Строительство уникальных зданий и сооружений. ISSN 2304-6295. 1 (28). 2015. 40-51

Construction of Unique Buildings and Structures

journal homepage: www.unistroy.spb.ru

Численные и аналитические решения задач о действии внешних нагрузок на упругое полупространство

А.В. Яваров[1], **И.Э. Сергеев**[2], **Ю.В. Рязанцева**[3]

ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет», 195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29.

Информация о статье	История	Ключевые слова
УДК 69.04 Научная статья	Подана в редакцию 19 декабря 2014 Принята 13 января 2015	упругое полупространство, метод конечных элементов, задача Буссинеска, задача Лява, аналитические и численные решения

АННОТАЦИЯ

В современном строительстве все расчеты производятся в вычислительных программных комплексах. В этих комплексах используется численный метод решения дифференциальных уравнений с частными производными, интегральных уравнений, возникающих при решении задач прикладной физики, механики деформируемого твёрдого тела, теплообмена, гидродинамики и электродинамики. Этот метод называется методом конечных элементов. Поскольку любое тело можно разбить на бесконечное количество элементов, возникает актуальный вопрос, какое число этих элементов будет оптимальным. В настоящей работе рассмотрены аналитические решения задач о действии внешних нагрузок на упругое полупространство: задачи Буссинеска от сосредоточенной силы, Лява от равномерно распределенной нагрузки. Получены численные решения данных задач в программном комплексе Лира-САПР 2013. Построены схемы радиальных напряжений, графики напряжений σ_z, τxz, τyz. Выполнено сравнение результатов аналитических и численных решений.

Содержание

1. Введение 41
2. Обзор литературы 41
3. Постановка задачи исследования 41
4. Задача Буссинеска 41
5. Задача Лява 45
6. Заключение 48

Контактный автор:
[2] +7 (911) 843 0443, sergeev.igor.eduardovich@gmail.com (Сергеев Игорь Эдуардович, студент)
[1] +7 (911) 024 1012, yavarov_av@mail.ru (Яваров Александр Валерьевич, ассистент)
[3] +7 (965) 126 1058, yuliana_93@bk.ru (Рязанцева Юлиана Владимировна, студент)

1. Введение

В настоящее время при решении задач совместного расчета зданий и сооружений с их основанием повсеместное распространение получило применение нелинейных моделей массива грунта [4, 8, 16, 18-23]. При этом, как отмечает Г.Г. Литвинский, в настоящее время не существует однозначно принятой нелинейной математической модели грунта [5]. Для каждой модели введен свой набор критериев прочности и схем деформирования. Важно, что множественность подходов относится не только к принципиально разным с механических позиций материалам (гранит и глина), но и грунтам одного литологического состава и генезиса.

Для построения нелинейных моделей в большинстве работ используется теория пластического течения [3, 4, 8, 16, 18, 21-23]. Деформация массива грунта, как сплошной среды, разделяется на упругую и пластическую части. При этом упругая составляющая может быть линейной и нелинейной. В первом случае при реализации метода конечных элементов это проявляется в зависимости искомых перемещений от размера расчетной модели.

2. Обзор литературы

Решение задач линейной теории упругости с относительно простой геометрией, граничными условиями и нагрузками приведено во множестве источников, включая [6, 7, 17]. Расчет конструкций на упругом основании приведен в работах М.И. Горбунова-Посадова [1], И.А Симвулиди [15], А.П. Синицын [14].

В механике грунтов упругую модель используют с учетом того, что песчано-глинистые грунты на первых стадиях приложения нагрузок деформируется линейно, но не упруго. По этой причине упругую модель называют линейно-деформируемой. Понятие модуль упругости заменяют понятием модуля деформации, а коэффициент Пуассона – коэффициентом поперечного расширения грунта. При этом оба параметра являются независимыми и оба должны определяться из испытаний.

При решении задач совместного расчета сооружений и их оснований выполняют с помощью различных численных методов: методы конечных, граничных, дискретных элементов. Наибольшее распространение на практике получил метод конечных элементов [10-13]. Практические аспекты применения метода конечных элементов для решения задач механики грунтов и строительной механики изложены в работах [2, 9].

3. Постановка задачи исследования

Данное исследование является первым этапом научно-исследовательской работы «Численное решение контактной задачи о внедрении жесткого индентора в вязко-упруго-пластическое полупространство». В качестве прикладного аспекта данной работы следует указать решение задачи о расчете несущей способности набивных свай типа Fundex.

Целью настоящего этапа работы является получение и сравнение численных и аналитических решений для упругого полупространства. Рассматриваются случаи действия на упругое полупространство сосредоточенной силы (задача Буссинеска) и нагрузки распределенной по площади (задача Лява).

Методически выполнение работы заключается в анализе аналитических решений в системе Wolfram Mathematica, получении численных решений с использованием ЛИРА-САПР и вычислении погрешности решения при различных параметрах сетки конечных элементов.

4. Задача Буссинеска

Действие сосредоточенной силы на упругое полупространство.

Вывод и аналитическое решение задачи о действии сосредоточенной силы на упругое пространство с допущением Буссинеска приведено в работе [17]. Выражения напряжений для площадки, параллельной ограничивающей плоскости:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_Z &= \sigma'_R cos(\sigma'_R, Z) \\ \sigma_{zy} &= \sigma'_R cos(\sigma'_R, Y) \\ \sigma_{zx} &= \sigma'_R cos(\sigma'_R, X) \end{aligned}\right\}. \quad (1)$$

Учитывая $cos(\sigma_R', Z) = z/R$; $cos(\sigma_R', Y) = y/R$ и $cos(\sigma_R', X) = x/R$, для величин составляющих напряжений для площадки, параллельный ограничивающей плоскости, окончательно будут иметь следующие вид:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_Z &= \frac{3}{2}\frac{P}{\pi}\frac{z^3}{R^5} \\ \sigma_{zy} &= \frac{3}{2}\frac{P}{\pi}\frac{yz^2}{R^5} \\ \sigma_{zx} &= \frac{3}{2}\frac{P}{\pi}\frac{xz^2}{R^5} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В приведенном выражении (2) обращает на себя внимание поведение решения при $z = 0$. В точке приложения нагрузки напряжения будут стремиться к бесконечности, а величины напряжений не зависят от упругих параметров сплошной среды.

По приведенному аналитическому решению были построены изолинии напряжений в программе Mathematica 2013.

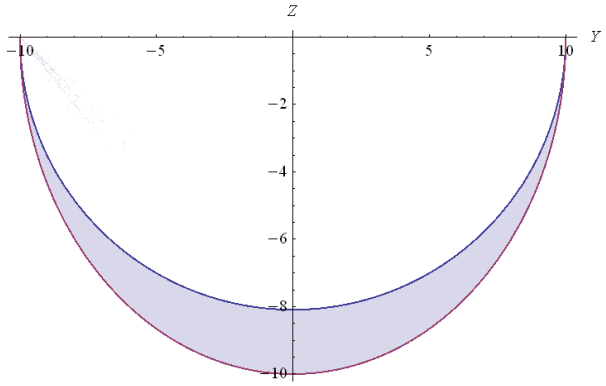

Рисунок 1. Схема радиальных напряжений при действии сосредоточенной силы на глубине 1м

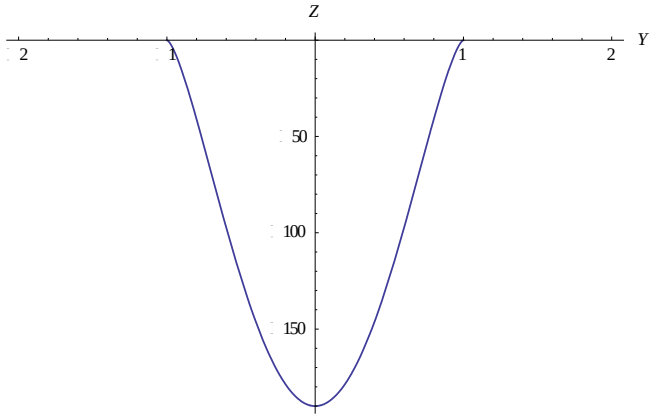

Рисунок 2. Напряжения σ_z от сосредоточенной силы 400 кН на глубине 1 м

Рисунок 3. График напряжения σ_{zx} на глубине1 м от сосредоточенной силы 400 кН

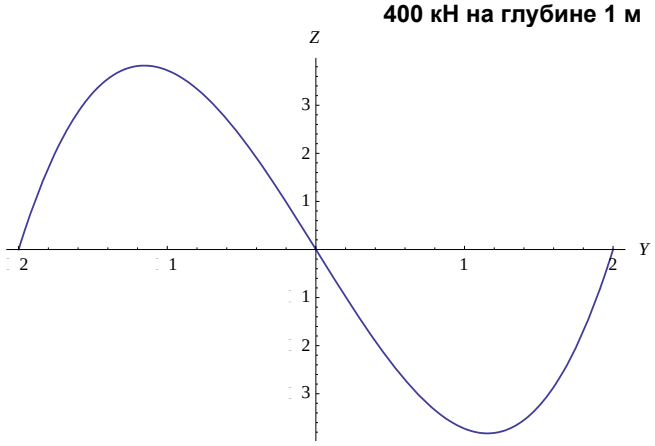

Рисунок 4. График напряжения σ_{zy} на глубине1 м от сосредоточенной силы 400 кН

В случае решения данной задачи методом конечных элементов для получения точного решения потребуется значительная степень разбиения рассматриваемой области полупространства в точке приложения сосредоточенной силы. Достаточный размер грани конечного элемента, позволяющий получить высокую степень совпадения численного и аналитического решения может быть установлен эмпирически.

С целью снижения числа неизвестных при задании геометрии модели использован принцип симметрии. Для получения решения задана только четверть полупространства. При этом величина сосредоточенной силы составила четверть от нагрузки на все полупространство. Сетка задана с учетом сгущения сети элементов по мере приближения к точке приложения нагрузки (см.рис.2.). Всего было построено четыре конечно-элементных модели с длиной граней в области приложения сосредоточенной силы 1, 0.5, 0.25 и 0.1 м, соответственно.

Модели набраны с помощью универсальных пространственных восьмиузловых изопараметрических конечных элементов (номер 36 в программе ЛИРА-САПР). Таким образом, при переходе от аналитического к численному решению бесконечное полупространство заменяется объектом (кубом) конечных размеров. Собственно, данный факт заложен в названии использованного численного метода – метод конечных элементов.

Граничные условия включали недопущение перемещений по нормали узлов к внешним граням упругого куба.

Задача решается в линейной постановке, то есть перемещения и повороты малы, а модель материала – линейно-упругая. Так как в настоящей работе выполняется сравнение только напряжений, полученных по результатам аналитического и численного решений, параметры материала заданы произвольно.

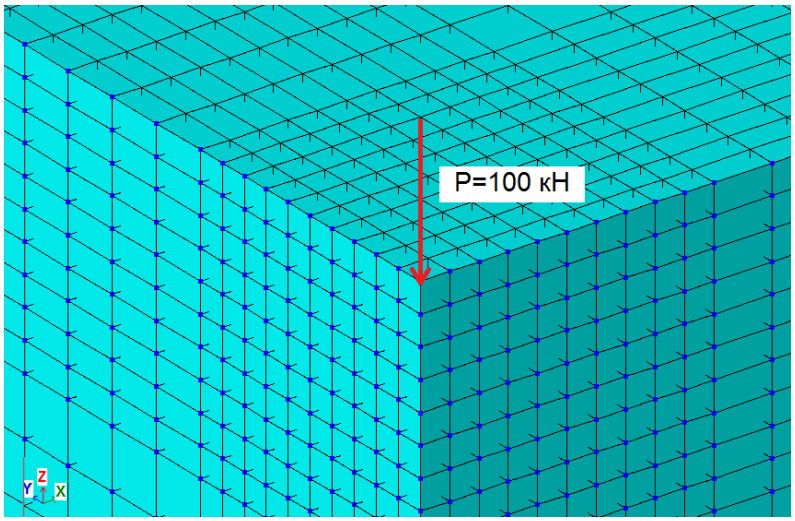

Рисунок 5. Общий вид конечно-элементной модели

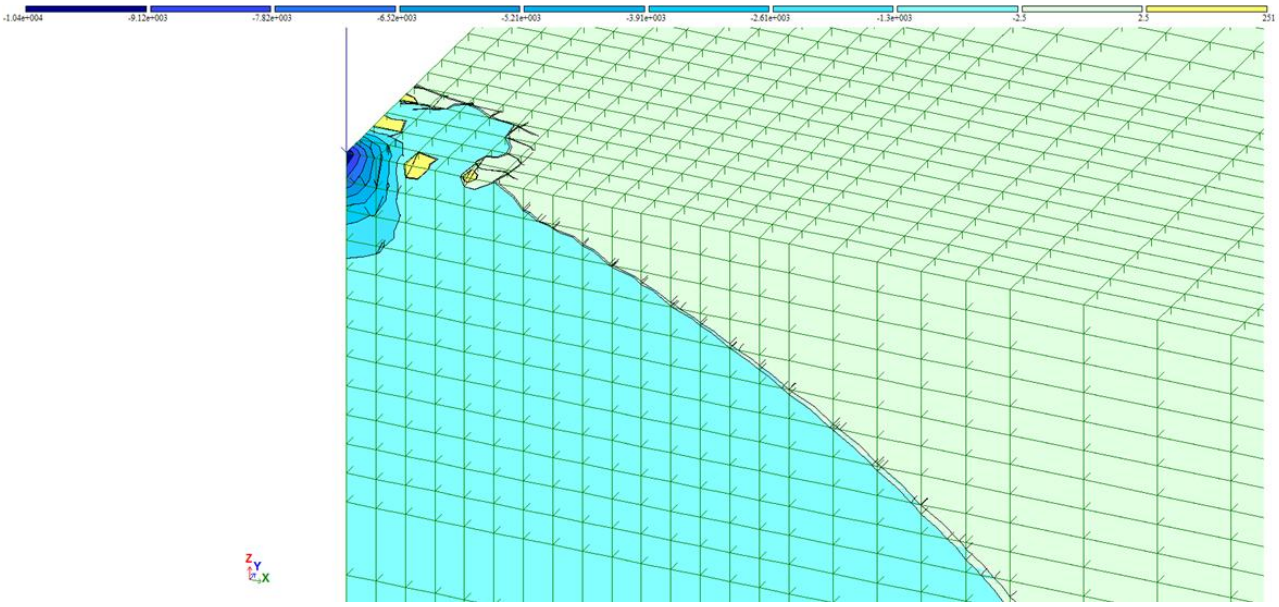

Рисунок 6. Фрагмент конечно-элементной модели вблизи точки приложения сосредоточенной нагрузки. Изополя вертикальных напряжений по оси Z

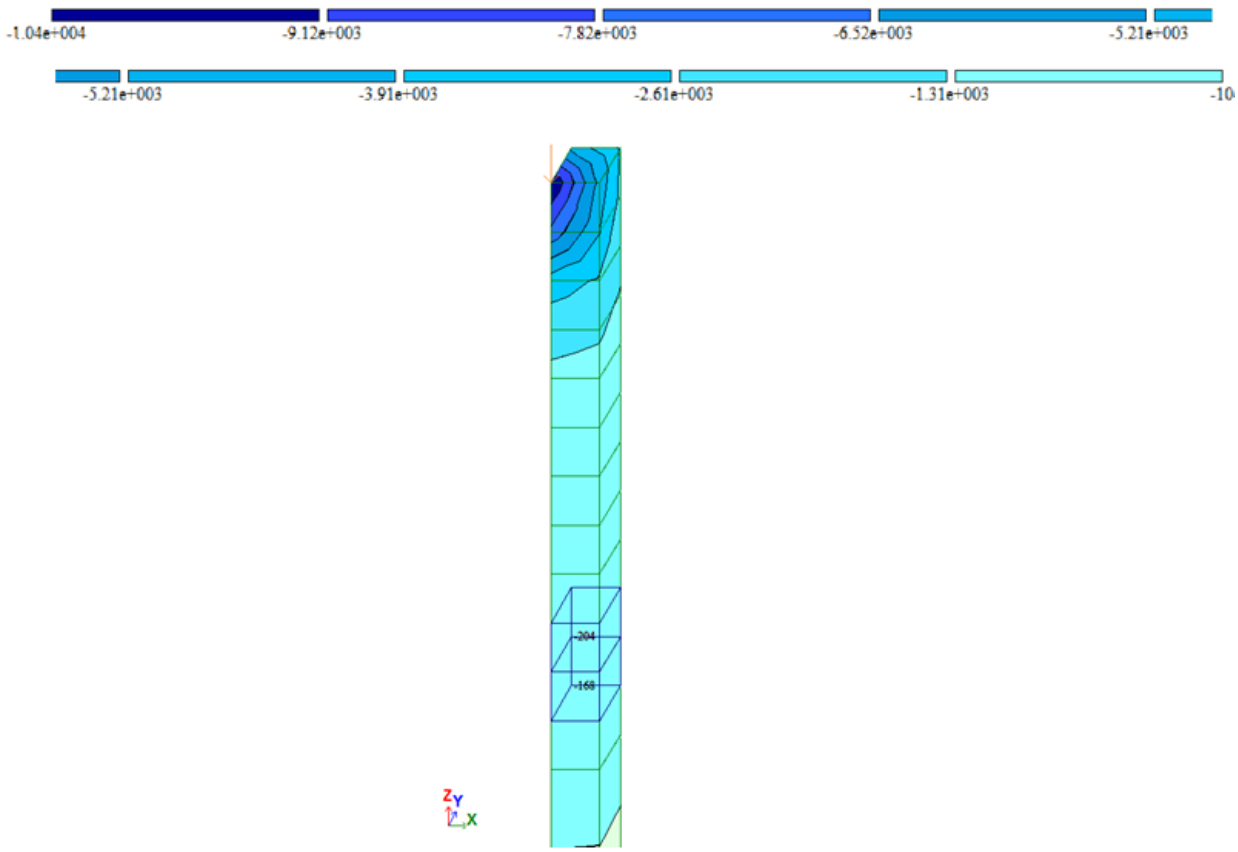

Рисунок 7. Фрагмент конечно-элементной модели при размере грани равной 0.1 м . Изополя напряжений по оси Z

Вертикальное напряжение на глубине 1 м от приложенной силы равной 100 кН по результатам численного решения находится как среднее значение напряжений между соответствующими конечными элементами:

$$\frac{204.486 + 168.423}{2} = 186.4545 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

Сравнение значений вертикальных напряжений по результатам численного и аналитического решений приведено в таблице 1.

Таблица.1. Сравнение аналитического и численных решений

№ модели	Длина ребра конечного элемента, м	Напряжение вдоль глобальной оси Z на глубине 1 м σ_z, кН/м^2		Погрешность, %
		Аналитическое решение	Численное решение	
1	1	190,986	702	$\frac{190.986 - 702}{190.986} * 100 = 267.57$
2	0,5	190,986	561,67	$\frac{190.986 - 561.67}{190.986} * 100 = 194.09$
3	0,25	190,986	207,53	$\frac{190.986 - 207.53}{190.986} * 100 = 8.66$
4	0,1	190,986	186,4545	$\frac{190.986 - 186.4545}{190.986} * 100 = 2.37$

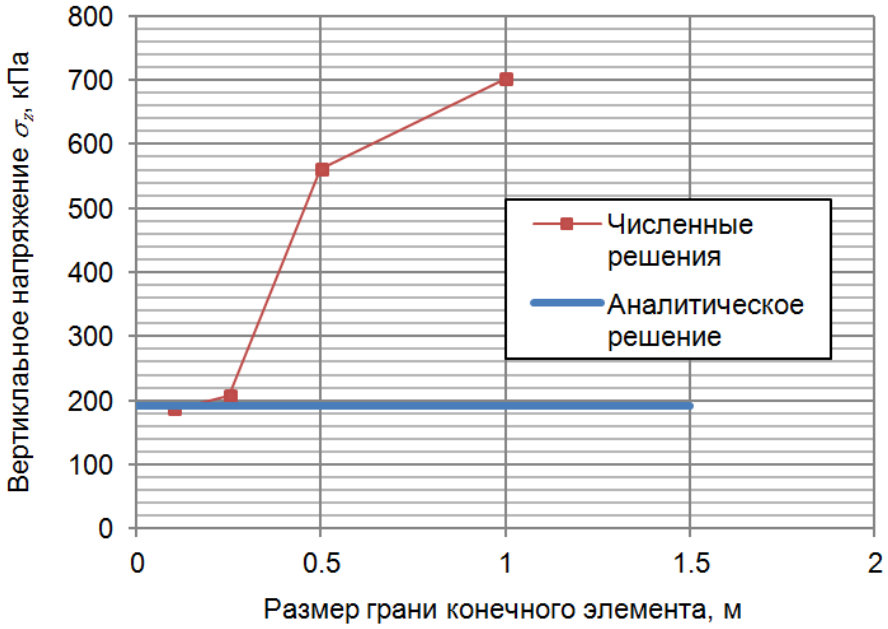

Рисунок 8. График зависимостей напряжения вдоль глобальной оси Z от длины ребра конечно-элементной модели от сосредоточенной нагрузки

5. Задача Лява

Действие равномерно распределенной нагрузки на упругое полупространство

Аналитическое решение задачи о действии равномерно распределенной нагрузки на упругое полупространство приведено в [17].

Сжимающие напряжения σ_{zc}, лежащей на вертикали под углом загруженного прямоугольника со сторонами l и b, которые мы назовем угловыми, будут равны:

$$\sigma_{zc} = \frac{p}{2\pi}\left[\frac{lbz}{D}\,\frac{l^2+b^2+2z^2}{D^2z^2+l^2b^2} + arcsin\left(\frac{lb}{\sqrt{l^2+z^2}\sqrt{b^2+z^2}}\right)\right],$$

где $a = \frac{l}{b}$ и $\beta = \frac{z}{b}$; $(D/2)^2 = R^2 = l^2 + b^2 + z^2$.

Пользуясь приведенными формулами, легко можно вычислить и максимальное сжимающее напряжение под центром площади загрузки σ_z.

Задача Лява отличается от задачи Буссинеска тем, что вместо сосредоточенной силы на полупространство прикладывается равномерно-распределенная по площади нагрузки. Учитывая указанное, для численного решения задачи Лява можно воспользоваться моделью, построенной для решения задачи Буссинеска. Необходимо только изменить нагружение упругого полупространства (рисунок 12).

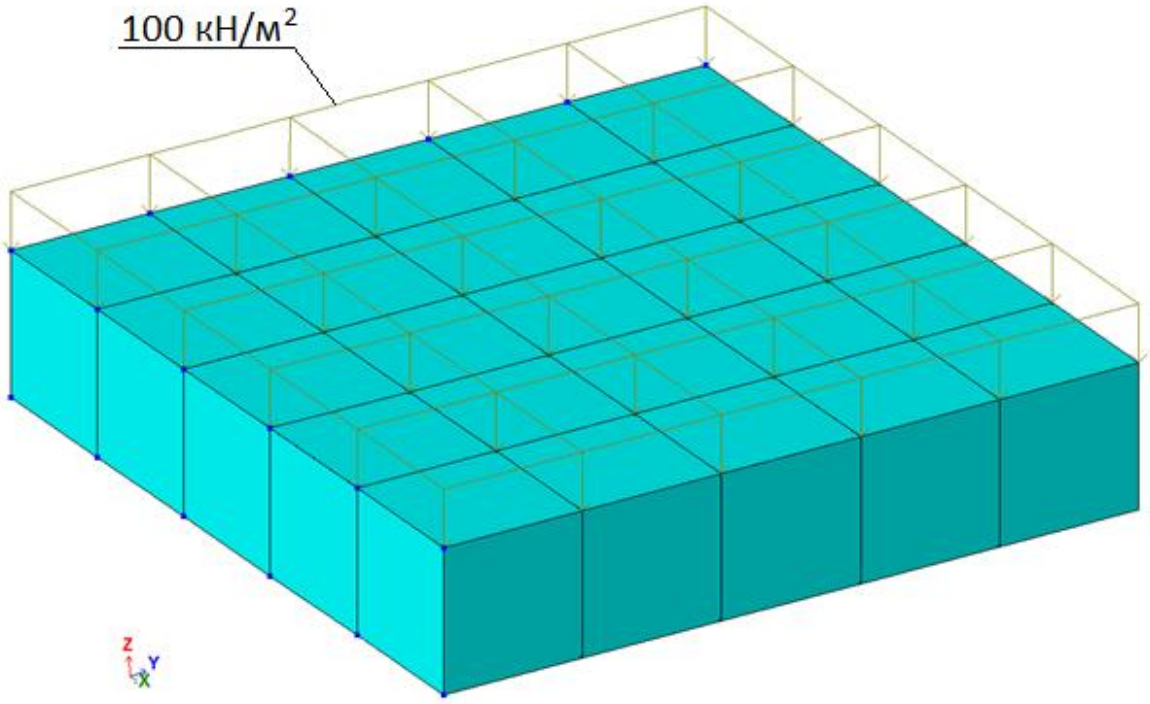

Рисунок 9. Фрагмент расчетной модели в месте приложения распределенной нагрузки

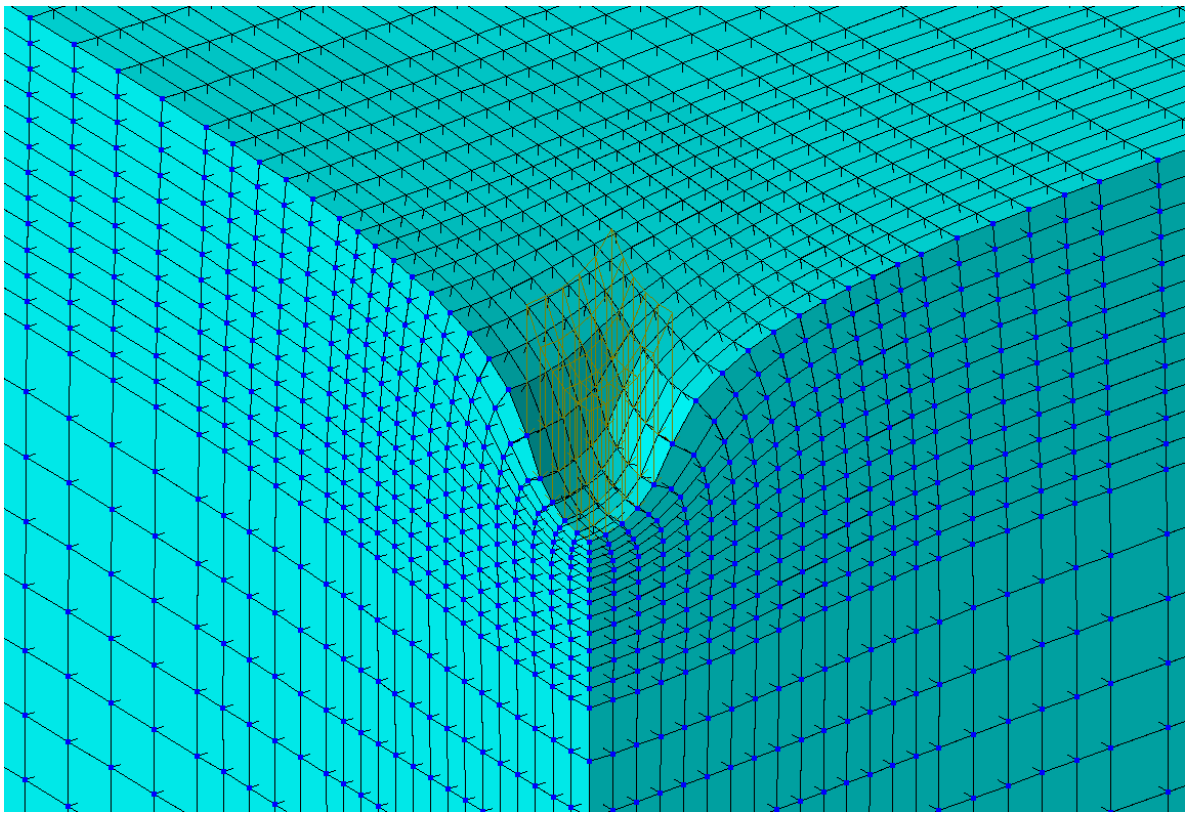

Рисунок 10. Деформированная схема полупространства

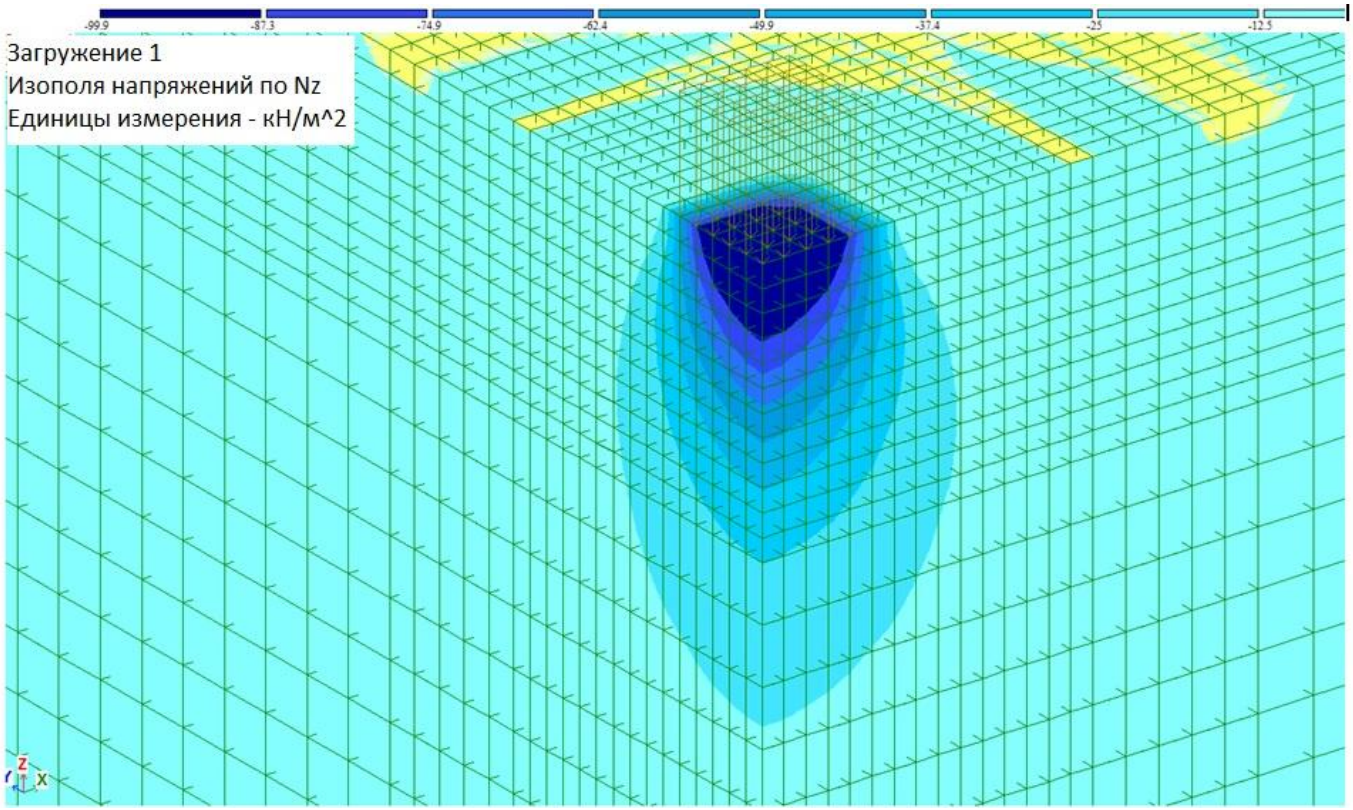

Рисунок 11. Вертикальные напряжения, кН/м^2

Аналитическое решение при равномерно распределенной силе 100 кН/м^2 на квадратную площадку со стороной 2 м. σ_z=33.611 кН/м^2.

Таблица 2.

№ модели	Длина ребра конечного элемента	Главное напряжение σ_z на глубине 1 м от точки приложения сосредоточенной силы 100 кПа, кН/м^2		Погрешность, %
		Аналитическое решение	Численное решение	
1	1	69,19	42,6	$\frac{69.19-42.6}{69.19}\times 100=38.43$
2	0,5	69,19	61,4	$\frac{69.19-61.4}{69.19}\times 100=11.26$
3	0,25	69,19	67,3	$\frac{69.19-67.3}{69.19}\times 100=2.73$
4	0,1	69,19	68,75	$\frac{69.19-68.75}{69.19}\times 100=0.6$

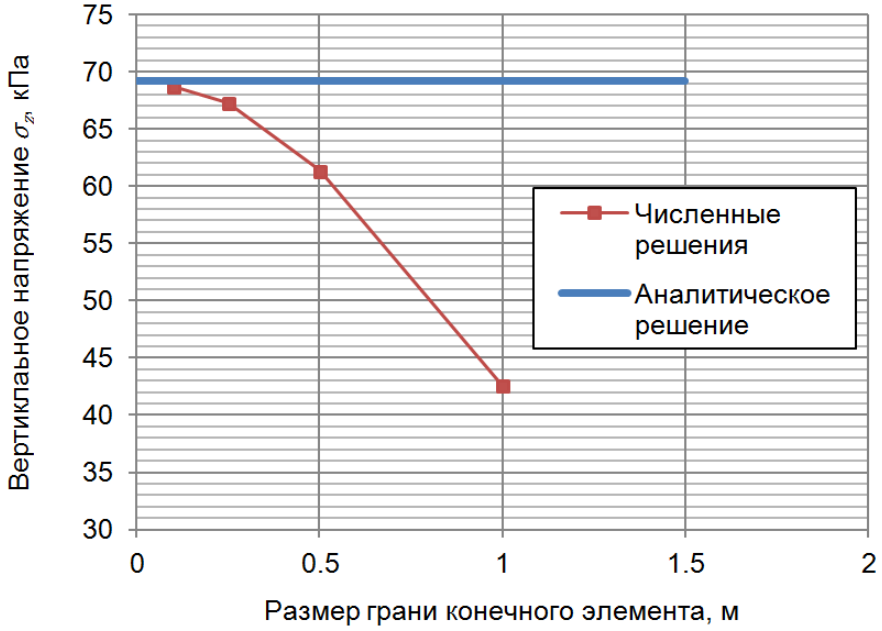

Рисунок 12. График зависимостей напряжения вдоль глобальной оси Z от длины ребра конечно-элементной модели при равномерно распределенной нагрузки

6. Заключение

Рассмотрены задачи Буссинеска и Лява. Для каждой из перечисленных задач:

- по известным аналитическим решениям выведены изолинии напряжений в системе Mathematica 2013,
- выполнено решение задач методом конечных элементов в программе ЛИРА-САПР,
- произведено сравнение полученных результатов.

Путем вариации размеров конечных элементов достигнута высокая степень совпадения аналитических и численных решений. Установлен оптимальный размер конечного элемента для решения данных задач. Величины погрешностей в случае задания конечных элементов оптимального размера составили менее 3%.

Решение перечисленных верификационных задач указывает на правильность решения задач линейной теории упругости в программе ЛИРА-САПР и в случае решения задач геотехники позволяет корректно выполнять расчет осадок сооружения на упругом основании.

Литература

[1]. Горбунов-Посадов М.И. Расчет конструкций на упругом основании: М.: Стройиздат, 1990. -304с.

[2]. Городецкий А.С. Компьютерные модели конструкций : К.: Факт, 2005. – 344 с.

[3]. Ишлинский А. Ю. Математическая теория пластичности: М. : Физматлит, 2001. - 704 с.

[4]. Литвинский, Г.Г. Аналитическая теория прочности горных пород и массивов: А.: Норд-Пресс, 2008. – 213 с.

[5]. Лурье, А. И. Теория упругости : М.: Наука, 1970 – 940 с.

[6]. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости: М.: Наука, 1955, С. 71-134.

[7]. Парамонов, В.Н. Расчет оснований зданий и сооружений в физически и геометрически нелинейной постановке : дис. д-ра техн. наук: 05.23.17, 05.23.02. – СПб., 1998. – 364 с.

[8]. Перельмутер, А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа: М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.

[9]. Постнов, В.А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций: Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.

[10]. Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов: Л.: Энергия, 1971. – 214 с.

[11]. Розин Л.А. Основы метода конечных элементов в теории упругости: Л.: Издательство ЛПИ, 1972. – 77 с.

[12]. Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решений: СПб.: Издательство СПбГТУ, 1998. – 532 с.

[13]. Синицын А. П. Расчет конструкции на основе теории риска: М.: Стройиздат, 1971. - 229 с.

[14]. Улицкий В.М. Геотехническое сопровождение реконструкции городов: М.: Изд. АСВ, 1999.-324с.

[15]. Фадеев А. Б. Метод конечных элементов в геомеханике: М. : 1987. 7-49с..

[16]. Цытович Н. А. Механика грунтов :М. :1983. 76-102 с.

[17]. Шашкин, А.Г. Упруго-вязко-пластическая модель структурно-неустойчивого глинистого грунта: СПб.: Георeконструкция-Фундаментпроект, 2005., 221-228 с.

[18]. Benz T. (2007). Small-strain stiffness of soils and its numerical consequences. Mitteilungen des Instituts fur Geotechnik Universitat Stuttgart. 2007. No. 55. pp. 205-209.

[19]. Borja R.I. (2010). Foundation engineering. Handout. 2010. No. 12. pp. 78-96.

[20]. Duncan J.M. (1970). Nonlinear analysis of stress and strain in soils. Journal of soil mechanics and foundations division. ASCE. 1970. No. 96. pp. 1629-1653.

[21]. He L.H., Lim C.W. (2006). Surface Green function for a soft elastic half-space: Influence of surface stress. International Journal of Solids and Structures. No. 43. 2006. pp.132-143.

[22]. Craig R.F. Soil Mechanics 6th Edition. Spon Press. 1997. 571p.

[23]. Love A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge University Press.; New York. 1952. 662p.

[24]. Sneddon I.S. (1965). The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile. Pergamon Press. 1965. No. 3. pp. 47-57.

[25]. Schanz T. The hardening soil model: formulation and verification. Beyond 2000 in Computional Geotechnics – 10 2014s of PLAXIS: Rotterdam: Rotterdam. 1999. 153 p.

[26]. Schanz T. Zur modellierung des mechanischen verhaltens von reibungsmaterialien: Stuttgart, 1998. 152 p.

[27]. Selvadurai A.P.S. Elastic analysis of soil foundation interaction. Elsevier.: Amsterdam. 1979. 375p.

[28]. Tanaka, T Displacement, Stress and strain of flexible buried pipe taking into account the construction process // Сборник статей научно-технической конференции «Численные методы расчётов в практической геотехнике», посвященной памяти Фадеева А.Б. 2012. № 1.С. 282-288.

Numeral and analytic solutions of external loads influence on elastic half-space problems

A.V. Yavarov[1], I.E. Sergeev[2],Yu.V. Riazantceva[2]

Saint-Petersburg Polytechnic University, 29 Polytechnicheskaya st., St.Petersburg, 195251, Russia

ARTICLE INFO	Article history	Keywords
Original research article	Received 19 December 2014 Accepted 13 January 2015	elastic half-space, finite element method, Boussinesq problem, Liav problem, Flaman problem, analytic solutions, numerical solutions

ABSTRACT

Nowadays all calculations in building are made in special computational software packages. The numerical computation of difference equations with partial derivatives and integral equations is used in these packages for solving problems of applied physics, deformable solid body mechanics, heat exchange, hydrodynamics and electrodynamics. This method is called finite elements method. Since a field can be divided into the limitless number of elements, there is a question: which amount of them is aimed? In current work analytic solutions of problems of external load influence on elastic half-space are considered: Boussinesq problem of point force and Liav problem of evenly distributed load. Numerical solutions of these problems were obtained in the software package Lira-SAPR 2013. The graphs of radial stresses and or stresses σ_z, τxz, τyz are plotted. We also made the comparison of the results of analytic and numerical solutions.

2 *Corresponding author:*
+7 (911) 843 0443, sergeev.igor.eduardovich@gmail.com (Igor Eduardovich Sergeev, Student)
1 +7 (911) 024 1012, yavarov_av@mail.ru (Aleksandr Valeryevich Yavarov, Assistant)
3 +7 (965) 126 1058, yuliana_93@bk.ru (Yuliana Vladimirovna Riazantceva, Student)

References

[1]. Gorbunov-Posadov M.I. Raschet konstruktsiy na uprugom osnovanii: M.: Stroyizdat, 1990. -304 p.

[2]. Gorodetskiy A.S. Kompyuternyye modeli konstruktsiy : K.: Fakt, 2005. – 344 s.

[3]. Ishlinskiy A. Yu. Matematicheskaya teoriya plastichnosti: M. : Fizmatlit, 2001. - 704 s.

[4]. Litvinskiy, G.G. Analiticheskaya teoriya prochnosti gornykh porod i massivov: A.: Nord-Press, 2008. – 213 c.

[5]. Lurye, A. I. Teoriya uprugosti : M.: Nauka, 1970 – 940 s.

[6]. Lurye A. I. Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti: M.: Nauka, 1955, S. 71-134.

[7]. Paramonov, V.N. Raschet osnovaniy zdaniy i sooruzheniy v fizicheski i geometricheski nelineynoy postanovke : dis. d-ra tekhn. nauk: 05.23.17, 05.23.02 / Paramonov Vladimir Nikolayevich. – SPb., 1998. – 364 s.

[8]. Perelmuter, A.V. Raschetnyye modeli sooruzheniy i vozmozhnost ikh analiza : M.: DMK Press, 2007. – 600 s.

[9]. Postnov, V.A. Metod konechnykh elementov v raschetakh sudovykh konstruktsiy: L.: Sudostroyeniye, 1974. – 344 s.

[10]. Rozin L.A. Raschet gidrotekhnicheskikh sooruzheniy na ETsVM. Metod konechnykh elementov: L.: Energiya, 1971. – 214 s.

[11]. Rozin L.A. Osnovy metoda konechnykh elementov v teorii uprugosti: L.: Izdatelstvo LPI, 1972. – 77 s.

[12]. Rozin L.A. Zadachi teorii uprugosti i chislennyye metody ikh resheniy: SPb.: Izdatelstvo SPbGTU, 1998. – 532 s.

[13]. Sinitsyn A. P. Raschet konstruktsii na osnove teorii riska: M.: Stroyizdat, 1971. - 229 s.

[14]. Ulitskiy V.M. Geotekhnicheskoye soprovozhdeniye rekonstruktsii gorodov: M.: Izd. ASV, 1999.-324s.

[15]. Fadeyev A. B. Metod konechnykh elementov v geomekhanike: M. : 1987. 7-49s..

[16]. Tsytovich N. A. Mekhanika gruntov :M. :1983. 76-102 s.

[17]. Shashkin, A.G. Uprugo-vyazko-plasticheskaya model strukturno-neustoychivogo glinistogo grunta: SPb.: Georekonstruktsiya-Fundamentproyekt, 2005., 221-228 s.

[18]. Benz T. (2007). Small-strain stiffness of soils and its numerical consequences. Mitteilungen des Instituts fur Geotechnik Universitat Stuttgart. 2007. No. 55. pp. 205-209.

[19]. Borja R.I. (2010). Foundation engineering. Handout. 2010. No. 12. pp. 78-96.

[20]. Duncan J.M. (1970). Nonlinear analysis of stress and strain in soils. Journal of soil mechanics and foundations division. ASCE. 1970. No. 96. pp. 1629-1653.

[21]. He L.H., Lim C.W. (2006). Surface Green function for a soft elastic half-space: Influence of surface stress. International Journal of Solids and Structures. No. 43. 2006. pp.132-143.

[22]. Craig R.F. Soil Mechanics 6th Edition. Spon Press. 1997. 571p.

[23]. Love A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge University Press.; New York. 1952. 662p.

[24]. Sneddon I.S. (1965). The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile. Pergamon Press. 1965. No. 3. pp. 47-57.

[25]. Schanz T. The hardening soil model: formulation and verification. Beyond 2000 in Computional Geotechnics – 10 2014s of PLAXIS: Rotterdam: Rotterdam. 1999. 153 p.

[26]. Schanz T. Zur modellierung des mechanischen verhaltens von reibungsmaterialien: Stuttgart.: Stuttgart, 1998. 152 p.

[27]. Selvadurai A.P.S. Elastic analysis of soil foundation interaction. Elsevier.: Amsterdam. 1979. 375p.

[28]. Tanaka, T Displacement, Stress and strain of flexible buried pipe taking into account the construction process // Sbornik statey nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Chislennyye metody raschetov v prakticheskoy geotekhnike», posvyashchennoy pamyati Fadeyeva A.B. 2012. № 1.S. 282-288.4.