2013 Оформлена 20 октября 2013 Согласована 30 октября 2013	сплошная среда кинематика жидкий объем жидкая частица траектория линия тока поле скорости контрольный объем контрольная поверхность субстанциальная производная

АННОТАЦИЯ

В статье рассмотрены методические приемы построения лекционного материала при изложении раздела кинематики в общем курсе гидравлики. Поясняется суть используемых для описания движения сплошной среды методов Лагранжа и Эйлера. Выводится выражение для субстанциальной производной из рассмотрения движения жидкой частицы, используя метод Эйлера. Указывается, что вывод этого выражения с помощью полной производной является некорректным.

Содержание

[1] *Контактный автор:*
hydraulika@cef.spbstu.ru (Зайцев Олег Игоревич, к.т.н., доцент)
[2] koshevnikova@cef.spbstu.ru (Кожевникова Елена Николаевна, к.т.н., доцент)
[3] hydraulika@cef.spbstu.ru (Локтионова Елена Анатольевна, к.т.н., доцент)
[4] hydraulika@cef.spbstu.ru (Орлов Вячеслав Тимофеевич, к.т.н., доцент)

1. Введение

При изложении раздела кинематики в общем курсе Гидравлики часто возникают сложности, связанные с переходом от метода Лагранжа к методу Эйлера, используемого для описания движения сплошной среды. Рассмотрим некоторые методические приемы построения лекционного материала по этому вопросу.

2. Метод Лагранжа

В методе Лагранжа движущийся объем жидкости («жидкий объем») делится на отдельные части, линейной деформацией которых при движении жидкости можно пренебречь по сравнению с расстоянием, на которое они перемещаются за рассматриваемый (расчетный) промежуток времени. Такие части будем называть «жидкими частицами». Положение каждой частицы относительно начала отсчета в начальный момент времени определим вектором $\boldsymbol{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$, где (x, y, z) – ортогональные оси координат. При движении жидкости координаты частиц будут меняться, и движение «жидкого объема» определено, если для каждой частицы этого объема известен вектор $\boldsymbol{r}$, определяющий ее положение, как функцию начального положения $\boldsymbol{r}_0$ и времени t

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0,t). \tag{1}$$

Вектор $\boldsymbol{r}_0$ входит в уравнение (1) при использовании метода Лагранжа как параметр.

Совокупность функций (1) описывает *траектории* движения жидких частиц и позволяет найти векторы скорости $\boldsymbol{V}=(V_x,V_y,V_z)$ и ускорения $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ для всех частиц жидкости как

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_0,t)=\frac{\partial \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0,t)}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_0,t)=\frac{\partial \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_0,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0,t)}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Векторы ***r, V, a*** называются *переменными Лагранжа* (или лагранжевыми переменными). Аналогично и все другие величины (например, температура T), относящиеся к жидкому объему и связанные с «судьбой» конкретной жидкой частицы, именуются лагранжевыми переменными (характеристиками).

В методе Эйлера движение жидкости описывается функциями, которые выражают изменение каких-либо величин, связанных с движением жидкости (плотности, температуры, скорости, импульса и др.), в фиксированных неподвижных точках области, занятой движущейся жидкостью. При использовании метода Эйлера вводится понятие «контрольного объема», ограниченного неподвижной «контрольной поверхностью», через которую проходит жидкость. Этот метод позволяет определить (например, с помощью соответствующих датчиков) мгновенные значения интересующей нас величины (характеристики) в фиксированных точках «контрольного объема». Совокупность мгновенных значений каждой из этих величин называют её *полем*. В общем случае поля различных величин могут меняться во времени и по координатам.

Так, например, совокупность мгновенных скоростей частиц жидкости в каждой точке контрольного объема называется *полем скорости*. Векторные линии поля скорости, проведенные через фиксированные точки контрольного объема для различных моментов времени t, называются *линиями тока.* Если поле скорости во времени не меняется, т.е. если движение жидкости установившееся, то линии тока совпадают с траекториями жидких частиц.

В данный момент времени t в фиксированной точке объема, занятого жидкостью, с координатами $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$ находится жидкая частица, имеющая скорость $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_0,t)$ – лагранжеву переменную. Координата этой частицы $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0,t)=\boldsymbol{r}$ равна координате $\boldsymbol{r}$ рассматриваемой точки.

3. Метод Эйлера

В методе Эйлера для скорости вводят обозначение

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_0, t). \qquad (4)$$

Согласно выражению (4), в точке с координатами $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$ в момент времени t находится частица, положение которой в начальный момент определялось вектором $\boldsymbol{r}_0$. В следующий момент времени в эту точку придет другая частица, и ее скорость может быть другой. Вектор скорости $\boldsymbol{u}$ в фиксированной точке в каждый момент времени относится к разным частицам, поэтому скорость $\boldsymbol{u}$ целесообразно интерпретировать не как перемещение жидкой частицы за единицу времени, а как отношение объема жидкости $\Delta\forall$, протекающего за бесконечно малый промежуток времени Δt через элементарную контрольную поверхность, нормальную к траектории и построенную вокруг фиксированной точки, к площади этой поверхности $\Delta \mathrm{A}$, т.е.

$$\boldsymbol{u} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta \mathrm{A} \to 0}} \frac{\Delta\forall}{\Delta t \;\; \Delta \mathrm{A}}. \qquad (5)$$

Переменные $\boldsymbol{u}, T$ и другие, относящиеся к фиксированной точке пространства, называются *переменными Эйлера* (или эйлеровыми переменными). Например, $\boldsymbol{u}$ – эйлерова скорость, T – эйлерова температура.

4. Вывод субстанциальной производной

Выбор метода описания движения жидкости (сплошной среды) зависит от типа решаемой задачи. В большинстве задач гидромеханики предпочтительным является метод Эйлера.

Во-первых, границы контрольного объема или их перемещение применительно к рассматриваемой проблеме обычно заданы. Чаще всего границы являются неподвижными (например, если в качестве контрольного объема выбран участок трубопровода), что существенно упрощает решение задачи.

Во-вторых, наблюдать за характерными величинами потока в фиксированных точках пространства проще, чем следить за движущимися частицами. Так, измерение величины скорости ветра с помощью флюгера, установленного на метеостанции в фиксированной точке, существенно удобнее, чем наблюдение за «мечеными» частицами (например, шарами-зондами в атмосфере) для решения той же задачи.

При использовании фундаментальных законов механики, в которые входят, например, изменение во времени массы, импульса, кинетической энергии физических тел (в случае гидромеханики физическим телом является выделенный жидкий объем), возникает вопрос, как получить изменение любой характеристики (например, массы или энергии) движущегося «жидкого объема» (объекта метода Лагранжа) в переменных Эйлера. Иными словами, как в зафиксированном контрольном объеме описать процесс движения жидкости и связанные с ним изменения различных его характеристик в разные моменты времени. Такие изменения описывает производная по времени от интересующей нас гидромеханической характеристики жидкого объема (субстанции). Причем эта производная должна иметь специальный вид, связанный с использованием метода Эйлера.

Рассмотрим выражение для производной такого рода на примере скорости, т.е. вычислим ускорение жидкой частицы в переменных Эйлера. Предположим, что в момент времени t положение жидкой частицы (элементарного объема $\Delta\forall$) определено вектором $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$, и при этом скорость $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$– эйлерова характеристика. Через промежуток времени Δt объем $\Delta\forall$ переместится вдоль траектории на некоторое расстояние и займет новое положение с координатами $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}=(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Соответственно его скорость в эйлеровых переменных станет равной $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t + \Delta t),$ а ускорение

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta \boldsymbol{t} \to 0} \frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t + \Delta t) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)}{\Delta t}. \qquad (6)$$

Вектор $\Delta\boldsymbol{r}$ здесь определяет перемещение объема $\Delta\forall$ вдоль траектории из начальной точки в конечную, т.е.

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{V} \cdot \Delta t, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{V}$ – лагранжева скорость объема $\Delta\forall$. При этом вектор $\boldsymbol{r}$ в определении (6) согласно методу Эйлера от времени не зависит. Тогда, если выбрать промежуток времени Δt бесконечно малым, то траектория и линия тока будут стремиться друг к другу, а скорость жидкой частицы (объема $\Delta\forall$) – приближаться к скорости в точке $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{u}$, т.е. (7) можно записать в виде

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{u} \cdot \Delta t. \tag{8}$$

Для преобразования выражения (6) добавим и вычтем в числителе вектор $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \Delta \boldsymbol{r}, t)$ и, разбив предел на две части, получим

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta \boldsymbol{r} \to \boldsymbol{u}\Delta t}} \frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \Delta \boldsymbol{r}, t + \Delta t) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \Delta \boldsymbol{r}, t)}{\Delta t} + \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta \boldsymbol{r} \to \boldsymbol{u}\Delta t}} \frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \Delta \boldsymbol{r}, t) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)}{\Delta t}. \tag{9}$$

Первое слагаемое в (9) выражает изменение скорости $\boldsymbol{u}$ в единицу времени в фиксированной точке пространства внутри контрольного объема $\Delta\forall$, т.е. по определению это частная производная от скорости по времени $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$; числитель второго слагаемого представляет собой отличие скорости жидкости $\boldsymbol{u}$ в разных точках пространства в фиксированный момент времени t, приближенное значение которого выражается в виде полного дифференциала

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \Delta \boldsymbol{r}, t) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) = \Delta \boldsymbol{u} \approx \mathrm{d}\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\Delta z. \tag{10}$$

Поскольку рассматриваемое приращение скорости $\Delta \boldsymbol{u}$ имеет место в направлении движения жидкой частицы, то $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \Delta \boldsymbol{r}$ является ее перемещением за бесконечно малое время Δt, поэтому

$$u_x = V_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad u_y = V_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad u_z = V_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}. \tag{11}$$

Учитывая (10) и (11), преобразуем второй предел в выражении (9)

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta \boldsymbol{r} \to \boldsymbol{u}\Delta t}} \frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \Delta \boldsymbol{r}, t) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)}{\Delta t} &= \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta \boldsymbol{r} \to \boldsymbol{u}\Delta t}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta t}\right) = \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}u_x + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}u_y + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}u_z. \end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя (12) в (9), окончательно получим

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}u_x + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}u_y + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}u_z = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{u}. \tag{13}$$

Оператор в правой части равенства (13) выражает производную по времени от эйлеровой скорости $\boldsymbol{u}$, которая является скоростью каждой жидкой частицы в точке с координатой $\boldsymbol{r}$ в момент времени t. Поэтому, чтобы подчеркнуть, что это особая производная, связанная с движением частиц жидкости (субстанции), используют название *субстанциальная производная* [1, 2, 4, 13, 15] и вводят специальное обозначение $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ [2, 4, 7, 13] (или иногда $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}$ [15, 16]), применяя которое (13) можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{u}. \qquad (14)$$

Первое слагаемое в правой части выражений (13), (14), относящееся к фиксированной точке, называют *локальной* (или *местной*) составляющей производной ($\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$ – локальная составляющая скорости (локальное ускорение); второе слагаемое, являющееся результатом движения (конвекции) жидкости, – *конвективной* составляющей производной $(\boldsymbol{u}\,\mathrm{grad})\,\boldsymbol{u}$ – конвективная составляющая скорости (конвективное ускорение)).

Используя оператор $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$, равенства (13) и (14) можно записать аналогичным образом и для любой другой эйлеровой характеристики, например, для скалярной характеристики такой как температура (14) примет вид

$$\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u}\,\mathrm{grad}\,T. \qquad (15)$$

В соответствии с (15) изменение любой характеристики, переносимой потоком жидкости, будет зависеть от скорости $\boldsymbol{u}$.

Отметим, что приведенные выше зависимости получены для элементарного жидкого объема (жидкой частицы). Однако при решении практических задач законы сохранения часто необходимо формулировать не для жидких частиц, а для жидких объемов, которые имеют конечные размеры и могут деформироваться при движении жидкости. При этом контрольные объемы также будут иметь конечные размеры (часть трубопровода, русло канала на исследуемом участке течения и т.п.). Переход от жидких частиц к жидким объемам представляет собой отдельную задачу, которая решена, например, в [4, 13, 21], где доказано, что изменение в единицу времени любой величины, связанной с движением жидкости, равно сумме ее изменения внутри неподвижного контрольного объема (локальная составляющая производной) и потока этой величины через контрольную поверхность (конвективная составляющая производной).

В ряде литературных источников, подчеркивая особый вид производной (14), субстанциальную производную также называют *индивидуальной* производной [3, 7, 11, 12], *производной по пути* или *материальной* производной [12, 17].

Весьма важно отметить, что в большинстве учебников [5, 6, 8 - 10, 18 – 25] в выражении для скорости $\boldsymbol{u}$, которая является эйлеровой переменной и зависит от пространственных координат x, y, z, не связанных с частицей жидкости, без специального, доступного для студентов объяснения, координаты x, y, z рассматриваются как функции времени, и производные от них по времени считаются равными проекциям скорости. При этом формально выражение для полной производной от скорости как сложной функции времени приобретает тот же вид, что и для субстанциальной производной (13) – (15). Но такой методический прием, позволяющий получить тот же результат простым и, на первый взгляд, понятным способом, на самом деле вводит студентов (и многих преподавателей) в заблуждение по поводу того, какой все-таки метод используется для решения практических задач: метод Лагранжа или метод Эйлера. Еще более осложняет понимание этого вопроса использование некоторыми авторами обозначения полной производной $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ вместо обозначения субстанциальной производной $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$.

Приведенные выше пояснения и выкладки показывают один из рациональных способов изложения вопроса о субстанциальной производной, который не создает трудностей, препятствующих освоению фундаментального раздела кинематики жидкости.

Литература

1. Механика жидкости и газа / Аверин С. И., Минаев А. Н., Швыдкий В. С., Ярошенко Ю. Г. М: Изд-во «Наука», 1987. 302 с.
2. Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М: Изд-во «Мир», 1973. 760 с.
3. Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике. Л: Изд-во Ленинградского университета, 1978. 296 с.
4. Гиргидов А. Д. Механика жидкости и газа (гидравлика) // Учебник для вузов. СПб: Изд-во Политехн. Ун-та, 2007. 545 с.
5. Емцев Б. Т. Техническая гидромеханика. Учебник для вузов. М: Машиностроение, 1986. 440 с.
6. Киселев П. Г. Гидравлика: Основы механики жидкости. Учеб. пособие для вузов. М: Изд-во «Энергия», 1980. 360 с.
7. Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: ОГИЗ. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 928 с.
8. Лапшев Н. Н. Гидравлика. Учебник. М: Изд-во «Академия», 2007. 270 с.
9. Лапшев Н. Н., Леонтьева Ю. Н. Основы гидравлики и теплотехники. Учебник. М: Изд-во «Академия», 2012. 400 с.
10. Ле Меоте Б. Введение в гидродинамику и теорию волн на воде. Л: Гидрометеоиздат, 1974. 367 с.
11. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М: Изд-во «Наука», 1978. 736 с.
12. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. М: Изд-во «Мир», 1964. 655 с.
13. Петриченко М. Р. Гидравлика. Уравнение энергии для потоков жидкости и газа. СПб: Изд-во Политехн. Ун-та, 2011. 78 с.
14. Повх И. Л. Техническая гидромеханика. М: Изд-во «Машиностроение», 1964. 508 с.
15. Прандтль Л., Титьен О. Гидро- и аэромеханика. Т.1. М.-Л: Государственное технико-теоретическое издательство, 1932. 222 с.
16. Саткевич А. А. Теоретические основы гидро- аэроэродинамики. Динамика жидких тел. Ч.II. ОНТИ. СССР, 1934. 468 с.
17. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости // Пер. с англ. М: Изд-во Иностранной литературы, 1963. –256 с.
18. Смирнов В. И. Курс высшей математики // Т.2. М.-Л: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. – 627 с.
19. Чугаев Р. Р. Гидравлика // Учебник для вузов. М.-Л: Изд-во «Энергия», 1982. 672 с.
20. Штеренлихт Д. В. Гидравлика // Учебник для вузов. М: Энергоатомиздат, 1984. 640 с.
21. James E. A. John, William L. Haberman. Introduction to fluid mechanics. 3rd ed. 1988. 609 p.
22. Silin D. B., Tsang C.-F. Estimation of formation hydraulic properties accounting for pre-test injection or production operations // Journal of Hydrology. 2002. Vol. 265. Issues 1–4. Pp. 1-14.
23. Åkesson A., Wörman A. Stage-dependent hydraulic and hydromorphologic properties in stream networks translated into response functions of compartmental models // Journal of Hydrology. 2012. Vol. 420–421. Pp. 25-36.
24. Pistocchi A., Pennington D. European hydraulic geometries for continental SCALE environmental modeling // Journal of Hydrology. 2006. Vol. 329. Issues 3–4. Pp. 553-567.
25. Cassiani G., Kabala Z. J. Hydraulics of a partially penetrating well: solution to a mixed-type boundary value problem via dual integral equations // Journal of Hydrology. 1998. Vol. 211. Issues 1–4. Pp. 100-111.

References

1. *Mehanika zhidkosti i gaza / Averin S. I., Minaev A. N., Shvydkij V. S., Jaroshenko Ju. G. M: Izd-vo «Nauka», 1987. 302 s.* (rus)
2. *Betchelor Dzh. Vvedenie v dinamiku zhidkosti. M: Izd-vo «Mir», 1973. 760 s.* (rus)
3. *Vallander S. V. Lekcii po gidroajeromehanike. L: Izd-vo Leningradskogo universiteta, 1978. 296 s.* (rus)
4. *Girgidov A. D. Mehanika zhidkosti i gaza (gidravlika) // Uchebnik dlja vuzov. SPb: Izd-vo Politehn. Un-ta, 2007. 545 s.* (rus)
5. *Emcev B. T. Tehnicheskaja gidromehanika. Uchebnik dlja vuzov. M: Mashinostroenie, 1986. 440 s.* (rus)

6. *Kiselev P. G. Gidravlika: Osnovy mehaniki zhidkosti. Ucheb. posobie dlja vuzov. M: Izd-vo «Jenergija», 1980. 360 s.* (rus)
7. *Lamb G. Gidrodinamika. M.-L.: OGIZ. Gosudarstvennoe izdatel'stvo tehniko-teoreticheskoj literatury, 1947. 928 s.* (rus)
8. *Lapshev N. N. Gidravlika. Uchebnik. M: Izd-vo «Akademija», 2007. 270 s.* (rus)
9. *Lapshev N. N., Leont'eva Ju. N. Osnovy gidravliki i teplotehniki. Uchebnik. M: Izd-vo «Akademija», 2012. 400 s.* (rus)
10. *Le Meote B. Vvedenie v gidrodinamiku i teoriju voln na vode. L: Gidrometeoizdat, 1974. 367 s.* (rus)
11. *Lojcjanskij L. G. Mehanika zhidkosti i gaza. M: Izd-vo «Nauka», 1978. 736 s.* (rus)
12. *Miln-Tomson L.M. Teoreticheskaja gidrodinamika. M: Izd-vo «Mir», 1964. 655 s.* (rus)
13. *Petrichenko M. R. Gidravlika. Uravnenie jenergii dlja potokov zhidkosti i gaza. SPb: Izd-vo Politehn. Un-ta, 2011. 78 s.* (rus)
14. *Povh I. L. Tehnicheskaja gidromehanika. M: Izd-vo «Mashinostroenie», 1964. 508 s.* (rus)
15. *Prandtl' L., Tit'en O. Gidro- i ajeromehanika. T.1. M.-L: Gosudarstvennoe tehniko-teoreticheskoe izdatel'stvo, 1932. 222 s.* (rus)
16. *Satkevich A. A. Teoreticheskie osnovy gidro- ajerojerodinamiki. Dinamika zhidkih tel. Ch.II. ONTI. SSSR, 1934. 468 s.* (rus)
17. *Serrin Dzh. Matematicheskie osnovy klassicheskoj mehaniki zhidkosti // Per. s angl. M: Izd-vo Inostrannoj literatury, 1963. –256 s.* (rus)
18. *Smirnov V. I. Kurs vysshej matematiki // T.2. M.-L: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tehniko-teoreticheskoj literatury, 1952. – 627 s.* (rus)
19. *Chugaev R. R. Gidravlika // Uchebnik dlja vuzov. M.-L: Izd-vo «Jenergija», 1982. 672 s.* (rus)
20. *Shterenliht D. V. Gidravlika // Uchebnik dlja vuzov. M: Jenergoatomizdat, 1984. 640 s.* (rus)
21. James E. A. John, William L. Haberman. Introduction to fluid mechanics. 3rd ed. 1988. 609 p.
22. Silin D. B., Tsang C.-F. Estimation of formation hydraulic properties accounting for pre-test injection or production operations // Journal of Hydrology. 2002. Vol. 265. Issues 1–4. Pp. 1-14.
23. Åkesson A., Wörman A. Stage-dependent hydraulic and hydromorphologic properties in stream networks translated into response functions of compartmental models // Journal of Hydrology. 2012. Vol. 420–421. Pp. 25-36.
24. Pistocchi A., Pennington D. European hydraulic geometries for continental SCALE environmental modeling // Journal of Hydrology. 2006. Vol. 329. Issues 3–4. Pp. 553-567.
25. Cassiani G., Kabala Z. J. Hydraulics of a partially penetrating well: solution to a mixed-type boundary value problem via dual integral equations // Journal of Hydrology. 1998. Vol. 211. Issues 1–4. Pp. 100-111.

Substantial derivative in hydraulics

O. I. Zaytsev[5], **E. N. Kozhevnikova**[6], **E. A. Loktionova**[7], **V. T. Orlov**[8]

Saint-Petersburg State Polytechnical University, 29 Polytechnicheskaya st., St. Petersburg, 195251, Russia.

ARTICLE INFO

Methodical article

Article history

Received 2 October 2013
Received in revised form 20 October 2013
Accepted 30 October 2013

Keywords

continuous medium
kinematics
fluid body
fluid particle
trajectory
streamline
velocity field
control volume
control area
substantial derivative

ABSTRACT

The procedure of lecturing on fluid kinematics in general hydraulics is considered in the article. Some features of *LaGrange's* and *Euler's* approaches to fluid mechanics are illustrated. The expression for substantial derivative from consideration of fluid particle motion using Euler's approach is developed. It is pointed out that interpretation of substantial derivative as a total one is incorrect.

[5] *Corresponding author:*
hydraulika@cef.spbstu.ru (Oleg Igorevich Zaytsev, Ph. D., Associate Professor)
[6] koshevnikova@cef.spbstu.ru (Elena Nikolayevna Kozhevnikova, Ph. D., Associate Professor)
[7] hydraulika@cef.spbstu.ru (Elena Anatoljevna Loktionova, Ph. D., Associate Professor)
[8] hydraulika@cef.spbstu.ru (Vyacheslav Timofeevich Orlov, Ph. D., Associate Professor)