



Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss

Vorobev, O.¹

¹ Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation

olvarg@mail.ru

Keywords:

Truss; Analytical solution; Frequency; Dunkerley's method; Rayleigh's quotient; Maple; Symbolic induction

Abstract:

The object of research is the statically determinate cantilever truss. The truss consists of rectangular panels with downward diagonal beams. The truss has two supports, one of which is fixed hinged, and another one is roller support. Masses are located in the nodes of top and bottom chords. Forces in the bars and reactions at supports are determined using the method of joint isolation. The vertical displacement of nodes is derived from the Maxwell-Mohr method with the premise of linear elasticity. Dependence of vertical displacement, Dunkerley's and Rayleigh's estimations of primary truss frequency on the number of panels is deduced from the inductive analysis of the set of particular trusses with an increasing number of panels. Recurrence equations that meet particular coefficients are derived using special functions of the computer algebra system Maple. Obtained solutions are polynomial, with the number of panels as variables. Rayleigh's quotient is calculated with the assumption that the first mode of vibration is equal to truss deflection under the uniformly distributed load. Graphs of the dependencies of obtained estimations on nodes masses, the number of panels, stiffness, and size of the truss are plotted.

1 Введение

Ставится задача определения зависимости оценки Донкерлея и Рэлея от числа панелей n в пролете и k в консольной части, массы узлов, жёсткости и размеров конструкции. Построение математической модели конструкции, расчёт усилий в стержнях и индуктивный вывод искомых формул производится в системе компьютерной алгебры Maple.

В работах [1]–[10] исследовано применение метода индукции в задачах поиска зависимости прогиба фермы от топологических и геометрических параметров конструкции. В [11]–[17] с помощью индукции исследованы собственные частоты колебаний регулярных стержневых конструкций. В работах [18], [19] авторы вывели набор определённых геометрических правил, позволяющих найти оптимальную конструкцию для задач трёх точек [20], [21] и трёх усилий [22]. Динамические свойства регулярных структур представляют значительный интерес для практической инженерии. В большинстве случаев исследования производятся посредством численных методов [23]–[32], которые отличаются большей универсальностью, однако в определённых случаях, особенно для конструкций с большим числом элементов, дают заметные погрешности. Аналитические решения в основном узконаправлены, имеют большую точность, но распространены меньше [33]–[38]. В работе [39] проведен обзор методов решения задачи определения собственных частот некоторых регулярных стержневых конструкций.

Оценка частотных характеристик строительных конструкций является актуальной задачей. Решение этой задачи находит применение при оценке повреждений и поведения под нагрузкой объектов гражданской инфраструктуры [40]–[47], таких как мосты, используется при разработке новых многослойных метаматериалов [48]–[50], с разными статическими и динамическими свойствами, позволяет на ранней стадии проектирования оптимизировать различные конструкции. Частотные характеристики являются важными при рассмотрении

проблем резонанса под действием внешних периодических нагрузок, комфортности эксплуатации и точности работы манипуляторов в роботостроении.

2 Методы

2.1 Схема фермы. Расчёт усилий в стержнях

Рассматриваемая конструкция состоит из $n+k$ прямоугольных панелей с нисходящими раскосами (рис. 1) длиной $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, содержит $R = 4(n+k) + 1$ стержней, относящихся непосредственно к ферме, и два, моделирующих цилиндрическую опору в узле 1 и вертикальный стержень — опору в узле $n+1$. Все соединения стержней в конструкции шарнирные.

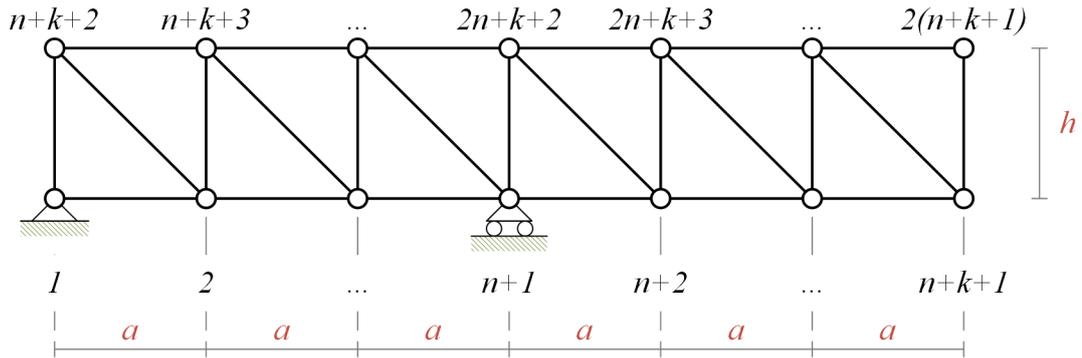


Рис. 1. Схема фермы, нумерация узлов
Fig. 1. Truss diagram with nodes numeration

Для определения усилий в стержнях используется программа, основанная на составлении и решении системы уравнений равновесия узлов в символьной форме. Геометрия фермы базируется на данных о координатах узлов при заданных длинах стержней и числе панелей. Начало координат помещается в узел 1, ось Ox направлена от узла 1 к узлу $n+k+1$, вертикальная ось Oy направлена от узла 1 к узлу $n+k+2$. Координаты узлов задаются следующим образом:

$$\begin{cases} i \leq n+k+1 : & x_i = a(i-1), y_i = 0, \\ i > n+k+1 : & x_i = a(i - (n+k+2)), y_i = h, i = (1 \dots 2(n+k+1)). \end{cases}$$

Для описания топологии фермы используется матрица инцидентности \mathbf{I} размера $N \times R$, где N – количество узлов, $N = 2(n+k+1)$.

Для получения матрицы уравнений равновесия узлов составляется модифицированная матрица инцидентности $\tilde{\mathbf{I}}$ размера $2N \times 2R$ и вида:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Затем формируется матрица длин стержней \mathbf{L} размера $2R \times 2N$ и вида:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_{x,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{l}_{x,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{l}_{x,R} \\ \tilde{l}_{y,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{l}_{y,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{l}_{y,R} \end{bmatrix}, \begin{cases} \tilde{l}_{x,i} = \frac{l_{x,i}}{l_i}, \\ \tilde{l}_{y,i} = \frac{l_{y,i}}{l_i}, \end{cases}$$

здесь $l_{x,i}$ – проекция длины стержня i на ось Ox , $l_{y,i}$ – проекция длины стержня i на ось Oy , l_i – длина стержня i .

Матрица системы уравнений равновесия узлов \mathbf{G} размера $2N \times 2N$ получается из модифицированной матрицы инцидентности $\tilde{\mathbf{I}}$ и матрицы направляющих косинусов \mathbf{L} :

$$\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{L}.$$

В этой матрице строки $i = 1 \dots N$ содержат коэффициенты при проекциях на ось Ox усилий в стержнях, инцидентных вырезанному узлу i , а строки $i = N + 1 \dots 2N$ содержат коэффициенты при проекциях на ось Oy усилий в стержнях, инцидентных вырезанному узлу i . Таким образом имеем уравнения:

$$\mathbf{GS} = \mathbf{P},$$

здесь \mathbf{S} – столбец усилий в стержнях, \mathbf{P} – вектор внешних усилий, приложенных к узлам фермы. Решение уравнения получается методом обратной матрицы:

$$\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{P}.$$

В работах [1]–[7], [11]–[13] для моделирования фермы и вычисления усилий в стержнях используется метод, не разделяющий явно задачу на топологическую и геометрическую составляющие. В данном случае это разделение может быть использовано при применении метода индукции для исследования матриц $\tilde{\mathbf{I}}$ и \mathbf{L} , которые описывают связность составляющих ферму элементов и их положение относительно друг друга.

2.2 Матрица податливости и матрица жёсткости

Элементы матрицы податливости \mathbf{B} , обратной к матрице жёсткости \mathbf{D} , в случае продольных усилий в стержнях определяются по формуле Максвелла-Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{v=1}^{R-3} S_v^{(i)} S_v^{(j)} l_v / (EF),$$

здесь $S_v^{(i)}$ – усилие от действия единичной силы в узле i в стержне v , l_v – длина стержня, EF – жёсткость стержня. Площади сечения всех стержней одинаковые. Суммирование ведётся по всем стержням фермы, кроме трех опорных.

В данном исследовании жёсткость стержней постоянна, однако различные значения жёсткостей можно моделировать введением коэффициентов при EF .

Ранг матрицы \mathbf{B} , в силу граничных условий, накладываемых опорными стержнями, равен $2N - 3$, а её размер - $2N \times 2N$, таким образом, $\det(\mathbf{B}) = 0$. Для получения матрицы жёсткости из матрицы податливости требуется отбросить нулевые строки и столбцы, соответствующие перемещениям узлов, ограниченными опорами, в случае данной фермы это строки и столбцы с номерами $1, N + 1, N + n + 1$. Тогда получим модифицированную матрицу $\tilde{\mathbf{B}}$ размера

$(2N-3) \times (2N-3)$, с рангом $2N-3$ и, как следствие, $\det(\tilde{\mathbf{B}}) \neq 0$. Из неё можно получить модифицированную матрицу жёсткости $\tilde{\mathbf{D}}$ размера $(2N-3) \times (2N-3)$:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{B}}^{-1}.$$

Здесь важно заметить, что после исключения столбцов и строк с номерами $1, N+1, N+n+1$ нумерация в модифицированной матрице $\tilde{\mathbf{D}}$ по отношению к матрице жёсткости \mathbf{D} изменилась: с матрицей $\tilde{\mathbf{D}}$ требуется использовать вектор перемещения \mathbf{X} , у которого также отброшены элементы $1, N+1, N+n+1$.

2.3 Оценка Донкерлея первой частоты фермы

Расположим по всем узлам фермы массы m , запишем систему $2N-3$ уравнений колебаний масс:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{X} = \mathbf{0},$$

где \mathbf{X} – вектор перемещений узлов фермы, $\ddot{\mathbf{X}}$ – вектор ускорений, $\tilde{\mathbf{D}}$ – модифицированная матрица жёсткости, а \mathbf{M} – матрица масс, определённая как:

$$\mathbf{M} = m\mathbf{E},$$

здесь \mathbf{E} – единичная матрица.

Для нижней оценки основной (наименьшей) частоты колебаний $\tilde{\omega}$ используем формулу Донкерлея [51]:

$$\tilde{\omega}^{-2} = \sum_{\alpha=1}^{2N-3} \omega_{\alpha}^{-2},$$

где $\omega_{\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, 2N-3$ — частота колебаний массы M_{α} фермы при отсутствии всех других масс. Дифференциальное уравнение колебаний массы имеет вид:

$$m\ddot{x}_{\alpha} + d_{\alpha,n,k}x_{\alpha} = 0,$$

где x_{α} — перемещение массы, $d_{\alpha,n,k}$ — коэффициент жёсткости (α — номер массы, n, k — количество панелей фермы). Частота колебания груза:

$$\omega_{\alpha} = \sqrt{d_{\alpha,n,k} / m} = \sqrt{1 / (\delta_{\alpha,n,k} m)}.$$

Размещая массу поочередно в узлах фермы, и обобщая полученный вектор s коэффициентов с помощью оператора `rgf_findressig` системы Maple, получаем $s/2$ рекуррентных уравнений с $s/2$ начальными условиями. Систему решаем с помощью оператора `rsolve`. Для случая $n = k$ (промежуточная опора находится в середине длины фермы) имеем решение

$$\tilde{\omega}_D^2(n) = \frac{EF}{m} \frac{45nh^2a^2}{(C_{D,1} + C_{D,2}n + C_{D,3}n^2 + C_{D,4}n^3 + C_{D,5}n^4 + C_{D,6}n^5)},$$

$$C_{D,1} = 15h^2(a^3 + 3c^3 + 3h^3), C_{D,2} = -2(a^5 - 30h^2a^3 - 45a^2h^3 - 45c^3h^2 - 45h^5),$$

$$C_{D,3} = 15a^2(a^3 + 11h^2a + 6c^3 + 9h^3), C_{D,4} = 5a^2(11a^3 + 33h^2a + 18c^3 + 18h^3),$$

$$C_{D,5} = 60a^5, C_{D,6} = 37a^5.$$

Аналитические зависимости оценки Донкерлея для случая $n \neq k$ получились весьма громоздкими и здесь не приводятся.

2.4 Оценка Рэлея первой частоты фермы

Для получения оценки первой частоты фермы сверху воспользуемся методом Рэлея [52]:

$$\omega_1^2 < \tilde{\omega}_R^2 = \frac{\mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}},$$

где $\tilde{\omega}_R$ — оценка Рэлея первой частоты фермы, \mathbf{u} — столбец перемещений узлов фермы, близкий моде колебания, соответствующей первой частоте, $\tilde{\mathbf{D}}$ — модифицированная матрица жёсткости, \mathbf{M} — матрица масс, расположенных в узлах. В качестве столбца \mathbf{u} выбираются вертикальные перемещения узлов фермы под действием равномерно распределённой нагрузки. Данный выбор обусловлен тем, что для тривиальной задачи $k=0$, то есть в случае отсутствия консольной части фермы, вертикальные перемещения позволяют оценить основную частоту методом Рэлея с большой точностью. Для получения вертикальных перемещений используется матрица податливости $\tilde{\mathbf{B}}$:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{F},$$

где \mathbf{F} — столбец вертикальных единичных сил, определяющийся как:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_i]^T = \begin{cases} 0 & : i \leq N \\ -1 & : i > N \end{cases}.$$

Последовательно изменяя величины k, n и обобщая полученные коэффициенты с помощью символьной индукции оператором `rgf_findrecur` системы Maple, получаем $s/2$ рекуррентных уравнений с $s/2$ начальных условий. Данную систему решаем с помощью оператора `rsolve`. Для случая $n = k$ получаем:

$$\omega_R^2(n) = \frac{EF}{m} \frac{378h^2 \sum_{i=1}^5 C_{RN,i} n^r}{\sum_{j=1}^9 C_{RD,j} n^r}, r = i - 1,$$

$$C_{RN,1} = 15h^3, C_{RN,2} = 4(2a^3 + 5c^3 + 5h^3), C_{RN,3} = 2(7a^3 + 10c^3 + 10h^3), C_{RN,4} = 12a^3, C_{RN,5} = 6a^3,$$

$$C_{RD,1} = 5670h^6, C_{RD,2} = 996a^6 + 5112a^3c^3 + 6372a^3h^3 + 6804c^6 + 17388c^3h^3 + 18144h^6,$$

$$C_{RD,3} = 3552a^6 + 17244a^3c^3 + 20394a^3h^3 + 20412c^6 + 48384c^3h^3 + 35532h^6,$$

$$C_{RD,4} = 8009a^6 + 30780a^3c^3 + 35190a^3h^3 + 23436c^6 + 50652c^3h^3 + 27216h^6,$$

$$C_{RD,5} = 13025a^6 + 35460a^3c^3 + 39870a^3h^3 + 9828c^6 + 19656c^3h^3 + 9828h^6,$$

$$C_{RD,6} = 14858a^6 + 24588a^3c^3 + 26478a^3h^3, C_{RD,7} = 11990a^6 + 7776a^3c^3 + 7776a^3h^3,$$

$$C_{RD,8} = 6377a^6, C_{RD,9} = 1673a^6.$$

Как и в случае определения оценки Донкерлея, аналитические зависимости оценки Рэлея при $n \neq k$ в виду большого размера результата в статье не приводятся.

В случае оценки Рэлея, символьная индукция является очень затратной по времени, что может быть связано с тем, что требуется найти зависимость для квадратичной формы, и, таким образом, если вертикальная деформация произвольного узла описывается полиномом степени s , то квадратичная форма уже описывается полиномом степени $2s$, и, как следствие, требует большего количества значений, вычисленных в символьном виде.

2.5 Получение первой собственной частоты численными методами

Для проверки полученных формул были вычислены собственные значения первой частоты фермы. Данная конструкция была представлена следующей системой дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0},$$

где $\bar{\mathbf{X}}$ – вектор перемещений узлов фермы, $\ddot{\bar{\mathbf{X}}}$ – вектор ускорений, $\tilde{\mathbf{D}}$ – модифицированная матрица жёсткости, а \mathbf{M} – матрица масс, определённая как:

$$\mathbf{M} = m\mathbf{E},$$

здесь \mathbf{E} – единичная матрица. Собственные частоты и соответствующие им моды вычисляются при решении проблемы собственных значений матрицы \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}.$$

Решение этой проблемы находится с помощью оператора Eigenvectors системы компьютерной алгебры Maple. Оператор выдаёт собственные значения λ_i матрицы \mathbf{C} и соответствующие им собственные вектора. Собственные частоты фермы ω_i зависят от λ_i как:

$$\omega_i^2 = \lambda_i.$$

3 Результаты

Для проверки полученных результатов использовались полученные численно значения собственных частот фермы. Так для случая: $n = k$, $a = L_F / (n + k)$, $h = 1 \text{ м}$, $EF = 10^6 \text{ Н}$, $m = 1/N \text{ кг}$, где $L_F = 10 \text{ м}$ – длина фермы, получаем следующие зависимости оценок Донкерлея и Рэлея основной частоты ω_1 и её численных значений от k :

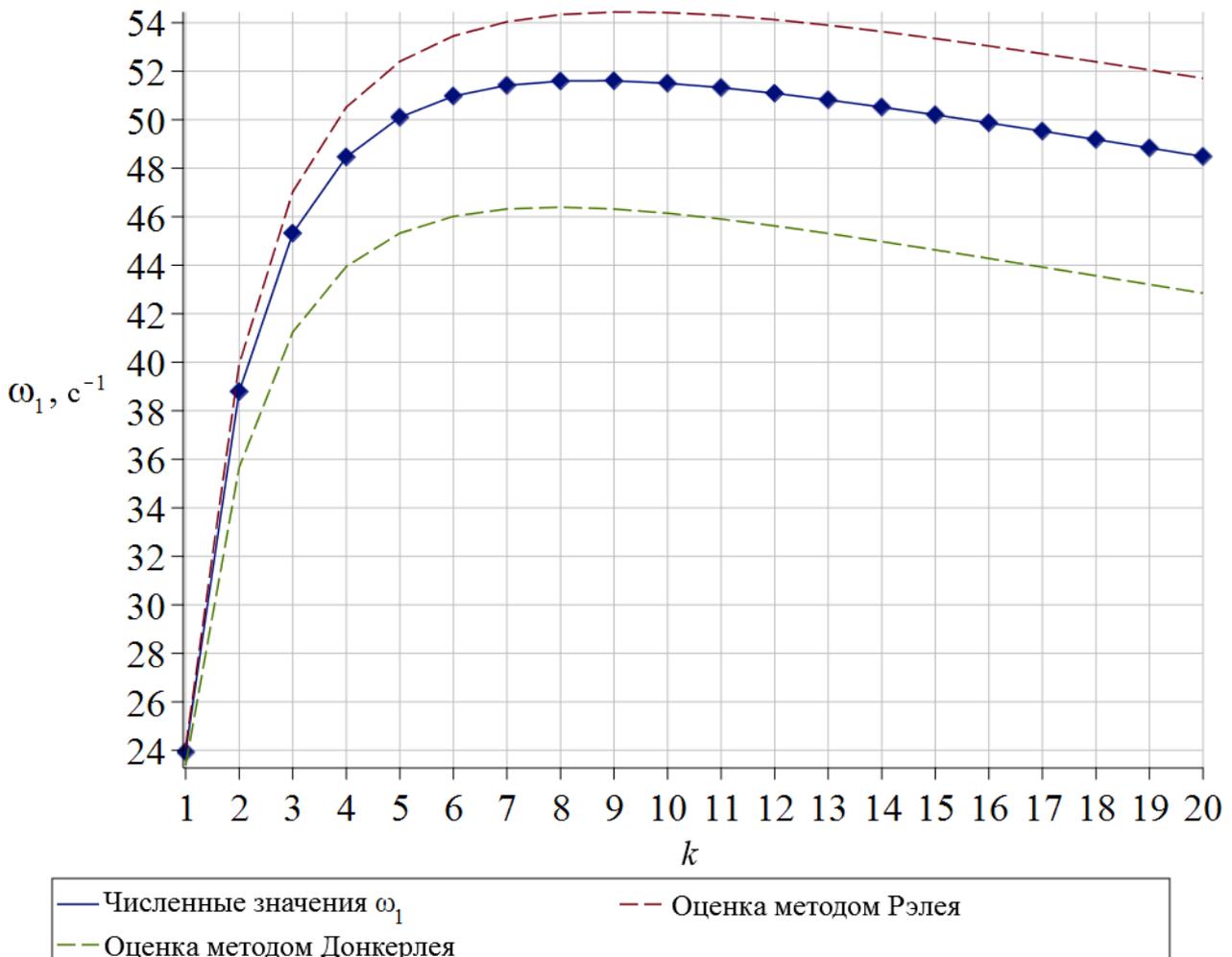


Рис. 2 Зависимость частот от количества панелей
Fig. 2 Frequency dependence on the number of panels

При анализе зависимости оценок частоты от количества панелей $k = n$ (рис. 2), а также других возможных значений k, n , было отмечено, что разность между верхней и нижней оценками не является постоянной. Для того, чтобы исследовать причины этого, были построены графики

Vorobev, O.

Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss;

2020; Construction of Unique Buildings and Structures; Volume 92 Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4

оценок Донкерлея и Рэля (рис 3.), а также график величины разности между верхней и нижней оценкой (рис. 4). Здесь важно отметить, что физический смысл на данных графиках есть только у целых значений k и n .

Для оценки Донкерлея наблюдается увеличение частоты при определённых значениях k, n . Так как она не зависит от выбора формы первой моды колебаний, в отличие от оценки Рэля, эти данные можно интерпретировать как увеличение жёсткости конструкции, при изменении топологии фермы, в частности для случаев, когда консольная часть фермы меньше, чем пролётная часть.

В случае оценки Рэля наблюдается намного более выраженная область экстремальных значений, расположенных вдоль определённой линии. Так как точность данного показателя зависит от выбора формы перемещения узлов фермы, выделить определённую физическую интерпретацию из полученных данных уже нельзя.

Для исследования зависимости точности метода Рэля от значений k, n в рассмотрение вводится следующий параметр:

$$\Delta_{\omega} = \tilde{\omega}_R - \tilde{\omega}_D,$$

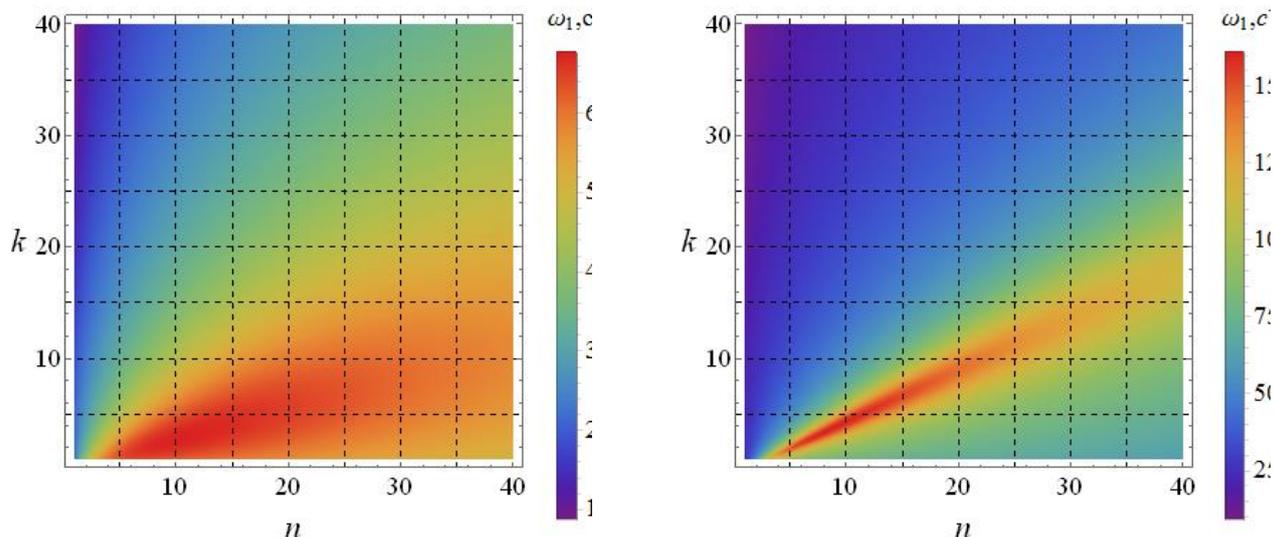
здесь $\tilde{\omega}_R$ – оценка Рэля сверху основной частоты конструкции, $\tilde{\omega}_D$ – оценка Донкерлея снизу основной частоты конструкции, Δ_{ω} – размер диапазона частот, в котором лежит основная частота конструкции. Очевидным является утверждение, что чем меньше Δ_{ω} , тем точнее комбинация данных двух методов даёт оценку первой частоты фермы.

На полученном графике $\Delta_{\omega}(n, k)$ можно наблюдать линию, которая проходит через точки экстремума данной функции. При рассмотрении целых значений k, n с использованием метода наименьших квадратов [53] было получено уравнение данной линии:

$$k(n) = 0,480614n - 0,405984.$$

Эта линия делит график $\Delta_{\omega}(n, k)$ на две характерные по поведению этой функции области:

1. Для всех $k > 0,480614n - 0,405984$ размер диапазона частот монотонно убывает при увеличении k . Этому результату можно дать практическую интерпретацию: для всех ферм подобной топологии, чем больше число панелей в консольной части по сравнению с пролётной, тем точнее данный метод оценивает основную частоту конструкции.
2. Для всех $k < 0,480614n - 0,405984$ размер диапазона частот монотонно убывает при уменьшении k . Этому результату можно дать практическую интерпретацию: для всех ферм подобной топологии, чем меньше число панелей в консольной части по сравнению с пролётной, тем точнее данный метод оценивает основную частоту конструкции.



Значения оценки Донкерлея частоты колебаний в зависимости от числа панелей k, n .

Значения оценки Рэля частоты колебаний в зависимости от числа панелей k, n .

Рис. 3. Зависимости оценок частоты от числа панелей.
Fig. 3 Frequency estimation dependence on the number of panels

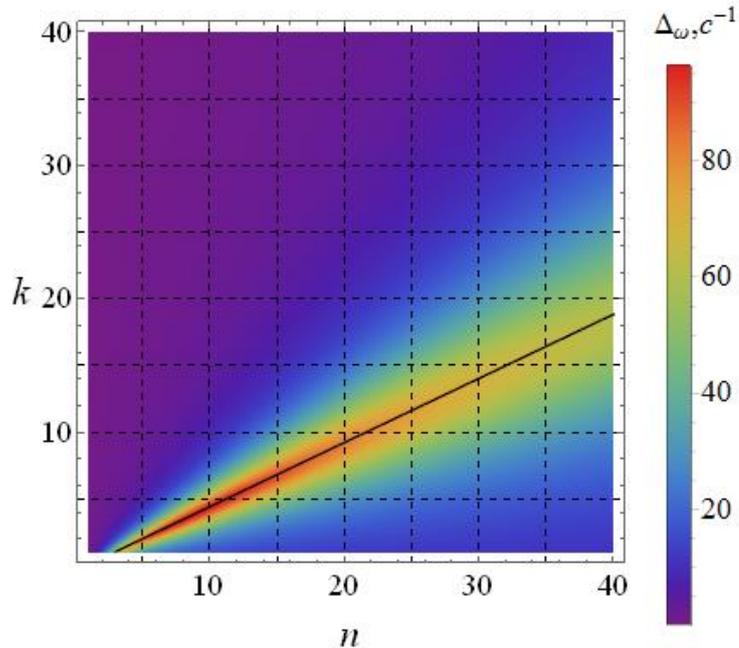


Рис. 4. Зависимость разности между верхней и нижней оценками частоты от числа панелей.
Fig. 3 Dependence of range between the upper and lower estimations of first frequency on the number of panels.

Полученный экстремум является следствием выбора в качестве вектора u в оценке Рэля вертикальных перемещений фермы под действием распределённой нагрузки, направленной вниз. Так на рис. 5, 6 видно, что в случаях, когда значения k, n приближаются к области экстремума, форма вертикальных перемещений начинает больше соответствовать форме колебаний второй частоты. Также на рис. 7 можно увидеть, что этот способ оценки первой частоты фермы при определённых значениях k, n начинает включать в свой диапазон также и вторую частоту.

Анализ результатов показывает, что использование только вертикальной деформации под действием распределённой силы в качестве приближённой оценки первой формы колебаний в случае фермы с консольной частью может привести к значительным ошибкам.

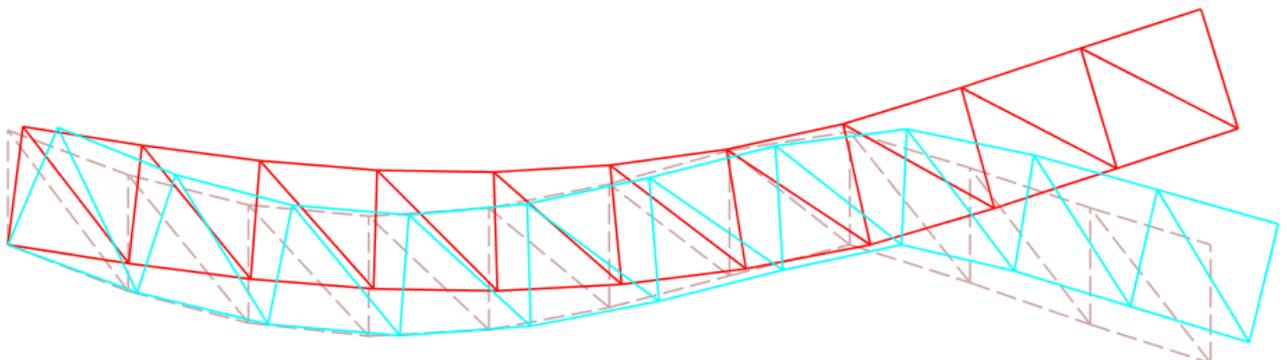


Рис. 5. Первая форма колебаний (красный), вторая форма колебаний (синий), вертикальные перемещения под действием распределённой нагрузки (пунктир). $k = 3$; $n = 7$.
Fig. 5 First mode of oscillations (red), second mode of oscillations (blue), vertical displacement under uniformly distributed load (dashed line). $k = 3$; $n = 7$.

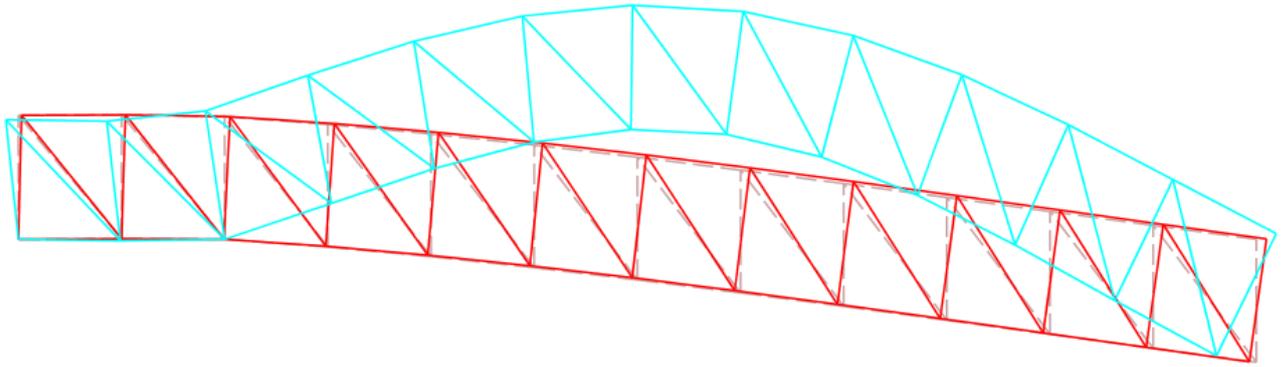


Рис. 6. Первая форма колебаний (красный), вторая форма колебаний (синий), вертикальные перемещения под действием распределённой нагрузки (пунктир). $k = 10$; $n = 2$.

Fig. 6 First mode of oscillations (red), second mode of oscillations (blue), vertical displacement under uniformly distributed load (dashed line). $k = 10$; $n = 2$.

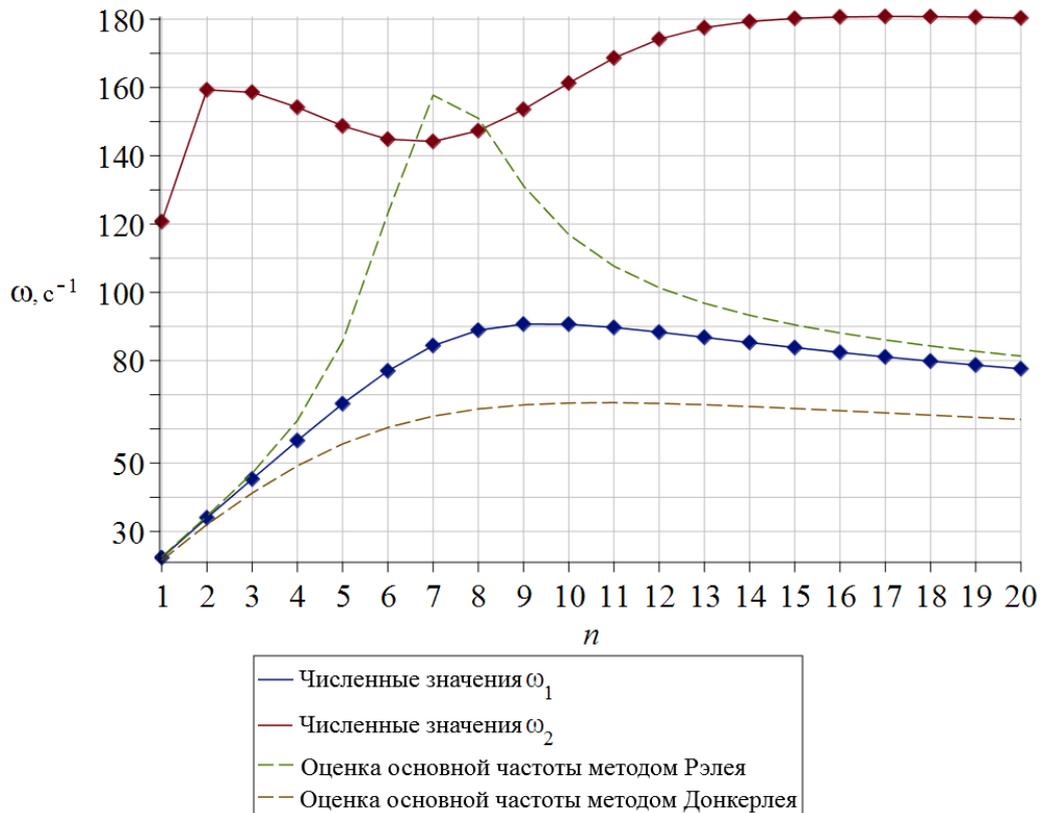


Рис. 7. Зависимости от числа n частот. $k = 3$.

Fig. 7 Dependence of the frequencies on the number of panels n. $k = 3$.

4 Выводы

Построена математическая модель плоской балочной-консольной фермы. Разработан алгоритм вывода точных аналитических решений для усилий в стержнях и оценок Рэлея и Донкерлея первой частоты. С помощью численных вычислений исследована применимость данных аналитических решений при различных количествах панелей. Полученные формулы можно применять как для оценки работы реальных сооружений такого типа, так и для тестирования численных решений, если параметры фермы лежат в области применимости. Основным достоинством аналитических решений, включающих в себя не только размеры конструкции, массу её узлов и жёсткость стержней, но и число панелей, является возможность применения расчётных формул к сооружениям с большим и весьма большим числом стержней. Если численные методы при увеличении числа стержней в объекте неизбежно накапливают погрешности счёта, то точность расчётной формулы, полученной методом индукции, не меняется и определяется только адекватностью использованной модели конструкции.

В рамках исследования также были выявлены следующие проблемы:

- Высокая сложность вычисления методом символьной индукции оценки Рэлея основной частоты фермы. Одним из возможных способов решения данной проблемы является поиск рекуррентной формулы для столбца вертикальных перемещений посредством символьной индукции.
- Снижение точности оценки при определённых значениях k, n , вплоть до потери самого решения, т.е. попадания в диапазон второй собственной частоты. Одним из возможных способов решения данной проблемы является выбор более подходящей формы вектора перемещений узлов фермы.

В дальнейшем с помощью данной методики предполагается исследовать:

- Полный частотный спектр регулярной структуры: с помощью корректного выбора формы вектора перемещений узлов фермы и метода Рэлея можно разбить частотную прямую на диапазоны, характерные для соответствующих частот.
- Отдельно исследовать влияние топологии и геометрии на частотные свойства конструкции: с помощью метода символьной индукции можно исследовать отдельно матрицы, соответствующие топологическим и геометрическим параметрам фермы.

References

1. Kirsanov, M., Serdjuks, D., Buka-Vaivade, K. Analytical Dependence of Deflection of the Lattice Truss on the Number of Panels. Lecture Notes in Civil Engineering. 2020. 70. Pp. 25–35. DOI:10.1007/978-3-030-42351-3_3.
2. Kirsanov, M., Tinkov, D. Analytical calculation of the deflection of the lattice truss. MATEC Web of Conferences. 2018. 193. Pp. 1–7. DOI:10.1051/mateconf/201819303015.
3. Kirsanov, M., Komerzan, E., Sviridenko, O. Inductive analysis of the deflection of a beam truss allowing kinematic variation. MATEC Web of Conferences. 2018. 239. DOI:10.1051/mateconf/201823901012.
4. Kirsanov, M., Tinkov, D., Boiko, O. Analytical calculation of the combined suspension truss. MATEC Web of Conferences. 2019. 265. Pp. 05025. DOI:10.1051/mateconf/201926505025.
5. Kirsanov, M. One feature of the constructive solutions of the lattice girder. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. 14(4). Pp. 90–97. DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-4-90-97.
6. Kirsanov, M. Analysis of the deflection of a truss with a decorative lattice. Construction Science and Education. 2019. (1). Pp. 1–10. DOI:10.22227/2305-5502.2019.1.1.
7. Kirsanov, M. Calculating model of a frame type planar truss having an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2018. (10). Pp. 1184–1192. DOI:10.22227/1997-0935.2018.10.1184-1192.
8. Kirsanov, M., Serdjuks, D., Buka-Vaivade, K. Analytical Expression of the Dependence of the Multi-lattice Truss Deflection on the Number of Panels. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. 90(9003). DOI:10.18720/CUBS.90.3.
9. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M., Serdjuks, D. Calculation of deformations of a cantilever-frame

Vorobev, O.

Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss;

2020; Construction of Unique Buildings and Structures; Volume 92 Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4

- planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2020. (4). Pp. 510–517. DOI:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.
10. Kirsanov, M., Ovsyannikova, V. Analytical calculation of girder deflection in the maple system. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2020. (3). Pp. 15–19. DOI:10.37538/0039-2383.2020.3.15.19.
 11. Kirsanov, M., Komerzan, E., Sviridenko, O. Analytical calculation of the deflection of an externally statically indeterminate lattice truss. *MATEC Web of Conferences*. 2019. 265. Pp. 05027. DOI:10.1051/mateconf/201926505027.
 12. Kirsanov, M. Lower estimate of the fundamental frequency of natural oscillations of a truss with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2019. (7). Pp. 844–851. DOI:10.22227/1997-0935.2019.7.844-851.
 13. Kirsanov, M., Tinkov, D. Analytical solution of the frequency of the load oscillation at an arbitrary girder node in the system Maple. *Construction Science and Education*. 2019. (4). Pp. 3–3. DOI:10.22227/2305-5502.2018.4.3.
 14. Kirsanov, M., Tinkov, D. Analysis of the frequencies of load oscillations, depending on its position in the nodes of planar truss. *Building and reconstruction*. 2020. 87(1). Pp. 14–19. DOI:10.33979/2073-7416-2020-87-1-14-19. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=42532000>.
 15. Kirsanov, M.N., Tinkov, D. V. Formulas for calculating the frequency spectrum of natural oscillations of a beam truss with an arbitrary number of panels. *Постулат*. 2019. 3(564). Pp. 1–19. DOI:10.4324/9781315853178.
 16. Kirsanov, M., Tinkov, D. Analytical expressions of the frequencies of small oscillations of a girder with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2019. 1(20). Pp. 14–20.
 17. Kirsanov, M.N., Tinkov, D. V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2019. 14(3). Pp. 284–292. DOI:10.22227/1997-0935.2019.3.284-292. URL: <http://vestnikmgsu.ru/ru/component/sjarchive/issue/article.display/2019/3/284-292>.
 18. Mazurek, A. Geometrical aspects of optimum truss like structures for three-force problem. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2012. 45(1). Pp. 21–32. DOI:10.1007/s00158-011-0679-y.
 19. Mazurek, A., Baker, W.F., Tort, C. Geometrical aspects of optimum truss like structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2011. 43(2). Pp. 231–242. DOI:10.1007/s00158-010-0559-x.
 20. Prager, W. Nearly optimal design of trusses. *Computers & Structures*. 1978. 8(3–4). Pp. 451–454. DOI:10.1016/0045-7949(78)90190-6. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0045794978901906>.
 21. Prager, W. Optimal layout of trusses with finite numbers of joints†. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1978. 26(4). Pp. 241–250. DOI:10.1016/0022-5096(78)90019-4. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0022509678900194>.
 22. Sokół, T., Lewiński, T. On the solution of the three forces problem and its application in optimal designing of a class of symmetric plane frameworks of least weight. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2010. 42(6). Pp. 835–853. DOI:10.1007/s00158-010-0556-0.
 23. Zhu, R., Li, F., Shao, F., Zhang, D. Static and dynamic behaviour of a hybrid PFRP-aluminium space truss girder: Experimental and numerical study. *Composite Structures*. 2020. 243(March). Pp. 112226. DOI:10.1016/j.compstruct.2020.112226. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112226>.
 24. Wang, D., Xu, W. Minimum Weight Optimal Design of Truss Structure with Frequency Response Function Constraint. *Journal of Aerospace Engineering*. 2020. 33(4). Pp. 1–12. DOI:10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0001149.
 25. Jalili, S., Talatahari, S. Optimum Design of Truss Structures Under Frequency Constraints using Hybrid CSS-MBLS Algorithm. *KSCIE Journal of Civil Engineering*. 2018. 22(5). Pp. 1840–1853. DOI:10.1007/s12205-017-1407-y.
 26. Tejani, G.G., Savsani, V.J., Patel, V.K., Mirjalili, S. Truss optimization with natural frequency bounds using improved symbiotic organisms search. *Knowledge-Based Systems*. 2018. 143. Pp. 162–178. DOI:10.1016/j.knosys.2017.12.012. URL: <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2017.12.012>.
 27. Millan-Paramo, C., Abdalla Filho, J.E. Size and Shape Optimization of Truss Structures with Natural Frequency Constraints Using Modified Simulated Annealing Algorithm. *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2020. 45(5). Pp. 3511–3525. DOI:10.1007/s13369-019-04138-5. URL: <https://doi.org/10.1007/s13369-019-04138-5>.

Vorobev, O.

Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss;

2020; *Construction of Unique Buildings and Structures*; Volume 92 Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4

28. Jalili, S., Hosseinzadeh, Y. Combining Migration and Differential Evolution Strategies for Optimum Design of Truss Structures with Dynamic Constraints. *Iranian Journal of Science and Technology - Transactions of Civil Engineering*. 2019. 43(Gomes 2011). Pp. 289–312. DOI:10.1007/s40996-018-0165-5. URL: <https://doi.org/10.1007/s40996-018-0165-5>.
29. Farshchin, M., Camp, C. V., Maniat, M. Multi-class teaching-learning-based optimization for truss design with frequency constraints. *Engineering Structures*. 2016. 106. Pp. 355–369. DOI:10.1016/j.engstruct.2015.10.039. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.10.039>.
30. Mortazavi, A. Size and layout optimization of truss structures with dynamic constraints using the interactive fuzzy search algorithm. *Engineering Optimization*. 2020. Pp. 1–23. DOI:10.1080/0305215X.2020.1726341. URL: <https://doi.org/0305215X.2020.1726341>.
31. Padil, K.H., Bakhary, N., Abdulkareem, M., Li, J., Hao, H. Non-probabilistic method to consider uncertainties in frequency response function for vibration-based damage detection using Artificial Neural Network. *Journal of Sound and Vibration*. 2020. 467. Pp. 115069. DOI:10.1016/j.jsv.2019.115069. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.115069>.
32. Grzywiński, M., Selejdak, J., Dede, T. Truss optimization with frequency constraints based on TLBO algorithm. *AIP Conference Proceedings*. 2020. 2239(May). DOI:10.1063/5.0007818. URL: <http://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/5.0007818>.
33. Li, J., Zhang, R., Liu, J., Cao, L., Chen, Y.F. Determination of the natural frequencies of a prestressed cable RC truss floor system. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*. 2018. 122(July). Pp. 582–590. DOI:10.1016/j.measurement.2017.08.048. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.measurement.2017.08.048>.
34. Zhang, W.F., Li, Y., Liu, Y.C., Huang, B., Yan, W. Analytical solution and characteristics of vertical seismic displacement of truss cable structures. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2019. 218(1). Pp. 0–6. DOI:10.1088/1755-1315/218/1/012093.
35. Suwała, G., Jankowski. Nonparametric identification of structural modifications in Laplace domain. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017. 85(October 2015). Pp. 867–878. DOI:10.1016/j.ymsp.2016.09.018.
36. Zhou, X., Li, J., Liu, J., Frank Chen, Y. Dynamic Performance Characteristics of Pre-Stressed Cable RC Truss Floor System under Human-Induced Loads. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2017. 17(4). Pp. 1–20. DOI:10.1142/S0219455417500493.
37. Zhou, X., Cao, L., Chen, Y.F., Liu, J., Li, J. Experimental and analytical studies on the vibration serviceability of pre-stressed cable RC truss floor systems. *Journal of Sound and Vibration*. 2016. 361. Pp. 130–147. DOI:10.1016/j.jsv.2015.10.001. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2015.10.001>.
38. Chen, Z., Chen, F., Zhou, L. Slow-fast dynamics in the truss core sandwich plate under excitations with high and low frequencies. *Applied Mathematical Modelling*. 2020. 88. Pp. 382–395. DOI:10.1016/j.apm.2020.06.055. URL: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.055>.
39. Vorobyev, O. About methods of obtaining analytical solution for eigenfrequencies problem of trusses. *Structural mechanics and structures*. 2020. 1(24). Pp. 25–38.
40. Kim, M.J., Eun, H.C. Identification of damage-expected members of truss structures using frequency response function. *Advances in Mechanical Engineering*. 2017. 9(1). Pp. 1–10. DOI:10.1177/1687814016687911.
41. Venglar, M., Sokol, M. Experimental modal analysis of diagonal members. *Vibroengineering Procedia*. 2019. 23. Pp. 110–114. DOI:10.21595/vp.2019.20671.
42. Debnath, N., Dutta, A., Deb, S.K. Multi-modal Passive-vibration Control of Bridges under General Loading-condition. *Procedia Engineering*. 2016. 144. Pp. 264–273. DOI:10.1016/j.proeng.2016.05.132. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2016.05.132>.
43. Lin, R.M. Modelling, detection and identification of flexural crack damages in beams using frequency response functions. *Meccanica*. 2016. 51(9). Pp. 2027–2044. DOI:10.1007/s11012-015-0350-6.
44. Siekierski, W. An analytical method to estimate the natural bending frequency of the spans of railway through truss bridges with steel-and-concrete composite decks. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*. 2016. 230(8). Pp. 1908–1918. DOI:10.1177/0954409715618691.
45. Debnath, N., Deb, S.K., Dutta, A. Multi-modal vibration control of truss bridges with tuned mass dampers under general loading. *JVC/Journal of Vibration and Control*. 2016. 22(20). Pp. 4121–4140. DOI:10.1177/1077546315571172.

Vorobev, O.

Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss;

2020; *Construction of Unique Buildings and Structures*; Volume 92 Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4

46. Çelebi, M., Ghahari, S.F., Haddadi, H., Taciroglu, E. Response study of the tallest California building inferred from the Mw7.1 Ridgecrest, California earthquake of 5 July 2019 and ambient motions. *Earthquake Spectra*. 2020. Pp. 875529302090683. DOI:10.1177/8755293020906836. URL: <http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/8755293020906836>.
47. Al-Azawi, T.K., Abdulmajeed, M.W., Hashoosh, A.A. Control of footstep vertical vibration for Vierendeel truss – supported steel footbridges. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. 737(1). DOI:10.1088/1757-899X/737/1/012006. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/737/1/012006>.
48. Li, B., Liu, Y., Tan, K.T. A novel meta-lattice sandwich structure for dynamic load mitigation. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2019. 21(6). Pp. 1880–1905. DOI:10.1177/1099636217727144.
49. Guo, Z., Liu, C., Li, F. Vibration analysis of sandwich plates with lattice truss core. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2019. 26(5). Pp. 424–429. DOI:10.1080/15376494.2017.1400616. URL: <https://doi.org/10.1080/15376494.2017.1400616>.
50. An, X., Lai, C., Fan, H., Zhang, C. 3D acoustic metamaterial-based mechanical metalattice structures for low-frequency and broadband vibration attenuation. *International Journal of Solids and Structures*. 2020. 191–192. Pp. 293–306. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2020.01.020. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.01.020>.
51. Stephen, N.G. On southwell's a novel dunkerley's method. *Journal of Sound and Vibration*. 1995. 181(1). Pp. 179–184. DOI:10.1006/jsvi.1995.0133. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X85701332>.
52. Thomson, W.T. *Theory of vibration with applications, fourth edition. Theory of Vibration with Applications, Fourth Edition*. 2018. Pp. 1–546. DOI:10.1201/9780203718841.
53. Aldrich, J. Doing least squares: Perspectives from Gauss and Yule. *International Statistical Review*. 1998. 66(1). Pp. 61–81. DOI:10.1111/j.1751-5823.1998.tb00406.x. URL: <http://doi.wiley.com/10.1111/j.1751-5823.1998.tb00406.x>.