



# Analytical Solution of a Spacer Beam Truss Deflection with an Arbitrary Number of Panels

Kirsanov M.<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> National Research University Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation

\* [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru)

## Keywords:

Truss; Maple; Deflection; Asymptotic; Symbolic solution

## Abstract:

The object of research is a planar statically definable truss with straight belts, a Sprengel-type lattice, and two fixed hinge supports that create external static indeterminability. The purpose of this work is to derive a formula for the dependence of the deflection of the structure in the middle of the span on the number of panels, dimensions, and load. We consider a load evenly distributed over the nodes of the upper belt. *Method.* To output the calculation formula, the induction method is used. The forces in the rods simultaneously with the four reactions of the supports are determined by cutting out the truss nodes from the solution of the system of equilibrium equations in symbolic form. The deflection is found by the Maxwell-Mohr formula. A series of solutions for trusses with successive increases in the number of panels give sequences of coefficients whose common terms are determined from the solution of homogeneous linear recurrent equations of the ninth order, compiled in the Maple computer mathematics system. *Results.* The solution for coefficients is polynomial in the number of panels. It is noted that for an odd number of panels, the determinant of the system of equilibrium equations turns to zero, which corresponds to the instantaneous kinematic variability of the structure. Given an appropriate diagram of the possible speeds of the nodes. The graph of the dependence of the dimensionless deflection on the number of panels shows significant jumps in the deflection values, which decrease with the increase in the number of panels. The dependence of the deflection on the ratio of the vertical dimensions of the spangle part and the entire truss significantly depends on the parity of the number of panels. Using Maple, we obtained a linear asymptotic solution for the number of panels, inversely proportional to the span.

## 1 Introduction

Расчет строительных конструкций производится в большинстве случаев в специализированных пакетах, основанных на методе конечных элементов [1-6]. В такие расчеты включаются все особенности конструкции, тип соединений, иногда переменные сечения элементов, нагрузки сложного вида, неоднородные упругие характеристики материала и т.д. Одновременно с численным подходом к анализу сооружений инженеры пользуются и простыми моделями конструкций, адекватность которых подтверждается практикой. Для ферм, например, соединения стержней моделируются идеальными шарнирами, нагрузки рассматриваются равномерно приложенными к узлам. В этом случае модельное представление дает возможность использовать простые формулы для прогиба, усилий в критических по устойчивости или прочности стержнях. Больше всего в последнее время получено таких формул для регулярных плоских [7-10] и пространственных [11] ферм. Впервые общие вопросы регулярных статически определимых систем были подняты в [12-14]. В точные решения для регулярных систем помимо размеров и нагрузки входят также и число панелей, что делает их удобными как для анализа конструкций, так и для оптимизации на этапе конструирования. В алгоритм вывода большинства расчетных формул регулярных ферм заложен метод индукции по одному или нескольким параметрам. Этим же методом в настоящей работе выводится формула для фермы распорного типа (рис. 1). В [15] эта задача решена при  $f=h$ . В [19-23] методом индукции анализируются распорные фермы такого же или близкого типа, но с опорами других конструкций. Задачи о собственных колебаниях плоских ферм с произвольным числом панелей методом индукции в

Kirsanov M.,

Analytical Solution of a Spacer Beam Truss Deflection with an Arbitrary Number of Panels; 2020; *Construction of Unique Buildings and Structures*; Volume 88 Article No 8802. doi:10.18720/CUBS.88.2

системе компьютерной математики Maple решены в [24-26]. Аналитические решения с многими параметрами могут быть использованы в задачах оптимизации [27-29].

## 2 Methods

**Схема фермы. Определение усилий в стержнях.** Верхний пояс, подверженный сжатию от вертикальной нагрузки, составлен из укороченных элементов, что обеспечивает большой запас ее устойчивости. Длина каждой панели  $2a$ . Панель состоит из двух горизонтальных стержней верхнего пояса, одного стержня нижнего пояса, четырех раскосов и стойки высотой  $f$ . Две неподвижные опоры не делают конструкцию статически неопределимой, так как число ее узлов  $4n+4$ , а число стержней  $m=8n+8$ , но затрудняют определение реакций опор и усилий в стержнях. Обычные три уравнения равновесия конструкции не позволяют определить четыре неизвестные реакции независимым образом. Для этого надо составлять уравнения равновесия всех узлов и решать полученную систему, в которую помимо усилий в стержнях входят и реакции опор.

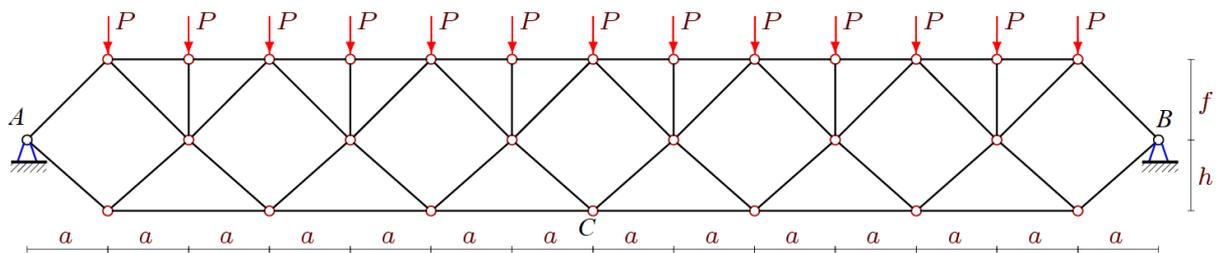


Рис.1. Ферма,  $n=6$  / Fig.1. Truss,  $n=6$

Систему уравнений удобно составлять в программе, написанной на языке Maple и опробованной в различных задачах с фермами [5-10]. Стержни и узлы фермы нумеруются (рис. 2). В программу вводятся координаты узлов и порядок соединения стержней. Приведем фрагмент программы ввода координат:

```
> for i to 2*n+1 do x[i]:=(i-1)*a; y[i]:=h+f; end:
> for i to n+2 do x[i+2*n+1]:=(i-1)*2*a-a; y[i+2*n+1]:=h; end:
> for i to n+1 do x[i+3*n+3]:=(i-1)*2*a; y[i+3*n+3]:=0; end:
```

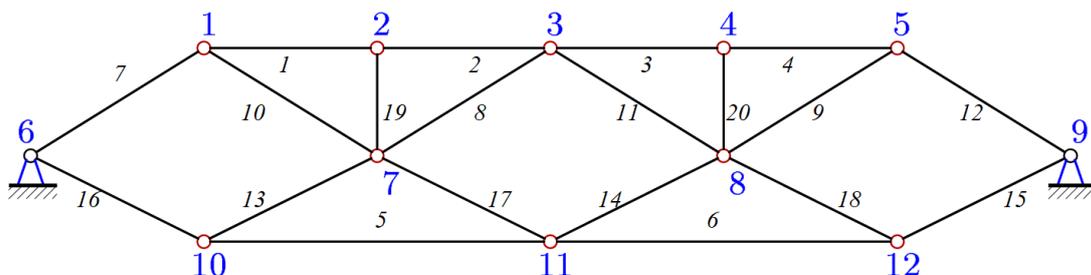


Рис. 2. Номера узлов и стержней фермы,  $n = 2$   
Fig. 2. Numbers of truss nodes and rods,  $n = 2$

Структуру соединений стержней фермы определяют векторы  $Z[i]$ , привязанные к стержням и содержащие номера их концов. Для стержней верхнего пояса имеем следующие векторы:

```
> for i to 2*n do Z[i]:=[i,i+1]; end:
```

Для стержней нижнего пояса:

```
> for i to n do
  Z[i+2*n]:=[3*n+3+i,i+3*n+4];
  Z[i+7*n+4]:=[2*n+2+i,2*i]; od:
```

Матрица уравнений равновесия заполняется направляющими косинусами усилий. Система решается в символьном виде методом обратной матрицы, что несколько быстрее в системе Maple, чем использование специальных операторов пакета LinearAlgebra. Все усилия и

реакции опор определяются в символьном виде. Схема распределения усилий в стержнях фермы при  $n=4$  показывает, что как и следовало ожидать, нижний пояс фермы растянут (стержни выделены красным цветом), верхний — сжат (синий цвет). Толщина отрезков пропорциональна модулям усилий, числа указывают на значения усилий, отнесенных к силе  $P$ .

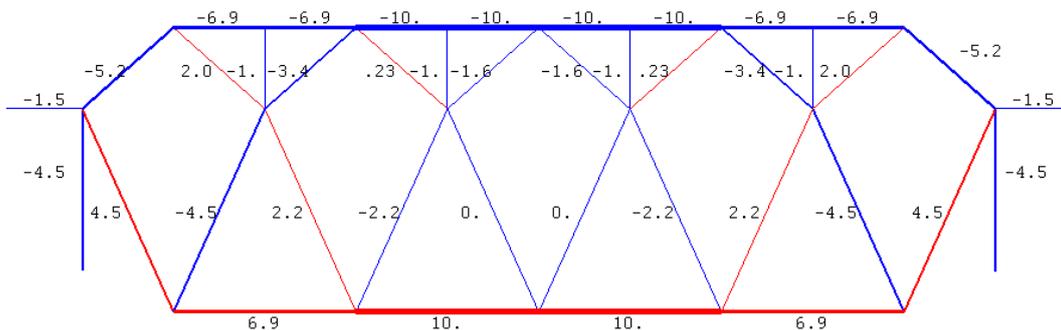


Рис. 3. Распределение усилий в стержнях,  $n=4$ ,  $a=6$  м,  $h=5$  м,  $f=2$  м  
 Fig. 3. The distribution of stresses in the bars,  $n=4$ ,  $a=6$  м,  $h=5$  м,  $f=2$  м

**Прогиб.** Прогиб вычисляется по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{j=1}^{m-4} \frac{S_j s_j l_j}{EF}, \tag{1}$$

где  $EF$  — жесткость стержней,  $S_j$  — усилие в стержне  $j$  фермы от действия приложенной нагрузки,  $s_j$  — усилия от единичной силы, приложенной к узлу  $C$ , вертикальное смещение которого разыскивается,  $l_j$  — длина стержня  $j$ . Четыре опорные стержня, принятые жесткими, в сумму не входят.

Пробные расчеты в аналитической форме при разных числах панелей показали, что для нечетных  $n$  определитель матрицы уравнений равновесия обращается в ноль. Заметим, что за счет погрешности вычислений расчет в численной форме не дает этот результат. Вырождение определителя свидетельствует о мгновенной кинематической изменяемости конструкции. Найдена соответствующая картина распределения возможных скоростей узлов фермы при  $n=1$  (рис. 4). Очевидны соотношения скоростей:  $v/c = u/h$ ,  $v'/g = u/h$ , где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $g = \sqrt{a^2 + f^2}$ .

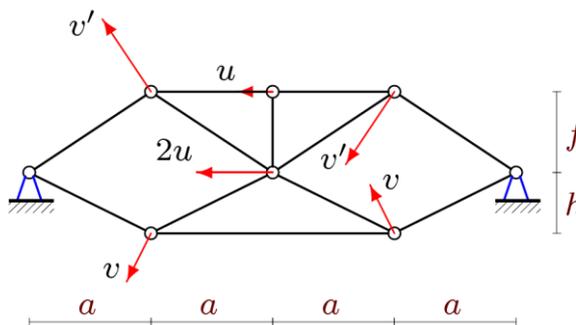


Рис. 4. Схема возможных скоростей,  $n=1$ ,  
 Fig. 4. Diagram of possible velocity of nodes,  $n=1$

Аналогичную схему можно получить и для других нечетных значений  $n$ . Далее в расчетах примем  $n=2k$ . Для произвольных  $k$  решение имеет вид:

$$\Delta = P(C_1 a^3 h + C_2 a^3 f + C_3 g^3 h + C_4 c^3 h + C_5 c^3 f) / (h(h+f)^2 EF). \tag{2}$$

Коэффициенты  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  зависят только от  $k$ . Определение этих зависимостей составляет основную трудность задачи. При получении коэффициента  $C_1$  пришлось рассчитать прогибы 18 ферм. Меньшее число ферм не выявляет общего члена последовательности 48, 224, 1136, 2512, 6592, 11216, ... . Для этой последовательности оператор `rgf_findrecur` системы Maple из специализированного пакета `genfunc` генерирует однородное рекуррентное уравнение девятого порядка:

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 4C_{1,k-2} - 4C_{1,k-3} - 6C_{1,k-4} + 6C_{1,k-5} + 4C_{1,k-6} - 4C_{1,k-7} - C_{1,k-8} + C_{1,k-9}.$$

Решение рекуррентного уравнения с начальными данными  $C_{1,1} = 48, \dots, C_{1,5} = 6592$  дает оператор `rsolve`:

$$C_1 = (20k^4 + 8(5 - (-1)^k)k^3 + 2(17 - 6(-1)^k)k^2 + 2(7 - 5(-1)^k)k - 3(-1)^k + 3) / 3. \quad (3)$$

Остальные коэффициенты получились проще, число членов соответствующих последовательностей было меньше:

$$\begin{aligned} C_2 &= (8k^3(-1)^k + 6(2(-1)^k - 1)k^2 + 2(5(-1)^k - 3)k + 3(-1)^k - 3) / 3, \\ C_3 &= 2k^2 + 2(1 - (-1)^k)k - (-1)^k + 1, \\ C_4 &= 2k^2 + 2k, \quad C_5 = 2k(-1)^k + (-1)^k - 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Слагаемые, содержащие множители  $(-1)^k$ , показывают что решение зависит от четности числа панелей в половине пролета. Проверка коэффициентов выполнялась сравнением с численным решением при различных  $k$ .

Одновременно с прогибом определяются и реакции опор в зависимости от числа панелей. Последовательность значений реакций опор  $Y_A$  при  $k = 1, 2, \dots$  имеет вид  $5P/2, 9P/2, 13P/2, 17P/2, 21P/2, 25P/2, \dots$ . Рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют члены этой последовательности достаточно простое:  $Y_{A,k} = 2Y_{A,k-1} - Y_{A,k-2}$ . Из решения этого уравнения получаем вертикальную реакцию шарнира  $Y_A = P(4k + 1) / 2$ . Горизонтальная реакция (распор) не зависит от числа панелей  $X_A = Pa / (2f)$ .

### 3 Results and discussion

Формула (2) с коэффициентами (3), (4) дает решение поставленной задачи. Анализ этого решения составляет отдельный интерес. Как оказывается, полученное решение обладает рядом интересных особенностей, проследить которые удобно на графиках кривых, построенных для безразмерного прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$ , где  $P_s = P(2n + 1)$  — суммарная нагрузка,  $a = L / (2n + 2)$  — длина панели при фиксированном пролете (рис. 5). Прежде всего следует отметить несколько неожиданно сильную, скачкообразную зависимость прогиба от четности числа панелей. Особенно существенны скачки при малом числе  $k$ . Далее кривая несколько сглаживается, имея наклонную асимптоту. Средствами Maple получаем угол наклона асимптоты

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k = \frac{f^2 - hf + h^2}{2L(h + f)}.$$

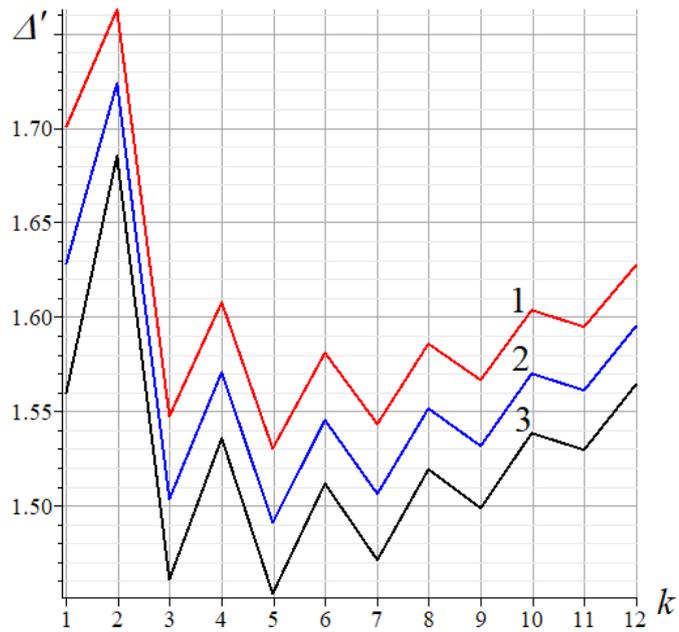


Рис. 5. Зависимость прогиба от числа панелей,  $h=3\text{ m}$ ,  $L=50\text{ m}$ ,  
 1— $h=4.0\text{ m}$ ; 2— $h=4.1\text{ m}$ ; 1— $h=4.2\text{ m}$ ;  
 Fig. 5. Deflection dependence on the number of panels,  
 $h=3\text{ m}$ ,  $L=50\text{ m}$ , 1— $h=4.0\text{ m}$ ; 2— $h=4.1\text{ m}$ ; 1— $h=4.2\text{ m}$

Ферма по высоте несимметричная. Можно предполагать, что соотношение высот  $f$  и  $h$  влияет на прогиб. Примем, например, высоту фермы равной  $f+h=10\text{ m}$ . На графике видно, что поведение кривых прогиба в зависимости от  $f$  для четных и нечетных значений  $k$  принципиально отличается (рис. 6). В первом случае прогиб растет при увеличении  $f$ , во втором — падает. Следовательно, для ферм с четным значением  $k$  (или, что то же, число панелей  $n$  кратно 4) для увеличения жесткости следует брать  $f < h$ . Для нечетных  $k$  более жесткой будет ферма при  $f > h$ . В любом случае, если не стремиться к точному минимальному прогибу, то при любом  $k$  лучшее решение будет при  $f=h$ , а при  $f>h$  прогиб будет больше.

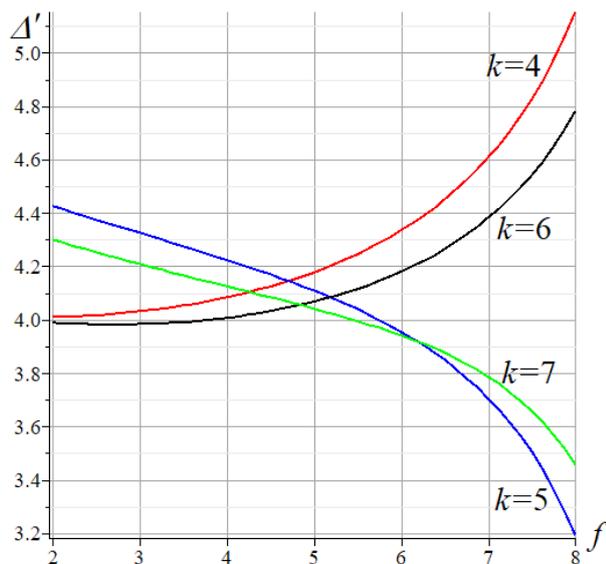


Рис.6. Зависимость прогиба от  $f$  при  $f+h=10\text{ m}$ ,  $L=120\text{ m}$ ,  
 Fig. 6. Deflection dependence on  $f$  at  $f+h=10\text{ m}$ ,  $L=120\text{ m}$

## 4 Conclusions

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы:

1. Распорная схема фермы шпренгельного типа с параллельными поясами и ромбической решеткой допускает точное решение задачи о зависимости прогиба от числа панелей. Формула содержит сравнительно простые коэффициенты полиномиального вида степени не выше четвертой.
2. При нечетном числе панелей ферма обладает свойством мгновенно изменяемого механизма, что не допустимо для ее практического применения. Одновременно это и предостережение для тех, кто готовые решения для одних регулярных конструкций экстраполирует на другие, пусть даже похожие, например, отличающиеся всего на одну панель. Всегда необходима проверка кинематической изменяемости при любом числе панелей.
3. Показано, что на выбор геометрических размеров при поиске оптимальных по жесткости ферм, влияет четность числа панелей в половине пролета.

## 5 Acknowledgements

This research work was supported by the Academic Excellence Project 5-100 proposed by Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation.

## References

1. Rybakov, V.A., Al Ali, M., Panteleev, A.P., Fedotova, K.A., Smirnov, A.V. Bearing capacity of rafter systems made of steel thin-walled structures in attic roofs. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. 76(8). Pp. 28–39. DOI:10.18720/MCE.76.3.
2. Vatin, N.L., Havula, J., Martikainen, L., Sinelnikov, A.S., Orlova, A.V., Salamakhin, S.V. Thin-walled cross-sections and their joints: Tests and FEM-modelling. *Advanced Materials Research*. 2014. 945–949. Pp. 1211–1215. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMR.945-949.1211.
3. Tushina, V.M. Semi-rigid steel beam-to-column connections. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. 73(5). Pp. 25–39. DOI:10.18720/MCE.73.3.
4. Tushina, O.A., Danilov, A.I. The stiffness of rigid joints of beam with hollow section column. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. 64(4). Pp. 40–51. DOI:10.5862/MCE.64.4.
5. Gusakova N.V., Filyushina K.E., Gusakov A.M., Minaev N.N. Selection criteria of space planning and structural solutions of low-rise buildings. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 75(7). Pp. 84–93. doi: 10.18720/MCE.75.8.
6. Travush V.I., Fedorova N.V. Zhivuchest konstruktivnykh sistem sooruzheniy pri osobykh vozdeystviyakh. *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal*. 2018. 5(81). pp. 73–80. doi: 10.18720/MCE.81.8
7. Belyankin N.A., Boyko A.Yu. Formuly dlya progiba balochnoy fermy s proizvolnym chislom paneley pri ravnomernom zagruzhenii. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktzii*. 2019. 1(20). pp. 21-29.
8. Tkachuk G.N. Formula zavisimosti progiba nesimmetrichno nagruzhennoy ploskoy fermy s usilennymi raskosami ot chisla paneley. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktzii*. 2019. 2(21). pp. 32-39.
9. Osadchenko N.V. Analiticheskiye resheniya zadach o progibe ploskikh ferm arochnogo tipa. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktzii*. 2018. 16(1). pp.12-33.
10. Shirokov A.S. Analiticheskiy raschet smeshcheniya opory balochnoy fermy s verkhnimi shprengelyami. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktzii*. 2017. 15 (2). pp. 11-14.
11. Kirsanov M.N. Osobennosti analiticheskogo rascheta prostranstvennykh sterzhnevyykh sistem. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2011. 238(5). Pp. 11-15.
12. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech*. 2005. 85(9), Pp. 607–617.
13. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. 54(4). Pp. 756-782.
14. Zok F. W., Lattice R. M., Begley M. R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. 96. Pp. 184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>
15. Kirsanov M.N. Ploskiye fermy. *Skhemy i raschetnyye formuly: spravochnik*. M.: INFRA-M, 2019. 238 p.

16. Smirnova A.A., Rakhmatulina A.R. Analytical calculation of the displacement of the truss support. Nauchn almanakh. 2017. 28 (2-3). S. 275-278. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.275
17. Zhukov A.A. Analiticheskiy raschet progiba shprengelnoy fermy v sisteme Maple. Nauchnyy almanakh. 2016. 23(9-2). pp. 24-26. DOI: 10.17117/na.2016.09.02.024
18. Arutyunyan V.B. Calculation of the deflection of a statically indeterminate beam truss. Postulat 2018. 6.
19. Kompaneyets K.A. Formula dlya progiba fermy, ravnomerno zagruzhennoy po uzlam nizhnego i verkhnego poyasa. Nauchnyy almanakh.2016. 23 (9-2). pp. 27-29. DOI: 10.17117/na.2016.09.02.027
20. Belyankin N.A., Boyko A. Yu., Plyasova A.A. Induktivnyy analiz deformativnosti mnogoreshchatoy fermy pri nesimmetrichnom zagruzhении. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2018. 3(18). S. 33-41.
21. Arutyunyan V.B. Formuly dlya rascheta progiba ploskoy raskosnoy fermy s parallelnymi poyasami. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2018. 19(4), pp. 29-37.
22. Domanov Ye.V. Vyvod formuly dlya progiba balochnoy fermy s krestoobraznoy reshetkoy. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2017. 15(2). pp. 15-19.
23. Tinkov D.V. Formuly dlya rascheta progiba vsparushennoy balochnoy raskosnoy fermy s proizvolnym chislom paneley. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2016. T. 2. 13 (13). S. 10-14.
24. Kirsanov, M.N. The exact formulas for calculating deflection and forces in the rods of the 'Molodechno' truss with an arbitrary number of panels. Magazine of Civil Engineering. 2016. 61(1). Pp. 33–41. DOI: 10.5862/MCE.61.4
25. Vorobyev O.V. O metodakh polucheniya analiticheskogo resheniya dlya problemy sobstvennykh chastot sharnirnykh konstruksiy. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2020. 1 (24). S. 25-38.
26. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analiz chastot kolebaniy gruzha v zavisimosti ot yego polozheniya v uzlakh ploskoy fermy // Stroitelstvo i rekonstruksiya. 2020. 1(87). S. 14-19. DOI: 10.33979/2073-7416-2020-87-1-14-19
27. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analiz sobstvennykh chastot kolebaniy ploskoy fermy s proizvolnym chislom paneley // Vestnik MGSU. 2019. T.14.V.3. 179-187.[Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels // Vestnik MGSU. 2019. T. 14. Vyp. 2. S. 284-292. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.3.284-292] [Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2019; 14:3:284-292. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.3.284-292]
28. Serpik, I.N., Alekseytsev, A.V. Optimization of flat steel frame and foundation posts system. Magazine of Civil Engineering. 2016. 61(1). Pp. 14–24. DOI: 10.5862/MCE.61.2
29. Serpik I.N., Alekseytsev A.V. Optimizatsiya sistemy stalnoy ploskoy ramy i stolbchatykh fundamentov. Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal. 2016. 1 (61). S. 14-24.
30. Serpik I.N., Alekseytsev A.V., Balabin P.Yu., Kurchenko N.S. Flat rod systems: optimization with overall stability control. Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal. 2017. 8 (76). S. 181-192.
31. Alekseytsev A.V., Serpik I.N. Optimizatsiya ploskikh ferm na osnove geneticheskogo poiska i iterativnoy protsedury triangulyatsii . Stroitelstvo i rekonstruksiya. 2011. № 2 (34). S. 3-8.