



Research Article

Received: April 1, 2022

Accepted: April 30, 2022

Published: May 3, 2022

ISSN 2304-6295

Self-oscillatory process of a viscoelastic elongated plate

Mansurov, Mukhsin Mannonovich¹ Abdikarimov, Rustamkhan Alimkhanovich^{2,4} Mirsaidov, Mirziyod Mirsaidovich^{3,4}

¹Kokand branch of the Tashkent State Technical University, Kokand, Uzbekistan, mansurov00707@mail.ru

²Tashkent Institute of Architecture and Civil Engineering, Tashkent, Uzbekistan, rabdikarimov@mail.ru

³National Research University” Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers”, 39 Kori Niyoziy str., 100000, Tashkent, Uzbekistan

⁴Institute of Mechanics and Seismic Stability of Building named after M. T. Urazbayeva, Tashkent, Uzbekistan, theormir@mail.ru

Keywords:

Viscoelasticity; Elongated plate; Flutter; Geometric and aerodynamic nonlinearity; Nonlinear integro-differential equation

Abstract:

The object of research. The self-oscillating process of a viscoelastic elongated plate moving in a stationary, supersonic gas flow is considered, taking into account geometric and aerodynamic nonlinearities. A mathematical model, technique, computational algorithm, and a personal computer calculation program for estimating the flutter of a viscoelastic elongated plate in a gas flow have been developed. **Method.** Using the Bubnov-Galerkin method, based on the polynomial approximation of deflections, the problem is reduced to solving a nonlinear integro-differential equation of the Volterra type with a singular relaxation kernel, which is solved by a numerical method based on the use of quadrature formulas, which eliminates the singularities in the relaxation kernel. **Results.** The results of linear and nonlinear flutter calculations are presented for various physical, mechanical, and geometric parameters of a viscoelastic elongated plate. As a result of the study, it was found that taking into account the geometric nonlinearity leads to an increase and taking into account the viscoelastic properties of the material to a decrease in the values of the critical speed, while the rheological parameters of viscosity A and singularity α have a significant impact on the values of the critical speed, and the influence of the third rheological parameter β is insignificant.

1 Introduction

Материалы, обладающие нелинейной диаграммой деформирования, например композиты, сплавы и некоторые виды металлов широко применяются в различных областях: строительстве, авиастроении, машиностроении и т.д. Поэтому исследование конструкций на динамическую устойчивость с учетом геометрической и одновременно аэродинамической нелинейностью является актуальной проблемой.

Высокие темпы строительства, создание уникальных конструкций и сооружений, необходимость выполнения весьма сложных заказов промышленности требуют дальнейшего развития теории расчета конструкций типа стержень, пластинка и оболочка.

В связи с этим правильный учет свойств материала таких как пластичность, вязкоупругость, неоднородность, анизотропность, нелинейность и т.п. имеет большое теоретическое и практическое значение, гарантирует приближение теории, расчета конструкции к фактическим условиям, обеспечивает надежность и долговечность конструкций при наименьших затратах материалов.

Mansurov, M.; Abdikarimov, R.; Mirsaidov, M.

Self-oscillatory process of a viscoelastic elongated plate;

2022; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **100** Article No 10003. doi: 10.4123/CUBS.100.3



Теория вязкоупругости получила широкое применение в расчетах элементов тонкостенных конструкций типа стержень, пластинка и оболочка. При этом необходимо иметь в виду, что учет времени является обязательным при решении почти любой задачи расчета тонкостенных конструкций.

Классические работы по теории колебаний тонкостенных конструкций, аэроупругости и устойчивости неконсервативных механических систем освещены в работах [1]-[3].

В статье [6] исследуется динамическая устойчивость вязкоупругих консольных пластин, подверженных осевому потоку, с использованием метода дифференциальных квадратур.

В работе [7] излагаются методы решения линейных и нелинейных квазистатических и динамических задач теории вязкоупругости. Показана эффективность метода степенного ряда для решения линейных и нелинейных слабо-сингулярных интегральных уравнений наследственной теории вязкоупругости.

В работе [8] приведены новые постановки задач флаттера пластин и оболочек, суть которых заключается в том, что, существенно уточняя известную формулу поршневой теории слагаемыми, получено выражение для давления аэродинамического взаимодействия. Разработан численно-аналитический метод, позволяющий исследовать новые классы задач флаттера пластин и оболочек, произвольных в плане. Обнаружены новые механические эффекты.

В статье [9] исследуются колебательные процессы, возникающие в элементах технических тонкостенных объектов, движущихся в сверхзвуковом потоке газа. Предполагается, что пластина толщиной h обтекается, с одной стороны, сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью V . Учитывается аэродинамическое давление, согласно поршневой теории А.А. Ильюшина. Уравнение колебаний относительно прогибов описывается интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных. С помощью метода Бубнова - Галеркина, основанного на полиномиальной аппроксимации прогибов, задача сводится к исследованию системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений, где время является независимой переменной. Исследовано влияние физико-механических и геометрических параметров, постоянных усилий в срединной поверхности и реологических параметров на флаттер пластины. Приведены критическая скорость флаттера в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик пластины.

В работах [10], [11] рассматриваются различные задачи, связанные с оценкой флаттера вязкоупругих тонкостенных конструкций с учетом физической нелинейности и нелинейного аэродинамического воздействия. Построена математическая модель задачи. С помощью метода Бубнова-Галёркина, основанного на многочленной аппроксимации прогибов, задача сводится к решению системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Для решения полученной системы, при слабо-сингулярном ядре Колтунова-Ржаницына, применен численный метод, основанный на использовании квадратурных формул.

Экспериментальные результаты измерения скорости флаттера тонко-плоских пластин со свободной передней кромкой в осевом потоке в зависимости от геометрии пластин, плотности и вязкости жидкости, а также от собственных частот колебаний пластин представлены в работе [12].

В работе [13] рассмотрена история и развитие методов аэродинамического анализа, а также современных численных и экспериментальных методов анализа устойчивости к флаттерам. Также рассматриваются методы вычислительной гидродинамики для моделирования обтекания тел. Представлены различные методы комбинирования моделей с использованием аналитических, численных и экспериментальных подходов для прогнозирования предела флаттера. Описаны технические решения для предотвращения неустойчивости флаттера.

В работе [14] рассматривается удлиненная прямоугольная пластина с двумя степенями свободы, склонная к аэроупругой неустойчивости классического флаттера. Эффект демпфирования исследовался посредством систематического линейного анализа и испытаний в аэродинамической трубе, при этом были разработаны конкретные аэроупругие установки как для движения большой амплитуды, так и для сил высокой вязкости. Как аналитические, так и экспериментальные результаты показали, что дестабилизирующий эффект связан со стремлением любой конфигурации приблизиться к поведению системы с единичным несвязанным частотным соотношением неподвижного воздуха при увеличении демпфирования вертикальной волны.

Устойчивость прямоугольной пластины в сверхзвуковом потоке при наличии неоднородного по толщине температурного поля исследуется в работе [15]. Неоднородность температурного поля по толщине приводит к короблению пластины, и это коробление рассматривается как



начальное невозмущенное состояние. Получены основные уравнения и граничные условия для невозмущенного и возмущенного состояний.

В статье [16] исследуется поведение нелинейных колебаний изотропной прямоугольной пластины, трепещущей в сверхзвуковом потоке газа. Исследование проводилось с учетом обоих видов нелинейности: ветровой (квадратичной и кубической) и геометрической (кубической). Установлено, что из-за аэродинамической нелинейности (особенно ее несимметричной квадратичной части) зависимость $A(v)$ (где A — амплитуда нелинейных колебаний, v — параметр, характеризующий величину натекающего потока) на определенных интервалах является двузначной функцией скорости v .

В работе [17] исследуется флаттер композитной пластины с вязкоупругим средним слоем в сверхзвуковом воздушном потоке. Модель истерического демпфирования используется для описания вязкоупругих свойств материала промежуточного слоя, а первая поршневая теория — для моделирования аэродинамических сил. Принцип Гамильтона используется для вывода уравнений в частных производных, описывающих колебания многослойной композитной пластины. Методом Галеркина основные дифференциальные уравнения в частных производных усекаются до набора обыкновенных дифференциальных уравнений. Критическое динамическое давление для флаттера панели было изучено путем рассмотрения проблемы собственных значений набора ОДУ.

Сверхзвуковой флаттерный анализ консольных трапециевидных пластин, состоящих из двух функционально градиентных лицевых листов и изотропного однородного сердечника представлен в статье [18]. С помощью принципа Гамильтона выводится система определяющих уравнений и внешних граничных условий.

В статье [21] исследуется взаимосвязь параметров натурального и модельного процессов, возникающих в рамках известных математических моделей панельного флаттера упругих и вязкоупругих пластин.

Нестационарный панельный флаттер вязкоупругой полосы в условиях, когда давление аэродинамического взаимодействия определяется соотношениями, отличными от формул поршневой теории исследуется в статье [22]. Предполагается, что вектор скорости потока направлен параллельно плоскости пластины, под углом к ее кромкам. Получены приближенные оценки значений критической скорости флаттера.

Здесь приведен обзор лишь некоторых работ, которые посвящены решению различных задач, связанных с исследованием явления флаттера в различных системах.

Каждые из этих подходов при решении конкретных задач, имеют свои преимущества и недостатки, тем не менее, все они используются при решении практических задач.

Целью исследований является определение критической скорости потока газа, при котором удлиненная пластина теряет устойчивость.

Задачами данного исследования является:

- 1) разработка математических моделей задачи о флаттере вязкоупругой удлиненной пластинки с учетом геометрических и аэродинамических нелинейностей;
- 2) разработка эффективных методов решения нелинейных задач;
- 3) разработка вычислительного алгоритма и на его основе программы на компьютере для решения нелинейных задач автоколебаний;
- 4) оценка явления автоколебаний в виде флаттера вязкоупругой удлиненной пластины с учетом геометрических и аэродинамических нелинейностей.

2 Materials and Methods

В случае взаимодействия тонкостенного деформируемого элемента с потоком газа, при достижении определенной скорости потока, колебания конструкции становятся неустойчивыми, другими словами возникает автоколебательный процесс – незатухающие колебания в элементах конструкций, поддерживающиеся за счет энергии неперiodического внешнего воздействия и определяются внутренними свойствами самой автоколебательной системы. При этом необходимо будет определить скорость потока, которая приводит к возникновению колебаний конструкции с нарастающей амплитудой. Это явление представляет собой потерю устойчивости, которая называется флаттером и служит одним из видов автоколебаний. Для оценки этого явления, т.е. для определения амплитуд нелинейных автоколебаний необходимо найти решение соответствующих нелинейных задач.

Mansurov, M.; Abdikarimov, R.; Mirsaidov, M.

Self-oscillatory process of a viscoelastic elongated plate;

2022; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **100** Article No 10003. doi: 10.4123/CUBS.100.3

Рассматривается автоколебательный процесс (флаттер), возникающий в элементах тонкостенных конструкций с учетом геометрически и аэродинамической нелинейностей. Форму пластинки в плане будем трактовать как удлиненную пластину (рис.1). Учитывая то, что ширина пластинки намного меньше по сравнению с размерами конструкции, можно считать, что усилия равномерно распределены по ширине пластинки, поэтому автоколебательный процесс моделируется как вязкоупругая удлиненная пластина с прямой осью, ширина которой равна единице, и длина равна a . Тогда получается задача с одной пространственной координатой x .

Декартова система координат расположена так, что обе оси лежат в плоскости пластины, ось Oy направлена вдоль сторон равной единице, а ось Ox направлена вдоль длинной стороне a . Считается, что удлиненная пластина находится в плоском, стационарном сверхзвуковом потоке газа, обтекающем пластину с одной стороны в направлении оси Oy . Предполагается, что профиль вязкоупругой удлиненной пластины имеет две оси симметрии, тогда центр изгиба и центр тяжести совпадают.

При моделировании автоколебаний удлиненной пластинки с учетом геометрических и аэродинамических нелинейностей граничные условия принимаем, как у свободно-опертой по краям пластины. Материал пластинки предполагается вязкоупругий. Для описания вязкоупругих свойств материала используются наследственная модель вязкоупругости Больцмана-Вольтерра. Предполагается, что при взаимодействии пластинки со сверхзвуковым потоком газа, движущейся со скоростью V , возникают большие прогибы (рис.1).

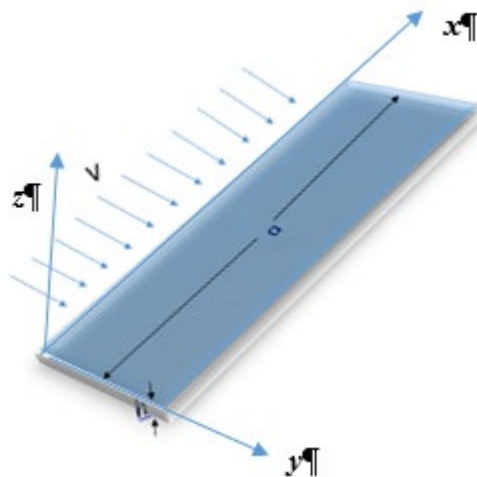


Fig.1. Calculation scheme of self-oscillations of a viscoelastic elongated plate
Рис.1. Расчетная схема автоколебаний вязкоупругой удлиненной пластинки

Дифференциальное уравнение большого прогиба упругих удлиненных пластин имеет вид [2,7]:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (1)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, $m = \rho \cdot a$.

здесь q – действующая внешняя нагрузка, E – модуль упругости, D – жёсткость пластинки, μ –коэффициент Пуассона; h – толщина пластинки, m – масса пластинки.

Согласно принципу Вольтерра, в уравнении (1) E и D заменяются соответствующими интегральными операторами, т.е.:

$$\bar{D} = D(1-R^*), \quad \bar{E} = E(1-R^*), \quad R^* w(y,t) = \int_0^t R(t,\tau) w(y,\tau) d\tau \quad (2)$$

где $R(t,\tau)$ – ядра релаксации.

Вводится безразмерные координаты:

Mansurov, M.; Abdikarimov, R.; Mirsaidov, M.

Self-oscillatory process of a viscoelastic elongated plate;

2022; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **100** Article No 10003. doi: 10.4123/CUBS.100.3



$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{12(1-\mu^2)\rho a^4 \alpha_1}{Eh^3}}, \quad \bar{q}(x, t) = \frac{q(x, t)}{q_0}$$

с учетом внешнего потока $q(x, t)$ получается уравнение, описывающее чистый изгиб вязкоупругой удлиненной пластинки. Опуская штрихи над переменными основное разрешающее уравнение в безразмерных координатах записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha_1 \left\{ (1-R^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 6(1-R^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\} = z_0 \alpha_1 q(x, t) \quad (3)$$

$$\text{где } z_0 = \frac{12(1-\mu^2)a^4 q_0}{Eh^4}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{(N\pi)^4}$$

Таким образом, необходимо определить при автоколебаниях под действием внешнего потока q функцию прогиба w , удовлетворяющую уравнению (3) и следующим граничным условиям:

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=1 \quad (4)$$

и начальным условиям:

$$w|_{t=0} = d_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = d_1(x).$$

Когда удлиненная пластинка движется в потоке газа, при достижении некоторых значений скорости потока газа появляется возможность возникновения автоколебаний удлиненной пластинки в виде флаттера, которые проявляются в быстром нарастании амплитуд колебаний.

Согласно поршневой теории Ильюшина [3] для исследования данного явления в качестве $q(x, t)$ принимается аэродинамическая нагрузка, т.е.:

$$q(x, t) = \Delta p - B \frac{\partial w}{\partial t} + BV \frac{\partial w}{\partial x} - B_1 V^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (5)$$

$$\text{где } B = \frac{\chi p_\infty}{V_\infty}, \quad B_1 = \frac{\chi(\chi+1)p_\infty}{4V_\infty^2}, \quad \Delta p = \text{const} \quad - \text{ статический перепад давлений, } \chi -$$

отношение теплоемкости газа при неизменном давлении к теплоемкости при постоянном объеме (коэффициент политропа), p_∞ , V_∞ – давление и скорость звука в невозмущенном потоке газа.

Тогда (5) при $q_0 = p_\infty$ принимает вид:

$$q(x, t) = \frac{\Delta p}{p_\infty} - M \frac{\partial w}{\partial t} + M_1 M^* \frac{\partial w}{\partial x} - M_2 M^{*2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (6)$$

$$M = \frac{\chi h}{V_\infty t_1}, \quad M_1 = \chi \left(\frac{h}{a} \right), \quad M^* = \frac{V}{V_\infty}, \quad M_2 = \frac{\chi+1}{4\chi} M_1^2, \quad z_0 = \frac{12(1-\mu^2)a^4 p_\infty}{Eh^4}$$

где w – перемещение системы по нормали к первоначальной ее поверхности.

Для решение интегро-дифференциальную уравнению (3) сначала применяется метод Бубнова-Галеркина, производится дискретизация по пространственным переменным и получается интегро-дифференциальные уравнения относительно функции времени. С этой целью решение уравнения (3) находится в виде:



$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) \varphi_i(x) \quad (7)$$

где $\varphi_i(x)$ – известные координатные функции, удовлетворяющие всем граничным условиям задачи. В случае свободно-опертых краев (4) удлиненной пластинки вид функции $\varphi_i(x)$ принимается в следующем формате: $\varphi_i(x) = \sin i\pi x$.

Подставив (7) в (3) и вычисляя интеграл входящий в (3):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx &= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^N u_i(t) \cos i\pi x \right]^2 dx = \pi^2 \sum_{i=1}^N i j u_i(t) u_j(t) \int_0^1 \cos i\pi x \cos j\pi x dx = \\ &= \pi^2 \sum_{i=1}^N i j u_i(t) u_j(t) \int_0^1 \frac{1}{2} [\cos(i-j)\pi x + \cos(i+j)\pi x] dx = \\ &= \pi^2 \sum_{i=1}^N i j u_i(t) u_j(t) \left[\int_0^1 \frac{1}{2} \cos(i-j)\pi x dx + \int_0^1 \frac{1}{2} \cos(i+j)\pi x dx \right] = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^N i^2 u_i^2(t) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \cos(i-j)\pi x dx = \begin{cases} 1 & \text{если } i = j \\ 0 & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

$$\int_0^1 \cos(i+j)\pi x dx = 0$$

уравнение (3) сводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha_1 \left\{ (1 - R^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 6(1 - R^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sum_{i=1}^N i^2 u_i^2(t) \right\} = \\ = z_0 \alpha_1 \left\{ \frac{\Delta p}{p_\infty} - M \frac{\partial w}{\partial t} + M_1 M^* \frac{\partial w}{\partial x} - M_2 M^{*2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее находятся производные по x и t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} &= \sum_{i=1}^N \dot{u}_i(t) \sin i\pi x; & \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} &= \sum_{i=1}^N \ddot{u}_i(t) \sin i\pi x; \\ \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} &= -\pi^2 \sum_{i=1}^N i^2 u_i(t) \sin i\pi x; & \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} &= \pi^4 \sum_{i=1}^N i^4 u_i(t) \sin i\pi x. \end{aligned} \quad (9)$$

После подстановки (6), (7) и (9) в уравнение (8) и выполнения процедуры Бубнова-Галеркина получается:



$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \ddot{u}_i(t) \int_0^1 \sin i\pi x \cdot \sin j\pi x dx + \alpha_1 \left\{ \pi^4 (1-R^*) \sum_{i=1}^N i^4 u_i(t) \int_0^1 \sin i\pi x \cdot \sin j\pi x dx + \right. \\
 & \left. + 3\pi^4 (1-R^*) \sum_{i=1}^N i^2 u_i(t) \int_0^1 \sin i\pi x \cdot \sin j\pi x dx \cdot \sum_{i=1}^N i^2 u_i^2(t) \right\} = z_0 \alpha_1 \left\{ \frac{\Delta p}{p_\infty} \int_0^1 \sin j\pi x dx - \right. \\
 & \left. - M \sum_{i=1}^N \dot{u}_i(t) \int_0^1 \sin i\pi x \cdot \sin j\pi x dx + M_1 M^* \pi \sum_{i=1}^N i u_i(t) \int_0^1 \cos i\pi x \cdot \sin j\pi x dx - \right. \\
 & \left. - M_2 M^{*2} \pi^2 \sum_{i=1}^N i s u_i(t) u_s(t) \int_0^1 \cos i\pi x \cdot \cos s\pi x \cdot \sin j\pi x dx \right\} \quad (10)
 \end{aligned}$$

Далее аналитически вычисляются интегральные члены в уравнении (10):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \sin i\pi x \cdot \sin j\pi x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [\cos(i-j)\pi x - \cos(i+j)\pi x] dx = \\
 & = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \cos(i-j)\pi x dx - \int_0^1 \cos(i+j)\pi x dx \right] = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{если } i = j \\ 0 & \text{если } i \neq j \end{cases} \\
 & \int_0^1 \sin j\pi x dx = -\frac{1}{j\pi} \cos j\pi x \Big|_0^1 = \frac{1}{j\pi} [1 - (-1)^j] = \frac{2\alpha_j}{j\pi} \\
 & \int_0^1 \cos i\pi x \cdot \sin j\pi x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [\sin(i+j)\pi x + \sin(i-j)\pi x] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{(i+j)\pi} \cos(i+j)\pi x \Big|_0^1 - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{(i-j)\pi} \cos(i-j)\pi x \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2\alpha_{i+j}}{(i+j)\pi} + \frac{2\alpha_{i-j}}{(i-j)\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha_{i+j}}{i+j} + \frac{\alpha_{i-j}}{i-j} \right) \\
 & \int_0^1 \cos i\pi x \cos s\pi x \sin j\pi x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [\sin(j-i)\pi x + \sin(j+i)\pi x] \cos s\pi x dx = \\
 & = \frac{1}{4} \int_0^1 [\sin(j-i-s)\pi x + \sin(j-i+s)\pi x + \sin(j+i-s)\pi x + \sin(j+i+s)\pi x] dx = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\alpha_{j-i-s}}{j-i-s} + \frac{\alpha_{j-i+s}}{j-i+s} + \frac{\alpha_{j+i-s}}{j+i-s} + \frac{\alpha_{j+i+s}}{j+i+s} \right]
 \end{aligned}$$

где

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{если } i - \text{нечетный} \\ 0 & \text{если } i - \text{четный или } i = 0 \end{cases}$$

Тогда (10) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \ddot{u}_j(t) + \alpha_1 \left\{ \frac{\pi^4 j^4}{2} (1-R^*) u_j(t) + \frac{3\pi^4 j^2}{2} (1-R^*) u_j(t) \sum_{i=1}^N i^2 u_i^2(t) \right\} = \\
 & = z_0 \alpha_1 \left\{ \frac{2\alpha_j}{j\pi} \cdot \frac{\Delta p}{p_\infty} - \frac{1}{2} M \dot{u}_j(t) + M_1 M^* \sum_{i=1}^N i \left(\frac{\alpha_{i+j}}{i+j} + \frac{\alpha_{i-j}}{i-j} \right) u_i(t) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} M_2 M^{*2} \pi \sum_{i,s=1}^N i s \left(\frac{\alpha_{j-i-s}}{j-i-s} + \frac{\alpha_{j-i+s}}{j-i+s} + \frac{\alpha_{j+i-s}}{j+i-s} + \frac{\alpha_{j+i+s}}{j+i+s} \right) u_i(t) u_s(t) \right\}
 \end{aligned}$$



или после некоторых преобразований получается следующее уравнение движения вязкоупругой удлиненной пластинки в потоке газа:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_j(t) + \alpha_1 \left\{ \pi^4 j^4 (1 - R^*) u_j(t) + 3\pi^4 j^2 (1 - R^*) u_j(t) \sum_{i=1}^N i^2 u_i^2(t) \right\} = \\ = z_0 \alpha_1 \left\{ \frac{4\alpha_j}{j\pi} \cdot \frac{\Delta p}{p_\infty} - M \dot{u}_j(t) + 2M_1 M^* \sum_{i=1}^N i \left(\frac{\alpha_{i+j}}{i+j} + \frac{\alpha_{i-j}}{i-j} \right) u_i(t) - \right. \\ \left. - M_2 M^{*2} \pi \sum_{i,s=1}^N i s \left(\frac{\alpha_{j-i-s}}{j-i-s} + \frac{\alpha_{j-i+s}}{j-i+s} + \frac{\alpha_{j+i-s}}{j+i-s} + \frac{\alpha_{j+i+s}}{j+i+s} \right) u_i(t) u_s(t) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Полученное уравнение является основным разрешающим дифференциальным уравнением вязкоупругой удлиненной, свободно-опертой по краям пластинки в потоке газа.

В наследственной теории вязкоупругости, в большинстве случаев, при расчетах для описания вязкоупругих свойств материала в интегральном операторе в качестве ядра релаксации используется следующее простейшее и в то же время, достаточно общее слабо-сингулярное ядро Колтунова-Ржаницына с тремя реологическими параметрами (A, β и α), вида [10], [11]:

$$R(t) = A \cdot e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad A > 0, \quad \beta > 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где A – параметр вязкости, α – параметр сингулярности и β – реологический параметр вязкости.

Интегрирование нелинейной системы (11) по t при ядре Колтунова-Ржаницына выполнялось численным методом, основанном на аналитических преобразованиях, тогда получается следующая рекуррентная система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} u_j(t) = u_{j,0} + t \dot{u}_{j,0} - \alpha_1 \left\{ \pi^4 j^4 (1 - R^*) \int_0^t (t - \tau) u_j(\tau) d\tau + 3\pi^4 j^2 (1 - R^*) \times \right. \\ \times \sum_{i=1}^N i^2 \int_0^t (t - \tau) u_j(\tau) u_i^2(\tau) d\tau \left. \right\} + z_0 \alpha_1 \left\{ \frac{4\alpha_j}{j\pi} \cdot \frac{\Delta p}{p_\infty} \frac{t^2}{2} - M \int_0^t u_j(\tau) d\tau - M t u_{j,0} + \right. \\ + 2M_1 M^* \sum_{i=1}^N i \left(\frac{\alpha_{i+j}}{i+j} + \frac{\alpha_{i-j}}{i-j} \right) \int_0^t (t - \tau) u_i(\tau) d\tau - M_2 M^{*2} \times \\ \times \sum_{i,s=1}^N i s \left(\frac{\alpha_{j-i-s}}{j-i-s} + \frac{\alpha_{j-i+s}}{j-i+s} + \frac{\alpha_{j+i-s}}{j+i-s} + \frac{\alpha_{j+i+s}}{j+i+s} \right) \int_0^t (t - \tau) u_i(\tau) u_s(\tau) d\tau \left. \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

далее

$$\begin{aligned} \left[1 + z_0 \alpha_1 M \frac{\Delta t}{2} \right] u_{j,l} = (1 - z_0 \alpha_1 M t_l) u_{j,0} + t_l \dot{u}_{j,0} - \alpha_1 \left\{ \pi^4 j^4 \sum_{i_1=1}^{l-1} A_{i_1} (t_l - t_{i_1}) \times \right. \\ \times \left(u_{j,i_1} - \frac{A}{\alpha} \sum_{i_2=1}^{i_1} B_{i_2} e^{-\beta t_{i_2}} u_{j,i_1-i_2+1} \right) + 3\pi^4 j^2 \sum_{i=1}^N i^2 \sum_{i_1=1}^{l-1} A_{i_1} (t_l - t_{i_1}) \times \\ \times \left(u_{j,i_1} u_{i,i_1}^2 - \frac{A}{\alpha} \sum_{i_2=1}^{i_1} B_{i_2} e^{-\beta t_{i_2}} u_{j,i_1-i_2+1} u_{i,i_1-i_2+1}^2 \right) \left. \right\} + \\ + z_0 \alpha_1 \left\{ \frac{4\alpha_j}{j\pi} \cdot \frac{\Delta p}{p_\infty} \frac{t^2}{2} - M \sum_{i_1=1}^{l-1} A_{i_1} u_{j,i_1} + 2M_1 M^* \sum_{i=1}^N i \left(\frac{\alpha_{i+j}}{i+j} + \frac{\alpha_{i-j}}{i-j} \right) \sum_{i_1=1}^{l-1} A_{i_1} (t_l - t_{i_1}) u_{l,i_1} - \right. \\ \left. - M_2 M^{*2} \pi \sum_{i,s=1}^N i s \left(\frac{\alpha_{j-i-s}}{j-i-s} + \frac{\alpha_{j-i+s}}{j-i+s} + \frac{\alpha_{j+i-s}}{j+i-s} + \frac{\alpha_{j+i+s}}{j+i+s} \right) \sum_{i_1=1}^{l-1} A_{i_1} (t_l - t_{i_1}) u_{l,i_1} u_{s,i_1} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

где



$$t_i = i\Delta t, B_1 = \frac{\Delta t^\alpha}{2}, B_{i_2} = \frac{\Delta t^\alpha [(i_2 + 1)^\alpha - (i_2 - 1)^\alpha]}{2}, i_2 = \overline{2, i_1 - 1}$$

$$B_{i_1} = \frac{\Delta t^\alpha [i_1^\alpha - (i_1 - 1)^\alpha]}{2}, A_1 = \frac{\Delta t}{2}, A_i = \Delta t, i_1 = \overline{2, i - 1}, i = 1, 2, \dots$$

Вычисление проводилось с учетом и без учета аэродинамической нелинейности при различных реологических параметрах.

3 Results and Discussion

На основе разработанного вычислительного алгоритма составлена программа на алгоритмическом языке Delphi. Численные результаты вычислений с учетом аэродинамической нелинейности потока газа приведены на таблице 1. В дальнейшем, если не оговорены другие данные, то в качестве исходных данных будут приняты следующие: $u_{j,0} = 10^{-4}$, $\dot{u}_{j,0} = 0$, $A=0.05$,

$$\alpha=0.25, \beta=0.05, M=0.2, \Delta p=1.0, \frac{h}{a} = \frac{1}{100}.$$

Во всех рассмотренных случаях исследована численная сходимость метода Бубнова-Галеркина. При этом в (7) найдены те значения N , при которых начинается бурный рост значения критической скорости.

Вводятся следующие обозначения: $M_{кр.аэро.лин}^*$ – критическая скорость при учете аэродинамической линейности; $M_{кр.аэро.нелин}^*$ – критическая скорость при учете аэродинамической нелинейности; N – количество членов в (7);

Table 1. Critical speed at different values of the physical and mechanical properties of the material
Таблица 1. Критическая скорость при различных значениях физико-механических свойств материала

N	A	A	β	M	Δp	h/a	$M_{кр.аэро. линей.}^*$	$M_{кр.аэро. нелин.}^*$
2							111.7	102.29
3							190.5	113.51
4	0.0	0.25	0.05	0.2	1.0	1/100	227.6	171.41
5							279.1	204.41
	0.01						108.9	100.22
	0.03						98.2	95.95
2	0.05	0.25	0.05	0.2	1.0	1/100	84.3	90.40
	0.07						73.3	83.65
	0.1						60.9	72.39
		0.15					76.3	83.77
2	0.05	0.35	0.05	0.2	1.0	1/100	87.8	94.02
		0.5					91.9	96.69
			0.01				84.3	90.58
2	0.05	0.25	0.03	0.2	1.0	1/100	84.3	90.46
			0.07				84.3	90.37
			0.1				84.3	90.37
				0.5			97.2	99.36
2	0.05	0.25	0.05	1.0	1.0	1/100	104.9	108.39
				5.0			192.8	233.26
					0.5		84.3	92.32
2	0.05	0.25	0.05	0.2	2.0	1/100	84.3	87.33
					5.0		84.3	82.66
					10.0		84.3	81.21
						1/50	417.9	572.93
2	0.05	0.25	0.05	0.2	1.0	1/80	130.7	155.88



Анализ полученных результатов показывает, что значение критической скорости в упругой постановке ($M_{кр.аэро.линей.}^* = 111.7$) отличается от значений критической скорости при учете аэродинамической нелинейности на 8.4% ($M_{кр.аэро.нелин.}^* = 102.29$).

Результаты исследования в вязкоупругой постановке показывают, что различие между значениями критических скоростей при значении параметра вязкости $A=0.01$ в линейной постановке ($M_{кр.аэро.линей.}^* = 108.9$) и аэродинамической нелинейной постановке составляют 7.9% ($M_{кр.аэро.нелин.}^* = 100.22$).

Далее исследованы изменения значений $M_{кр.аэро.линей.}^*$ и $M_{кр.аэро.нелин.}^*$ в зависимости от изменения основного параметра вязкости в пределах $0.01 < A < 0.1$. Как показывают исследования, увеличение реологического параметра A приводит к уменьшению значения критических скоростей. Следует отметить, что, начиная со значения 0,05 для реологического параметра вязкости A , значение критической скорости в аэродинамическом нелинейном состоянии наблюдалось выше, чем в линейном состоянии.

Установлено, что влияние второго реологического параметра материала α на критическую скорость удлиненной пластинки оказалось существенным, т.е. незначительное увеличение параметра сингулярности α приводит к существенному повышению критической скорости. Дальнейшие расчеты показали, что изменение реологического параметра β ($0 < \beta < 1$) не оказывает существенного влияния на критическую скорость. Влияние параметра $\Delta\rho$ почти не наблюдалось в линейных задачах, но влияние данного параметра в аэродинамически нелинейных зависимостях значительно заметно, и по мере увеличения значения величина критической скорости увеличивалась. Влияние параметров M и h/a на критическую скорость оказывается существенным. Проведенные исследования показали существенное влияние параметров вязкоупругости материала удлиненной пластинки на изменения критической скорости, что объясняется изменениями уровня интенсивности диссипативных процессов в этих конструкциях.

4 Conclusions

1. Разработана математическая модель для оценки флаттера вязкоупругой удлиненной пластинки с учетом геометрической и аэродинамической нелинейностей.
2. Разработан метод, алгоритм и программа для расчета на ЭВМ флаттера удлиненной вязкоупругой пластинки, находящейся в потоке газа с учетом геометрической и аэродинамической нелинейностей.
3. Численно исследовано явление флаттера удлиненной вязкоупругой пластинки с учетом геометрической и аэродинамической нелинейностей в потоке газа.
4. Установлено, что:
 - учет геометрической нелинейности увеличивает значение критической скорости флаттера;
 - учет вязкоупругих свойств материала приводит к уменьшению значений критической скорости, при этом реологические параметры вязкости A и сингулярности α оказывают существенное влияние на критическую скорость, а влияние третьего реологического параметра β не существенно.

References

1. Bolotin V.V. Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability. Moscow, 2013. Pp. 341.
2. Volmir A.S. Nonlinear dynamics of plates and shells. Moscow, 1972.
3. Ilyushin A.A. The law of plane sections in aerodynamics at high supersonic speeds. PMM. 1956. 20(6). Pp. 733–755.
4. Babakov I.M. Theory of vibrations. Moscow, 2004.
5. Pegado Hélio De Assis. Flutter de painéis: mais um desafio no vôo supersônico. Exacta. 2008. 4(2). Pp. 235–246. DOI:10.5585/exacta.v4i2.752.
6. Robinson Armand, Adali Sarp. Dynamic stability of viscoelastic plates under axial flow by differential quadrature method. Engineering Computations (Swansea, Wales). 2017. 34(4). Pp. 1240–1256. DOI:10.1108/EC-03-2016-0113.
7. Badalov F.B. Power series method in the nonlinear theory of viscoelasticity. Tashkent, Nauka,



1980. 95–125 p.

8. Algazin S.D., Kiyko I.A. Flutter of plates and shells. Nauka . Moscow, Hayka, 2006. 247 p. ISBN:5020339830.
9. Khudayarov B., Turaev F., Ruzmetov K., Tukhtaboev A. Numerical modeling of the flutter problem of viscoelastic elongated plate. AIP Conference Proceedings. 2021. 2402(November). Pp. 050005-1–5. DOI:10.1063/5.0071353.
10. Abdikarimov R.A., Mansurov M.M., Akbarov U.Y. Numerical study of a flutter of a viscoelastic rigidly clamped rod with regard for the physical and aerodynamic nonlinearities. Bulletin of the Russian State University for the Humanities. Series “Informatics. Information Security. Maths”. Science Magazine. 2019. 3. Pp. 94–106. DOI:10.28995/2686-679X-2019-3-94-106.
11. Abdikarimov R.A., Mansurov M.M., Pulatov Sh.Y. Influence of the rod shape on the critical flutter speed articulated at the ends. International Journal of Applied Research. 2020. 6(8). Pp. 30–34.
12. Sopan Rahtika I.P.G., Wardana I.N.G., Sonief A.A., Siswanto E. Experimental Investigation on Flutter Similitude of Thin-Flat Plates. Advances in Acoustics and Vibration. 2017. 2017. Pp. 8. DOI:10.1155/2017/7091425.
13. Tajammal Abbas, Kavrakov Igor, Morgenthal Guido. Methods for flutter stability analysis of long-span bridges: A review. Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Bridge Engineering. 2017. 170(4). Pp. 271–310. DOI:10.1680/jbren.15.00039.
14. Pigolotti Luca, Mannini Claudio, Bartoli Gianni. Destabilizing effect of damping on the post-critical flutter oscillations of flat plates. Meccanica. 2017. 52(13). Pp. 3149–3164. DOI:10.1007/s11012-016-0604-y.
15. Baghdasaryan, G.Y., Mikilyan, M.A., Marzocca, P. Stability of Flexible Orthotropic Rectangular Plates in Supersonic Flow: Amplitude-Speed Dependency in Precritical and Postcritical Flight Conditions. Journal of Aerospace Engineering. 2014. 27(2). Pp. 369–377. DOI:10.1061/(asce)as.1943-5525.0000246.
16. Baghdasaryan, G., Mikilyan, M., Saghoyan, R. Behavior of Nonlinear Flutter-Type Oscillations of Flexible Plates in Supersonic Gas Flow. Journal of Aerospace Engineering. 2017. 30(5). Pp. 04017037. DOI:10.1061/(asce)as.1943-5525.0000739.
17. Xiao-Dong Yang, Tian-Jun Yu, Wei Zhang, Ying-Jing Qian, Ming-Hui Yao. Damping effect on supersonic panel flutter of composite plate with viscoelastic mid-layer. Composite Structures. 2016. 137. Pp. 105–113. DOI:10.1016/j.compstruct.2015.11.020.
18. Afshari H., Torabi K. A Parametric Study on Flutter Analysis of Cantilevered Trapezoidal FG Sandwich Plates. AUT Journal of Mechanical Engineering. 2017. 1(2). Pp. 191–210. DOI:10.22060/mej.2017.12329.5314.
19. Yaman Kemal. Subsonic flutter of cantilever rectangular PC plate structure. International Journal of Aerospace Engineering. 2016. 2016. Pp. 11. DOI:10.1155/2016/9212364.
20. Shitov, S., Vedeneev, V. Flutter of rectangular simply supported plates at low supersonic speeds. Journal of Fluids and Structures. 2017. 69(November 2016). Pp. 154–173. DOI:10.1016/j.jfluidstructs.2016.11.014.
21. Pokazeyev V.V., Kiyko S.I., Kudryavtsev B.Yu. On modeling the process of oscillations of a plate in a supersonic gas flow. Bulletin of the MSTU, MAMI. 2013. 1(15). Pp. 101–104.
22. Kiyko I.A., Lunev A.V. Viscoelastic strip flutter. Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics. 2010. (6). Pp. 58–61.
23. Xiaomin An, Yan Wang. Nonlinear flutter analysis of composite panels. Modern Physics Letters B. 2018. 32(12–13). Pp. 1–6. DOI:10.1142/S0217984918400432.
24. Ilgamov M.A. Generalization of the equation of bending of a thin plate under the action of gas pressure. Applied Mathematics & Mechanics. 2019. 83(1). Pp. 134–143. DOI:10.1134/s0032823519010041.
25. Velmisov P.A., Ankilov A.V. Dynamic stability of deformable elements of designs at supersonic mode of flow. Samara Gos. Tekhn. University, “Fiz-Mat Nauki.” 2018. 22(1). Pp. 96–115. DOI:10.14498/vsgtu1588.
26. Usmonov B.Sh. Dynamic Instability of Viscoelastic Plate in Supersonic Flow. International Journal of Advanced engineering, Management and Science. 2017. 3(2). Pp. 35–39. DOI:10.24001/ijaems.3.2.6.
27. Kravchuk A.S., Kravchuk A.I., Tomilin S.A., Godunov S.F. Technical theory of bending of elastic rectangular plate pivotally supported on the perimeter or pinched along two adjacent sides. Global Nuclear Security. 2020. 2(35). Pp. 73–82.

Mansurov, M.; Abdikarimov, R.; Mirsaidov, M.

Self-oscillatory process of a viscoelastic elongated plate;

2022; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **100** Article No 10003. doi: 10.4123/CUBS.100.3



28. Yongxin Yang, Rui Zhou, Yaojun Ge, Lihai Zhang. Flutter Characteristics of Thin Plate Sections for Aerodynamic Bridges. *Journal of Bridge Engineering*. 2018. 23(1). Pp. 1–13. DOI:10.1061/(asce)be.1943-5592.0001165.
29. Tubaldi E., Amabili M., Alijani F. Nonlinear vibrations of plates in axial pulsating flow. *Journal of Fluids and Structures*. 2015. 56. Pp. 33–55. DOI:10.1016/j.jfluidstructs.2015.03.021.
30. Zhi Guang Song, Feng Ming Li. Investigations on the flutter properties of supersonic panels with different boundary conditions. *International Journal of Dynamics and Control*. 2014. 2(3). Pp. 346–353. DOI:10.1007/s40435-013-0038-5.
31. Loginov B., Makeev O. On conditions of flutter onset for elongated plate in supersonic gas flow. *PAMM*. 2007. 7(1). Pp. 1040813–1040814. DOI:10.1002/pamm.200701023.
32. Starossek Uwe, Starossek Rudolf T. Parametric flutter analysis of bridges stabilized with eccentric wings. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2021. 211(March). Pp. 104566. DOI:10.1016/j.jweia.2021.104566.
33. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. On divergence of the panel, stretched on the direction of supersonic gas flow, an accumulating on its free edge. *Mechanics - Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*. 2019. 72(2). Pp. 24–41. DOI:10.33018/72.2.2.
34. Mansurov M.M., Akbarov U.Y. Flatter of viscoelastic free operous rod at the end. *Scientific Bullietin of Namangan State University*. 2021. 3(3). Pp. 31–36.