Research Article
ISSN 2304-6295
Received: April 23, 2022 Accepted: April 29, 2022 Published: May 04, 2022

Bending Torsion of П-Shaped Thin-Walled Frames

Rybakov, Vladimir Alexandrovich[1*]
Jos, Vladislav Andreevich[2]

[1] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation; fishermanoff@mail.ru
[2] Technische Universität Dresden, Dresden, Germany; jos_vlad@mail.ru
Correspondence:* email fishermanoff@mail.ru; contact phone +79118297767

Keywords:

Lightweight gauge steel structures; Bending torsion; Plane frames; Thin-wall rods; Rigid joint; Bimoment; Warping; Stresses

Abstract:

The goal of the work is to test the calculation method based on the application of the “rotational coefficient” in the rotation matrix of finite elements with the “seventh” (warping) degree of freedom and used in the design of thin-walled rod systems in the framework of the semi-shear theory of V.I. Slivker. for the analysis of the stress-strain state of lightweight gauge steel structures (LGSS). The **object** of research is thin-walled plane rod systems (frames). The **subject** of research is the stress-strain state of thin-walled plane rod systems under the transverse bending load with an eccentricity on the example of a П-shaped frame. **Method.** The main research method in the paper is the finite element method. The software program ABAQUS is used to design and calculate 3-D solid finite element models of various joints and structures made of thin-walled profiles. **Results.** The proposed method is correct for span sections remote from two finite warping-stiffness joints. The stress error for the most dangerous point of the most dangerous section was 4.3%. The stress values in the dangerous section, obtained by the proposed method, differ upwards from the "true" values, which gives a small margin of safety. At a distance from the dangerous section (in the middle of the crossbar) in both directions by a third of the span, the error gradually decreases to 2.9%; in the zone of joints the error was 9.2%, moreover the stresses were lower than "true" ones. The distribution of the bimoment along the axis of the column and its values calculated using an inversed way and based on the solid finite element model are also much closer to the “true” ones than those, which were calculated without taking into account the “rotational coefficient”.

Introduction / Введение

С конца XX века легкие стальные тонкостенные конструкции (ЛСТК) продолжают играть значительную роль в строительной отрасли. Данная технология имеет широкий спектр применения в строительстве (мансардное строительство, ограждающие конструкции «нулевой толщины», каркасно-обшивные стены, рамные каркасы и фермы промышленных зданий, малоэтажные здания гражданского назначения, каркасное коттеджное строительство и др.). Проектирование и строительство ЛСТК характеризуется недостаточной научно-исследовательской обеспеченностью нормативными документами, вызывает интерес в научном мире и ставит перед инженерами и учеными задачу приложить усилия для установления наиболее рациональных и универсальных методов проектирования таких конструкций. За последние годы (2015-2021) появились десятки публикаций, посвященных различным типам проблем.

В данной статье остановимся на одной из проблематик ЛСТК – строительной механике тонкостенных стержней.

Одним из наиболее применимых и универсальных подходов при проектировании и анализе тонкостенных стержневых систем является «полусдвиговая» теория В.И.Сливкера, впервые опубликованная в [1]. В рамках этой теории был разработан цикл численных методов с построением матриц жесткости различных тонкостенных конечных элементов [2],[3].

Вариационные постановки задач строительной механики и метод конечных элементов являются фундаментальными вопросами расчета конструкций [4],[5].

Конечно-элементный анализ тонкостенных холодногнутых Z-образных прогонов, опирающихся на сэндвич-панели, с использованием конечных элементов в программном комплексе MSC Nastran был описан О.А. Тусниной [6],[7]. Численные примеры в рамках задач геометрически нелинейного динамического анализа, основанного на подвижной постановке конечных элементов, представлены в [8].

В работе [9] предложены методы параметрической оптимизации тонкостенных конструкций с представлением результатов этой оптимизации.

Анализ устойчивости тонкостенных стальных рам с жесткими соединениями на основе обобщенной теории балок (ОБТ) выполнен в [10],[11]. Для проведения анализа в программном пакете ANSYS были замоделированы оболочечные конечно-элементные модели. Одной из целей этих исследований было моделирование передачи депланации в соединениях рамы, соединяющих два или более элементов, с использованием конечного элемента балки на основе ОБТ. На основе той же теории в работе [12] исследовался посткритический анализ тонкостенных Г-образных рам и симметричных портальных рам. Для проверки предположений в работе большинство аналитических результатов сравнивались с численными значениями, полученными в программном комплексе. Конечные элементы на основе ОТБ применялись авторами [13] и были объединены с оболочечными конечными элементами, для разработки общего эффективного подхода к моделированию тонкостенных элементов сложной геометрии и их соединений.

Описание потери устойчивости тонкостенных конструкций показано в [14], где исследуется потеря устойчивости тонкостенной двухстержневой рамы, нагруженной постоянной нагрузкой в узле. Рассмотрены различные ограничения депланации на концах стержней, а соответствующие формы потери устойчивости оценены численно.

Влияние поворотной жесткости соединения балки с колонной на прочность и устойчивость тонкостенной конструкции рассмотрено в [15]. В работе [16] рассмотрены специальные модели и основные приемы их построения для расчета начальной вращательной жесткости сварных соединений полого прямоугольного сечения. Т-образные соединения прямоугольного сечения с полым сечением были исследованы на предмет осевой и начальной вращательной жесткости в плоскости с использованием моделирования конечных элементов для проверки существующих подходов к расчету; также были выведены и подтверждены новые уравнения, описывающие поведение напряжений в хорде [17],[18].

Работа [18] посвящена определению крутильных характеристик. Эти параметры играют существенную роль в процессе расчета элементов на устойчивость под действием изгиба с кручением.

Также важно отметить, что одной из основных проблем при создании универсального алгоритма расчета тонкостенных стержневых систем является определение условий в стыках элементов друг с другом, чему и посвящена данная статья.

Один из подходов, направленный на учет граничных условий на концах тонкостенных стержней, не учитывает их депланацию [19]. Гипотеза в рамках теории А. Р. Туснина состоит в том, что депланация одинаково для каждого стержня, пересекающегося в узле [20], [21] и др.,.

Однако в ряде работ, в первую очередь из числа которых следует отметить статью В. В. Юрченко и А.В. Перельмутера, которая опровергает теорию Туснина и утверждает, что деформация различна для каждого пересекающегося стержня и не имеет столь выраженной зависимости [22],[23] .

Более подробный анализ работ [24]–[33] исследователей-предшественников по теме учета передачи депланации в узле тщательно выполнен в предыдущей статье [34] журнала «Строительство уникальных зданий и сооружений», из которого следует, что проблема стыка элементов пространственных тонкостенных рам при воздействии изгибного кручения является не решенной.

В работах [35] [36] на английском языке авторами настоящей статьи был предложен метод расчета, заключающийся в задании специальных данных матрицы поворота тонкостенных конечных элементов на основании предположения о том, что значения бимомента B_1 и B_2 в двух стержнях (а следовательно – и бимоментные напряжения σ_1 и σ_2 в их узловых сечениях, сходящихся в узле) связываются величиной, названной «rotational coefficient» (коэффициент поворота K_ω), которая и задается в составе матрицы поворота по данной (депланационной) степени свободы. Также авторами приводится сравнение полученных результатов с ранее известной методикой по гипотезе А.Р.Туснина [20],[21] и др., показано расхождение результатов в сторону увеличения бимомента в ригеле, а следовательно – потенциальному нарушению условия прочности при отсутствии ее запаса. Однако несмотря на отсутствие противоречий в повествовании достоверность предлагаемого метода иными способами подтверждена не была.

Поэтому **целью** данной работы является верификация метода расчета, основанного на использовании «коэффициента поворота» в матрице поворота конечных элементов с «седьмой» (депланационной) степенью свободы, при расчете систем тонкостенных стержней по полусдвиговой теории В.И. Сливкера для анализа напряженно-деформированного состояния рам ЛСТК.

Для достижения цели необходимо выполнить следующие задачи:

1. Создание и расчет в программном комплексе ABAQUS пространственной конечно-элементной модели узлового соединения, состоящего из тонкостенных профилей

2. Создание и расчет стержневой модели рамы в программном комплексе SCAD для определения значений продольной силы N и изгибающего момента M_y; вычисление соответствующих нормальных напряжений

3. Определение значений бимомента; построение эпюры секториальных координат и нормальных бимоментных напряжений

4. Сравнение полученных результатов, а именно значений нормальных напряжений, полученных с помощью моделирования тонкостенных профилей и их узлов объемными конечными элементами и их дальнейшего расчета, со значениями нормальных напряжений, полученными для стержней.

Объектом исследования являются тонкостенные плоские стержневые системы (рамы).

Предметом исследования является напряженно-деформированное состояние тонкостенных плоских стержневых систем под действием поперечной изгибающей нагрузки с эксцентриситетом на примере П-образной рамы.

Materials and Methods / Материалы и методы

Рассмотрим тонкостенную стержневую систему произвольной формы.

Расчет такой системы будем производить методом конечных элементов (МКЭ). Конечные элементы примем следующих типов:

1) <u>Стержневая</u> (тестируемая) модель: для учета осевой и изгибной деформации использованы наиболее распространенные в расчетной практике конечные элементы типа 5 (пространственный стержень).

Для учета депланационной степени свободы использованы конечные элементы, разработанные в [2] по полусдвиговой теории В.И.Сливкера [1]. Способ аппроксимации функций кручения θ и депланации β принят квадратичным как наиболее эффективный.

Все указанные степени свободы (изгиб в обеих плоскостях (4x4;4x4), осевая деформация (2x2) и изгибное кручение (4x4)) в линейной постановке являются независимыми друг от друга, но с общей матрицей жесткости (14x14).

2) <u>Пространственная</u> (верификационная) модель: 8-ми узловые конечные элементы первого порядка интерполяции и с редуцированной схемой интегрирования (C3D8R) размером 5x5x1,5 мм, ПК ABAQUS (Рис.1).

Как уже было отмечено во введении, основной проблемой при расчетах с помощью стержневых моделей является стык депланационной степени в узлах; для решения при формировании общей матрицы жесткости системы.

Для решения данной проблемы используем для каждого стержня матрицу поворота $[C]$ двухузлового стержневого конечного элемента (14x14), которая в случае пространственного элемента будет иметь вид:

$$[C]=\begin{pmatrix} [C_1] & & & 0 \\ & K_{\omega 1} & & \\ & & [C_2] & \\ 0 & & & K_{\omega 1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

где $[C_1]$ и $[C_1]$ - матрицы коэффициентов поворота по «стандартным» степеням свободы в первом и втором узле, соответственно; $K_{\omega 1}$ и K_{ω} - коэффициенты поворота «седьмой» (депланационной) степени свободы. Определение данных коэффициентов и представляет собой основную проблему расчета; частные значения коэффициентов авторами статьи ранее были опубликованы в [34].

В задаче о плоской П-образной раме (Рис.1) под воздействием поперечной нагрузки с эксцентриситетом данный коэффициент определяется как:

$$K_{\omega}=\frac{B_2}{B_1}, \tag{2}$$

где: B_1 – бимомент со стороны сечения, где действует приложенная нагрузка; B_2 – бимомент со стороны сечения, где нагрузка отсутствует [35],[36].

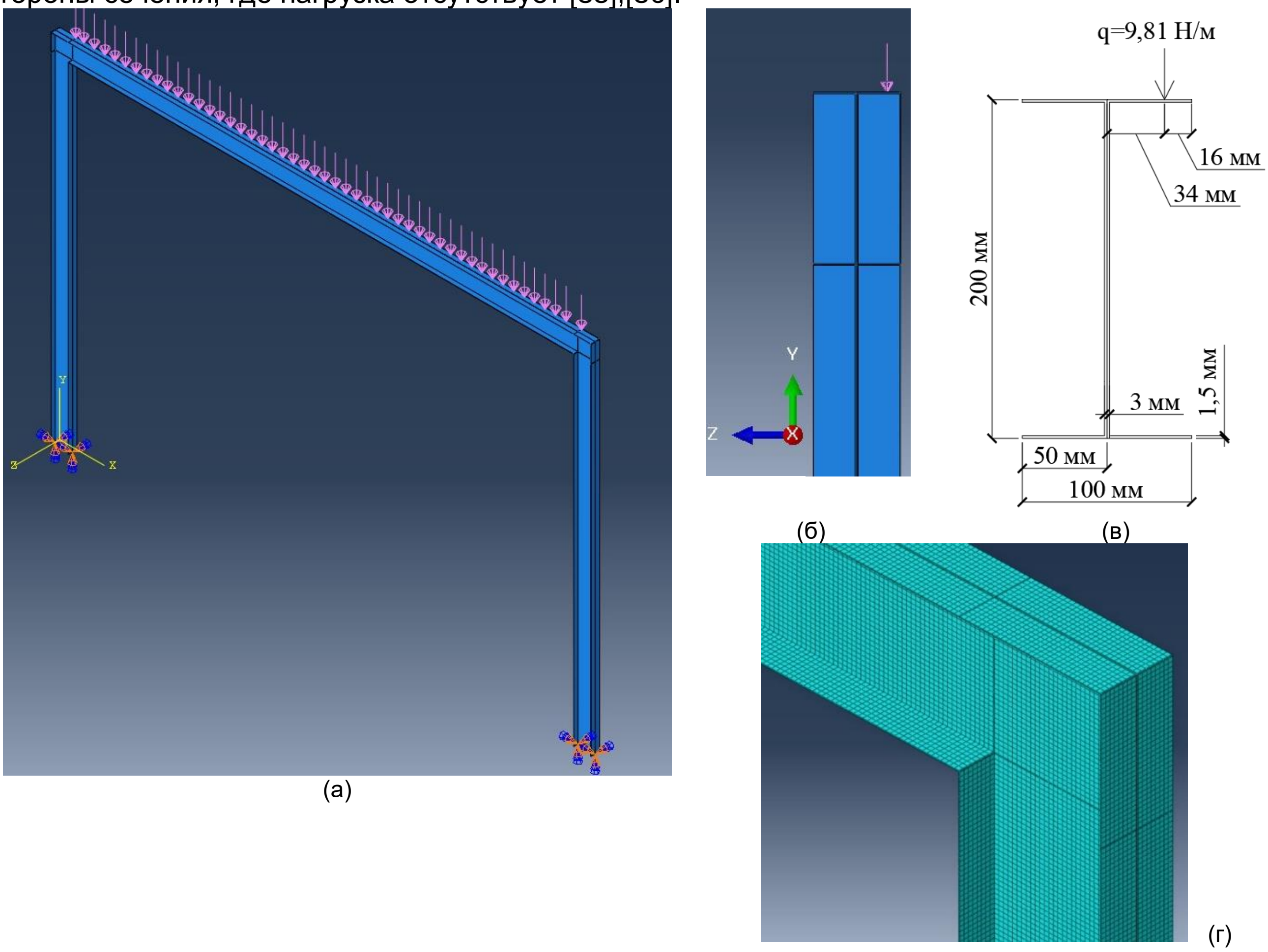

Рис. 1 – Схема приложения нагрузки и закрепления рамы в ПК ABAQUS (а - общий вид; б - схема приложения нагрузки с эксцентриситетом; в - геометрические параметры сечения; г - сетка конечных элементов рамы)
Fig. 1 – Scheme of loading and fixing the frame in SP ABAQUS (a - general view; б - scheme of load application with eccentricity; в - geometrical parameters of the section; г - finite element grid)

Для определения коэффициента поворота в работах принято допущение о равенстве между отношением бимоментов и отношением нормальных напряжений; влиянием касательных напряжений пренебрегается.

Геометрические характеристики расчетной схемы представлены в Таблице 1. Изображение расчетной схемы приведено на Рис.1. В качестве профиля был выбран спаренный профиль ПН 200-50-1,5 (Рис. 1, в). К рамной конструкции приложена единичная аспределенная нагрузка $q = 1\ \text{кгс/м} = 9{,}81\ \text{Н/м}$ с эксцентриситетом $e = 0{,}034\ \text{м}$ относительно оси центра тяжести сечения.

Задача принята физически и геометрически линейная.

Таблица 1 – Геометрические и физические параметры расчетной схемы
Table 1. Geometrical and physical parameters of the design model

Характеристика		Значение	Ед. изм.
Длина ригеля		6	м
Длина колонны		4	м
Вид закрепления опор		жесткое	
Величина распределенной нагрузки	q	9,81	Н/м
Эксцентриситет приложения нагрузки относительно оси центра тяжести сечения	e	0,0034	м
Геометрические характеристики сечения			
Площадь поперечного сечения	A	8,955	см^2
Угол наклона главных осей инерции	a	0	град
Момент инерции относительно центральной оси Y1 параллельной оси Y	I_y	491,056	см^4
Момент инерции относительно центральной оси Z1 параллельной оси Z	I_z	25,045	см^4
Максимальный момент сопротивления относительно оси U	W_{u+}	49,106	см^3
Максимальный момент сопротивления относительно оси V	W_{v+}	5,009	см^3
Секториальный момент инерции	I_w	1378,266	см^6
Полярный момент инерции	I_p	516,101	см^4
Координата центра масс по оси Y	y_m	5	см
Координата центра масс по оси Z	z_m	10	см
Координата центра изгиба по оси Y	Y_b	5	см
Координата центра изгиба по оси Z	Z_b	10	см

В программном комплексе SCAD была создана стержневая модель плоской рамы, соответствующая характеристикам, представленным в Таблице 1, за исключением учета эксцентриситета приложения распределенной нагрузки.

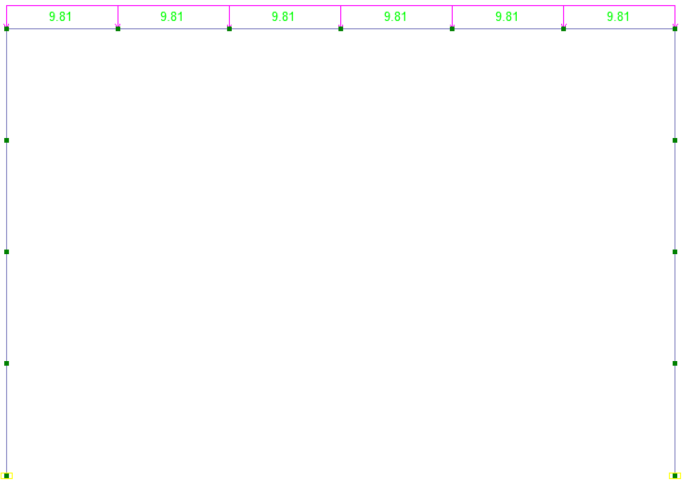

Рис.2 – Расчетная схема рамы (стержневая модель)
Fig. 2 – Design scheme of the frame (rod model)

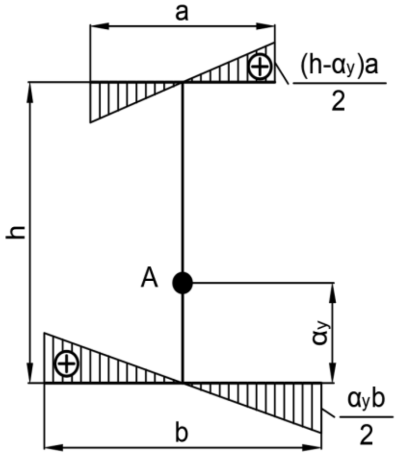

Рис.3 – Эпюра секториальных координат (общий вид)
Fig. 3 – Diagram of sectorial coordinates (general view)

Расчетная схема рамы в программном комплексе SCAD Office представлена на Рис. 2.

Эпюра секториальных координат для двутаврового сечения строится по известным формулам теории В.З.Власова [37], приведенным на Рис. 3, и является пропорциональной эпюре секториальных нормальных напряжений.

Results / Результаты

В результате расчета модели были построены эпюры продольной силы N (Рис. 4) и изгибающего момента M_y (Рис. 5) вдоль оси ригеля и колонн. Полученные значения будут учитываться при вычислении нормальных напряжений для стержневой модели.

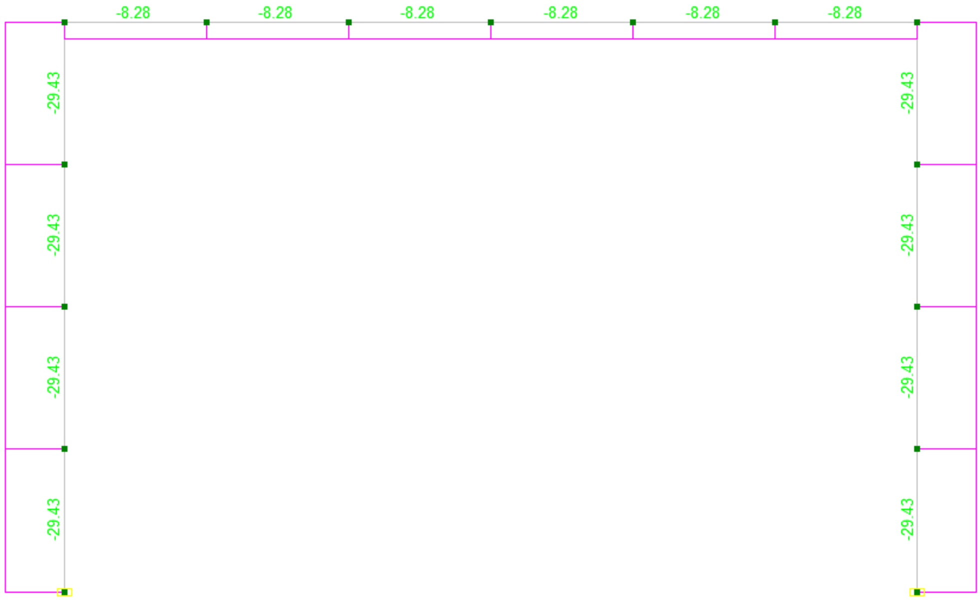

Рис.4 – Эпюра продольных сил N (Н)
Fig. 4 – Axial forces diagram N (N)

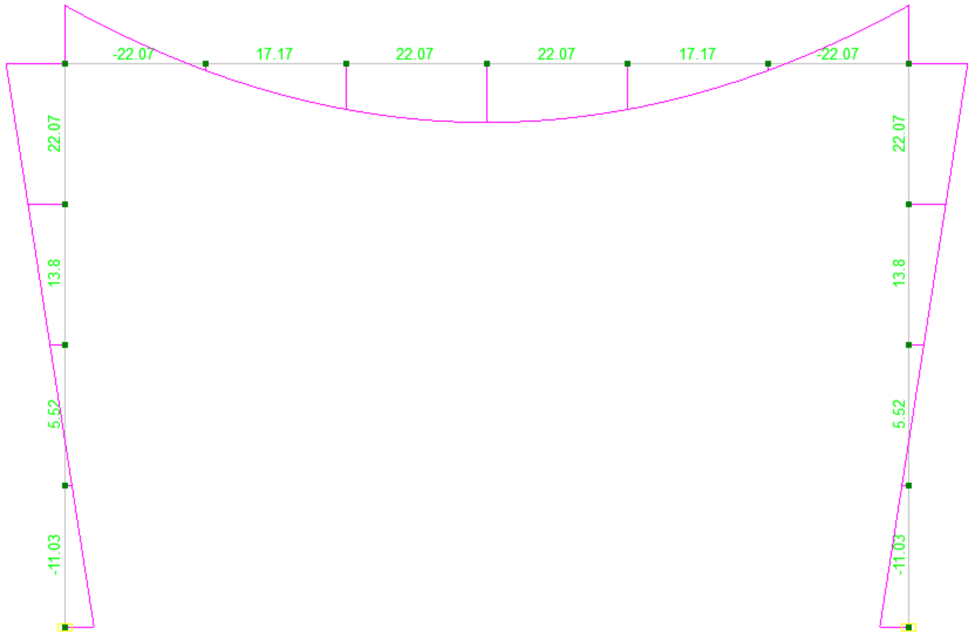

Рис.5 – Эпюра изгибающих моментов M_y (Н·м)
Fig. 5 – Bending moment diagram M_y (N·m)

В данном случае значения секториальных координат вдоль стенки двутавра будут принимать нулевые значения, а вдоль полок двутавра эпюры будут симметричными и знакопеременными относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести сечения (Рис.3).

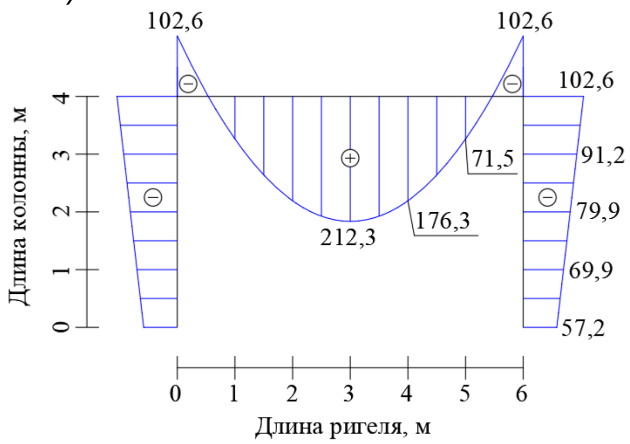

Рис.6 – Распределение значений бимомента (10^{-3} Н·м^2) без учета коэффициента K_ω
Fig. 6 – Distribution of bimoment values (10^{-3} N·m^2) without considering the coefficient K_ω

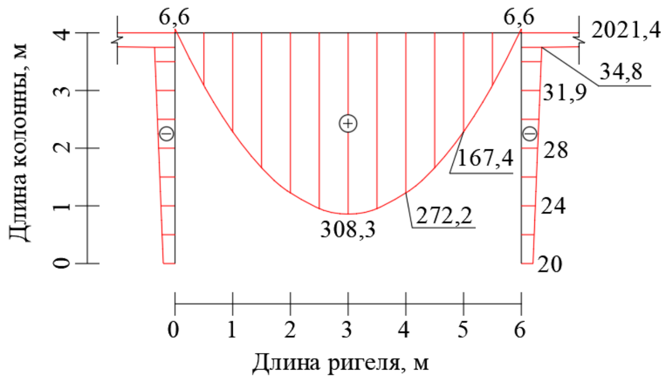

Рис.7 - Распределение значений бимомента (10^{-3} Н·м^2) с учетом коэффициента $K_\omega = -0,184$
Fig. 7 – Distribution of bimoment values (10^{-3} N·m^2) considering the coefficient $K_\omega = -0,184$

Полученные значения бимомента для рассматриваемой расчетной схемы были проанализированы и в настоящей работе представлены в виде соответствующих эпюр для случая без учета коэффициента K_ω (Рис.6), с учетом коэффициента $K_\omega = -0{,}184$ (Рис.7).

Можно выделить следующие основные пункты:

1. В поперечном сечении вдоль оси колонны значение бимомента, вычисленного с учетом коэффициента поворота, оказалось меньше на 65%, чем значение бимомента, вычисленного без его учета. В районе узлового соединения в поперечном сечении колонны наблюдается резкий скачок значений бимомента (при учете коэффициента поворота значение больше в 19,7 раз, чем без его учета).

2. Значение бимомента в опасном сечении ригеля при учете коэффициента поворота больше на 45% по сравнению со значением, полученным без его учета.

3. Форма и размеры кривых распределения бимомента вдоль ригеля идентичны в случаях расчета с учетом и без учета коэффициента поворота, что подтверждает правильность расчетов.

Для верификации предложенного способа учета бимомента в узлах плоских рам, состоящих из тонкостенных стержней, необходимо сравнить нормальные напряжения, полученные при расчете плоской стержневой модели (с учетом и без учета коэффициента поворота) и пространственной конечно-элементной модели в программном комплексе ABAQUS. За «истинные» значения нормальных напряжений будут приняты результаты, полученные в программном комплексе ABAQUS. В стержневой модели нормальные напряжения будут вычисляться по формуле:

$$\sigma_i = \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{B}{I_\omega}\,\omega_i. \qquad (3)$$

Значения нормальных напряжений вычислялись в 4-х точках двутаврового сечения (Рис.8) вдоль осей ригеля и колонны.

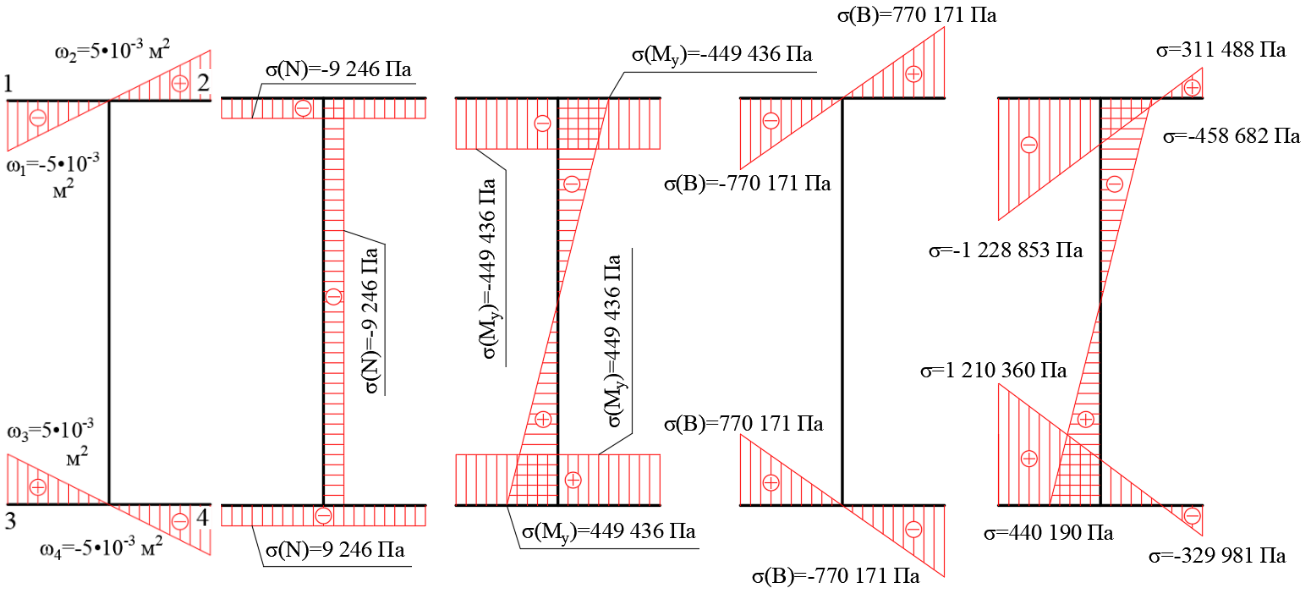

Рис.8 – Эпюры: а) секториальных координат; б) нормальных напряжений для сечения в середине ригеля от действия N; в) то же, от действия M_y; г)то же, от действия B (без учета коэффициента); д) суммарная эпюра напряжений

Fig. 8 – Diagram of: a) sectorial coordinates; b) normal stresses for the section in the middle of the crossbar from the action of N; c) the same, from the action of M_y; d) the same, from the action of B (without considering the coefficient); e) total stress

Согласно формуле 3 нормальные напряжения в стержневой модели представляют сумму нормальных напряжений от действия продольной силы N, изгибающего момента M_y и бимомента B. Пример эпюр от действия каждого из силовых факторов (в случае вычисления бимомента B без учета коэффициента K_ω) в середине ригеля представлен на Рис.8 (б,в,г). Суммарная эпюра нормальных напряжений представлена на Рис.8, *д*.

Также были вычислены нормальные напряжения вдоль осей ригеля и колонны (Таблицы 2-3). Вдоль ригеля нормальные напряжения были вычислены в узловом соединении и в точках на расстоянии 1 м, 2 м и 3 м (середина) от узлового соединения (Рис.9). Вдоль колонны нормальные напряжения так же были вычислены в узловом соединении и в точках на расстоянии 1 м, 2 м, 3 м и 4 м (опора) от узлового соединения.

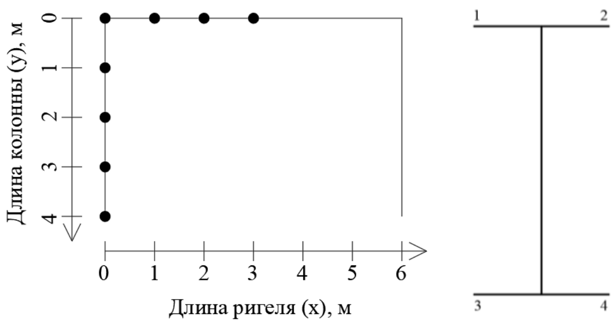

Рис.9 – Расчетные точки вдоль осей ригеля и колонны

Fig. 9 – Calculational points along the axes of the crossbar and column

Discussion / Обсуждение

В Таблицах 2-3 также приводится сравнение итоговых нормальных напряжений для стержневой модели (без учета коэффициента поворота K_ω и с его учетом) и пространственной конечно-элементной модели. Последние два столбца демонстрируют величину погрешности в % для каждого случая. Результаты данных сравнений в графической интерпретации представлены

Таблица 2. Результаты расчета нормальных напряжений в характерных точках вдоль оси ригеля для стержневой и пространственной конечно-элементных моделей

Table 2. Calculational results of normal stresses at feature points along the crossbar axis for rod and solid finite element models

			Стержневая модель						ABAQUS	Погрешность	
		Расчетная точка в поперечном сечении	$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{N})$, Па	$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{M_y})$, Па	$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{B})$ без учета коэф., Па	$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{B})$ с учетом коэф. $K_\omega = -0{,}184$, Па	$\boldsymbol{\sigma}$ без учета коэф., Па	$\boldsymbol{\sigma}$ с учетом коэф. $K_\omega = -0{,}184$, Па	$\boldsymbol{\sigma}$, Па	$\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ без учета коэф., %	$\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ с учетом коэф. $K_\omega = -0{,}184$, %
Нормальное напряжение в **ригеле** на расстоянии **x** от узла	x = 0 м (узел)	1	−9 246	449 436	372 207	23 943	812 396	464 133	421 260	92,8	10,2
		2	−9 246	449 436	−372 207	−23 943	67 983	416 247	411 563	83,5	1,1
		3	−9 246	−449 436	−372 207	−23 943	−830 889	−482 625	−531 553	56,3	9,2
		4	−9 246	−449 436	372 207	23 943	−86 475	−434 739	−493 053	82,5	11,8
	x = 1 м	1	−9 246	−49 892	−259 384	−607 285	−318 522	−666 423	−686 462	53,6	2,9
		2	−9 246	−49 892	259 384	607 285	200 246	548 147	540 709	63,0	1,4
		3	−9 246	49 892	259 384	607 285	300 030	647 931	663 693	54,8	2,4
		4	−9 246	49 892	−259 384	−607 285	−218 738	−566 639	−552 267	60,4	2,6
	x = 2 м	1	−9 246	−349 652	−639 572	−987 473	−998 470	−1 346 371	−1 314 440	24,0	2,4
		2	−9 246	−349 652	639 572	987 473	280 674	628 575	569 921	50,8	10,3
		3	−9 246	349 652	639 572	987 473	979 977	1 327 878	1 291 500	24,1	2,8
		4	−9 246	349 652	−639 572	−987 473	−299 166	−647 067	−581 274	48,5	11,3
	x = 3 м (середина)	1	−9 246	−449 436	−770 171	−1 118 434	−1 228 853	−1 577 116	−1 511 630	18,7	4,3
		2	−9 246	−449 436	770 171	1 118 434	311 488	659 752	567 513	45,1	16,3
		3	−9 246	449 436	770 171	1 118 434	1 210 360	1 558 624	1 488 670	18,7	4,7
		4	−9 246	449 436	−770 171	−1 118 434	−329 981	−678 245	−578 842	43,0	17,2

Таблица 3. Результаты расчета нормальных напряжений в характерных точках вдоль оси колонны для стержневой и пространственной конечно-элементных моделей

Table 3. Calculational results of normal stresses at feature points along the column axis for rod and solid finite element models

			Стержневая модель						ABAQUS	Погрешность	
		Расчетная точка в поперечном сечении	$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{N})$, Па	$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{M_y})$, Па	$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{B})$ без учета коэф., Па	$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{B})$ с учетом коэф. $K_\omega = -0{,}184$, Па	$\boldsymbol{\sigma}$ без учета коэф., Па	$\boldsymbol{\sigma}$ с учетом коэф. $K_\omega = -0{,}184$, Па	$\boldsymbol{\sigma}$, Па	$\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ без учета коэф., %	$\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ с учетом коэф. $K_\omega = -0{,}184$, %
Нормальное напряжение в **колонне** на расстоянии **y** от узла	y = 0 м (узел)	1	−32 864	449 436	372 207	126 246	788 778	542 817	597 798	31,9	9,2
		2	−32 864	449 436	−372 207	−126 246	44 365	290 326	120 386	63,1	141,2
		3	−32 864	−449 436	−372 207	−126 246	−854 507	−608 546	−464 471	84,0	31,0
		4	−32 864	−449 436	372 207	126 246	−110 093	−356 055	−575 515	80,9	38,1
	y = 1 м	1	−32 864	281 025	330 996	115 761	579 156	363 922	484 092	19,6	24,8
		2	−32 864	281 025	−330 996	−115 761	−82 835	132 399	12 317	772,6	975,0
		3	−32 864	−281 025	−330 996	−115 761	−644 885	−429 650	−164 285	292,5	161,5
		4	−32 864	−281 025	330 996	115 761	17 107	−198 128	−464 096	103,7	57,3
	y = 2 м (середина)	1	−32 864	112 410	289 893	101 396	369 439	180 941	304 658	21,3	40,6
		2	−32 864	112 410	−289 893	−101 396	−210 348	−21 850	−134 374	56,5	83,7
		3	−32 864	−112 410	−289 893	−101 396	−435 167	−246 670	15 114	2 979,2	1 732,0
		4	−32 864	−112 410	289 893	101 396	144 619	−43 879	−317 372	145,6	86,2
	y = 3 м	1	−32 864	−56 205	253 579	86 993	164 510	−2 076	136 138	20,8	101,5
		2	−32 864	−56 205	−253 579	−86 993	−342 649	−176 063	−291 978	17,4	39,7
		3	−32 864	56 205	−253 579	−86 993	−230 239	−63 653	183 629	225,4	134,7
		4	−32 864	56 205	253 579	86 993	276 920	110 334	−159 762	273,3	169,1
	y = 4 м (опора)	1	−32 864	−224 616	207 616	72 591	−49 865	−184 889	−71 230	30,0	159,6
		2	−32 864	−224 616	−207 616	−72 591	−465 096	−330 072	−544 125	14,5	39,3
		3	−32 864	224 616	−207 616	−72 591	−15 864	119 161	404 281	103,9	70,5
		4	−32 864	224 616	207 616	72 591	399 368	264 343	42 467	840,4	522,5

на Рис. 10-13 (распределение нормальных напряжений в каждой из 4-х расчетных точек поперечного сечения вдоль оси ригеля) и Рис. 14-17 (распределение нормальных напряжений в каждой из 4-х расчетных точек поперечного сечения вдоль оси колонны).

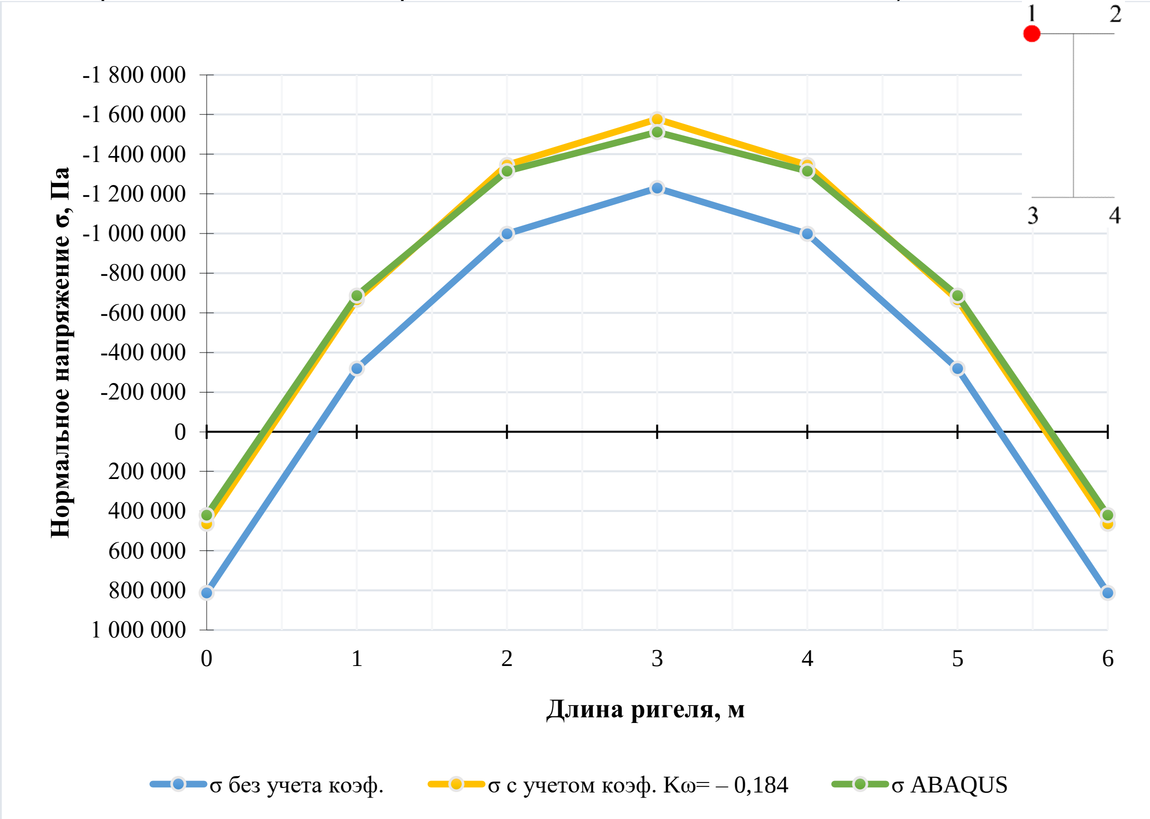

Рис.10 – Распределение нормальных напряжений в расчетной точке поперечного сечения 1 вдоль оси ригеля
Fig. 10 – Distribution of normal stresses at the point 1 along the axis of the crossbar

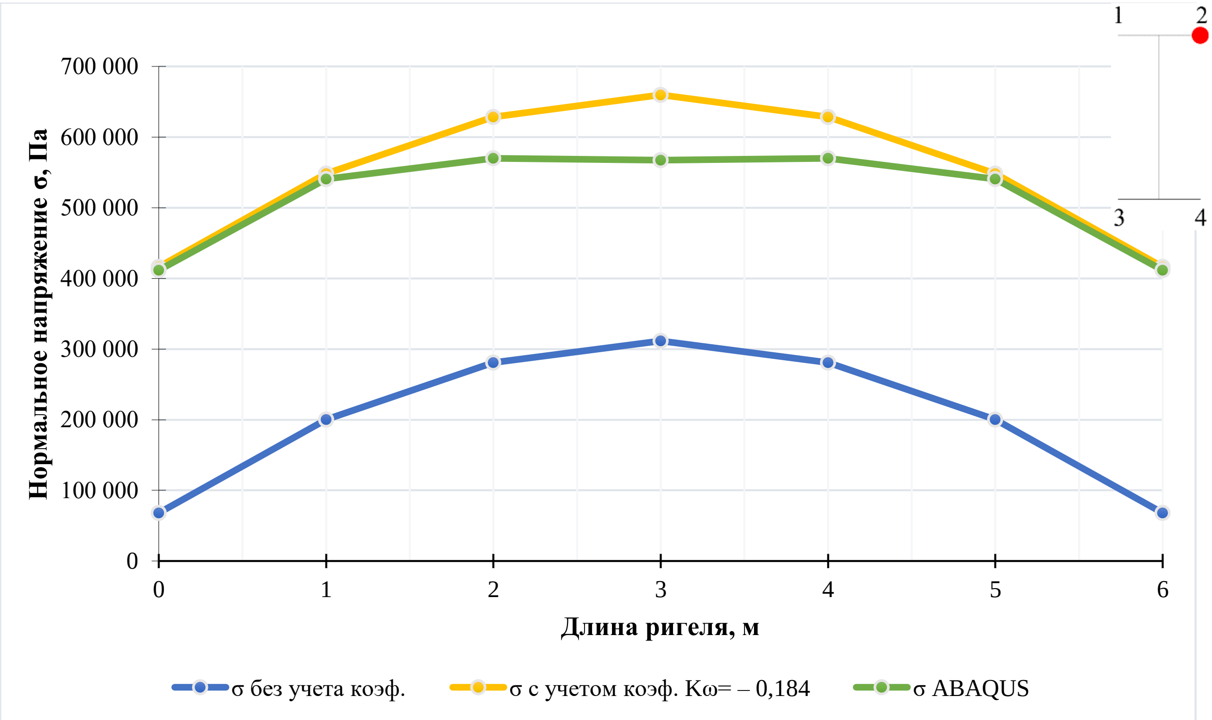

Рис.11 – Распределение нормальных напряжений в расчетной точке поперечного сечения 2 вдоль оси ригеля
Fig. 11 – Distribution of normal stresses at the point 2 along the axis of the crossbar

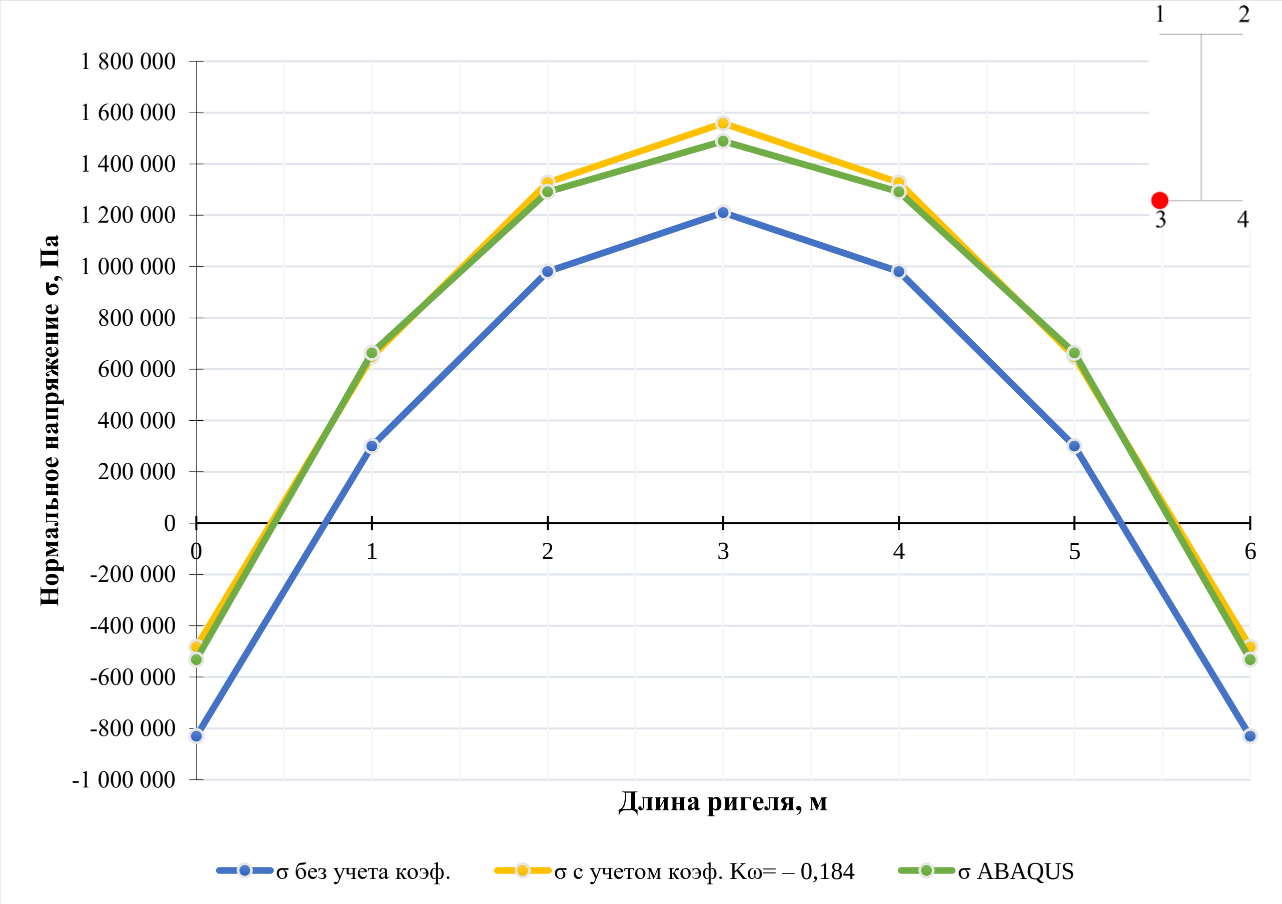

Рис.12 – Распределение нормальных напряжений в расчетной точке поперечного сечения 3 вдоль оси ригеля
Fig. 12 – Distribution of normal stresses at the point 3 along the axis of the crossbar

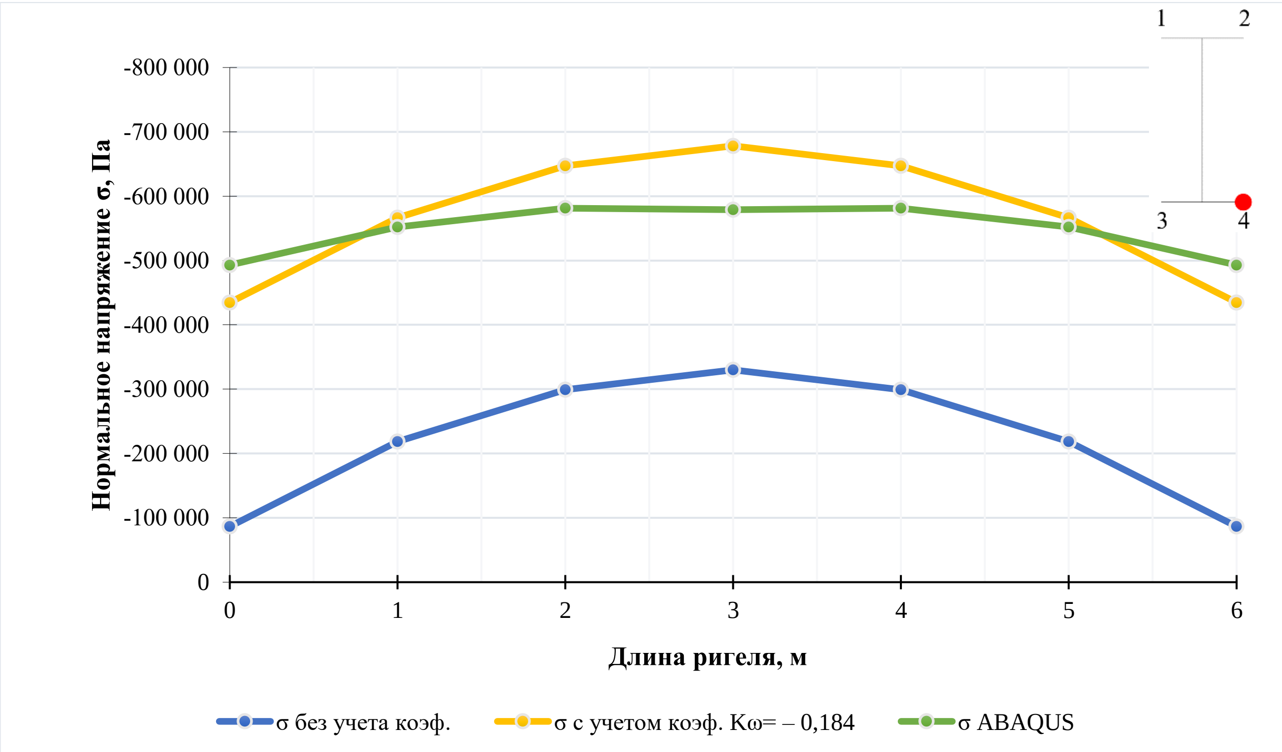

Рис.13 – Распределение нормальных напряжений в расчетной точке поперечного сечения 4 вдоль оси ригеля
Fig. 13 – Distribution of normal stresses at the point 4 along the axis of the crossbar

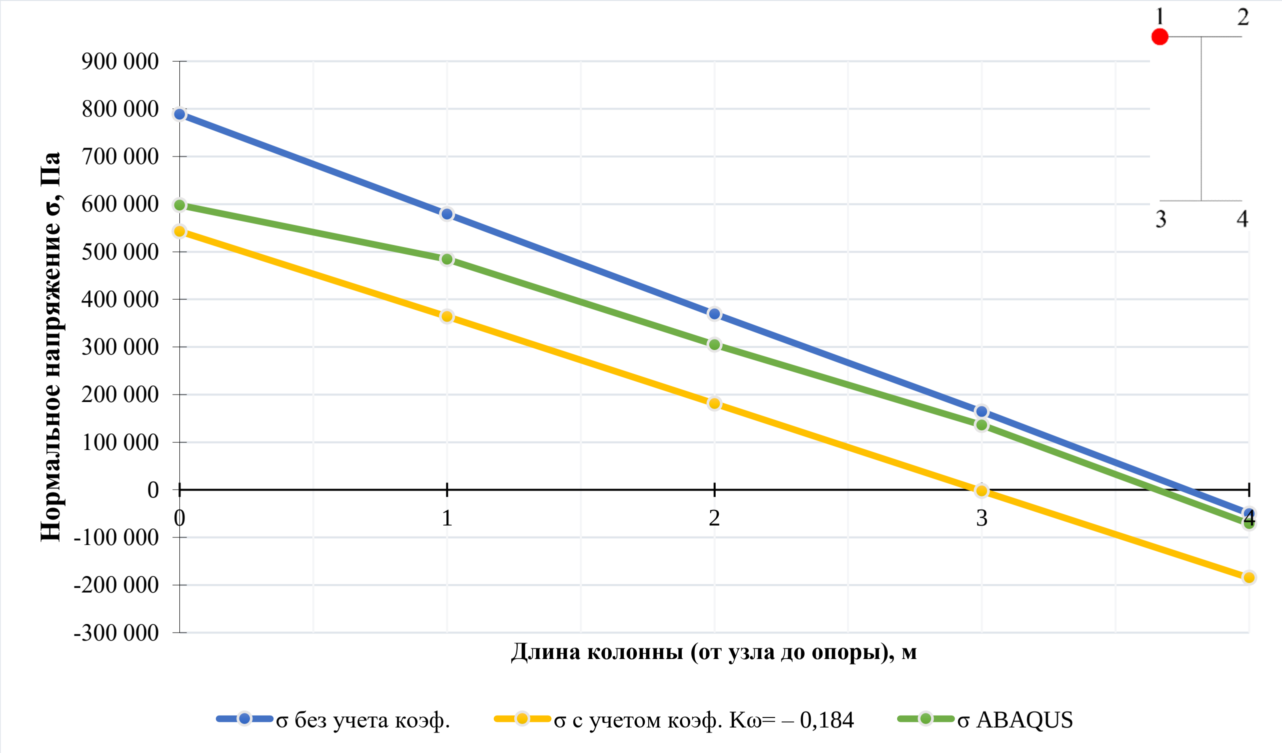

Рис.14 – Распределение нормальных напряжений в расчетной точке поперечного сечения 1 вдоль оси колонны
Fig. 14 – Distribution of normal stresses at the point 1 along the axis of the column

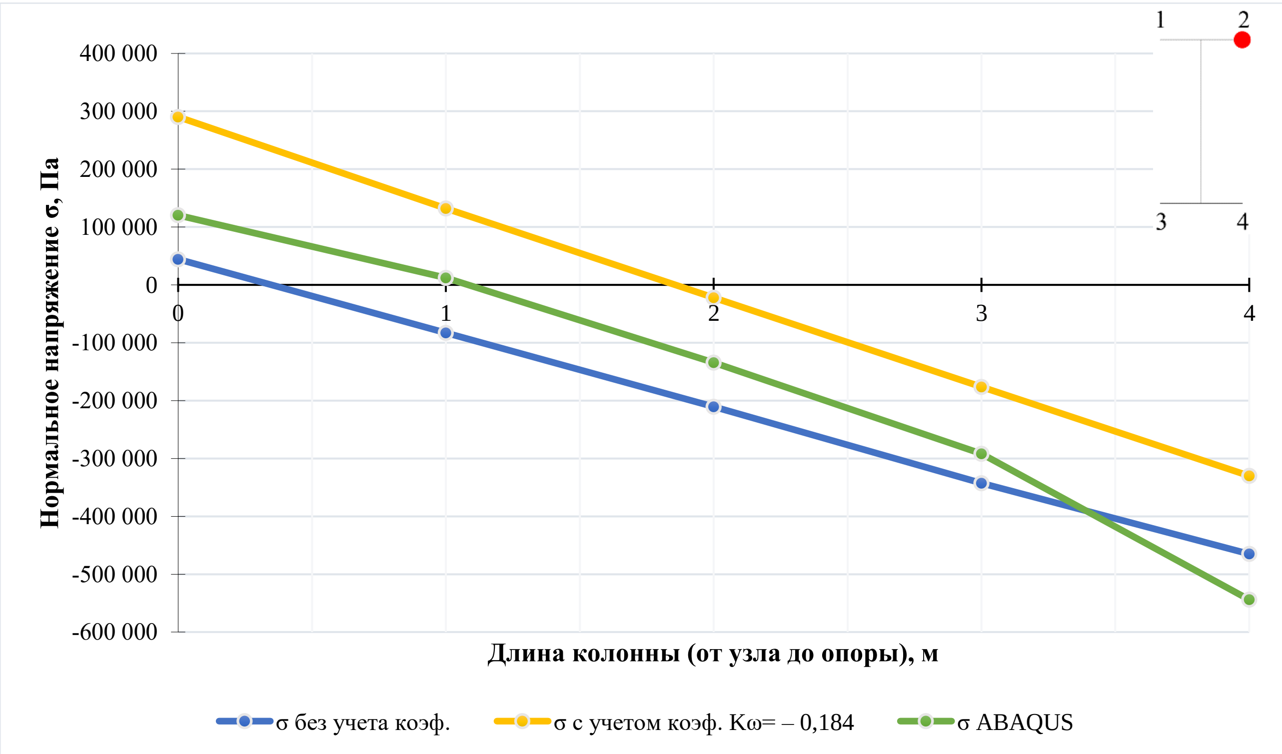

Рис.15 – Распределение нормальных напряжений в расчетной точке поперечного сечения 2 вдоль оси колонны
Fig. 15 –Distribution of normal stresses at the point 2 along the axis of the column

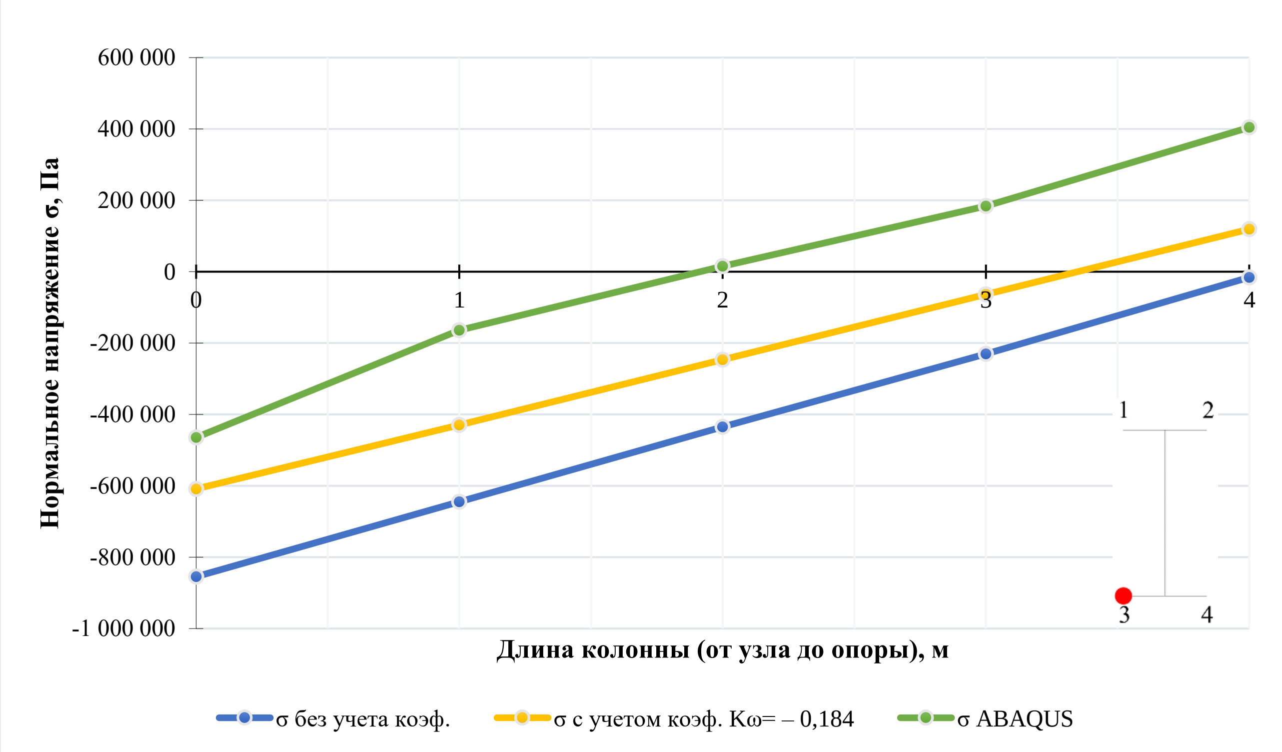

Рис.16 – Распределение нормальных напряжений в расчетной точке поперечного сечения 3 вдоль оси колонны
Fig. 16 –Distribution of normal stresses at the point 3 along the axis of the column

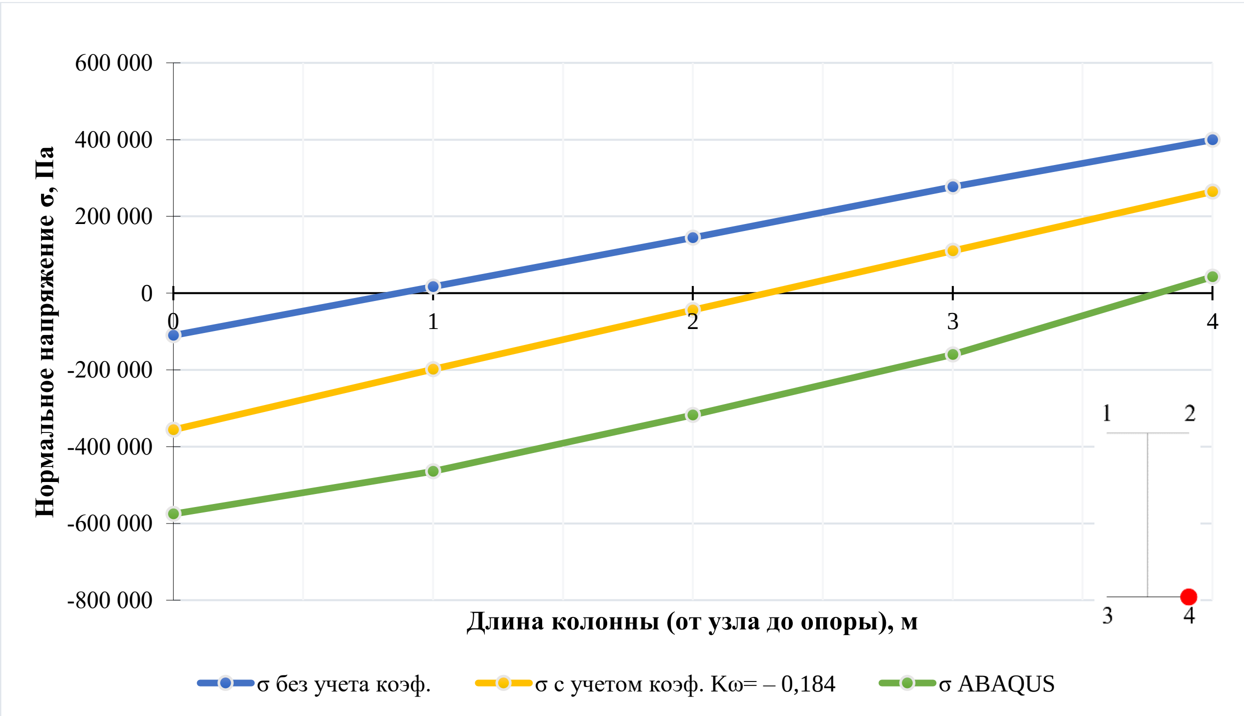

Рис.17 – Распределение нормальных напряжений в расчетной точке поперечного сечения 4 вдоль оси колонны
Fig. 17 –Distribution of normal stresses at the point 4 along the axis of the column

Зная значения нормальных напряжений, полученных для конечно-элементной модели в ПК ABAQUS, значения N, M_y, геометрических характеристик сечения и секториальных координат, можно вычислить значение бимомента B:

$$B = \left(\sigma - \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{W_y}\right)\frac{I_\omega}{\omega_i}. \quad (4)$$

В Таблице 4 представлены результаты расчета бимомента B для пространственной конечно-элементной модели, построенной в программном комплексе ABAQUS, и их сравнение с ранее рассчитанными значениями бимомента B для стержневой модели, включая два случая (без учета коэффициента поворота K_ω и с его учетом). В графическом виде распределение бимомента B вдоль оси ригеля и колонны представлено на Рис. 18-19, соответственно

Таблица 4 – Результаты расчета бимомента в характерных точках для стержневой и пространственной конечно-элементных моделей
Table 4. Calculational results of bimoment at feature points for rod and solid finite element models

		Стержневая модель		ABAQUS			
		B без учета коэф., Па	$K_\omega = -0{,}184$, Па	точка1	точка2	точка 3	точка 4
Значения бимомента ***B*** в **ригеле** на расстоянии **x**	x = 0 м (узел)	−0,1026	−0,0066	0,0052	−0,0079	−0,0201	0,0095
	x = 1 м	0,0715	0,1674	0,1729	0,1653	0,1717	0,1634
	x = 2 м	0,1763	0,2722	0,2634	0,2560	0,2622	0,2541
	x = 3 м (середина)	0,2123	0,3083	0,2902	0,2829	0,2890	0,2809
Значения бимомента ***B*** в **колонне** на расстоянии **y**	y = 0 м (узел)	−0,1026	−0,0348	−0,0500	−0,0816	0,0049	0,0257
	y = 1 м	−0,0912	−0,0319	−0,0650	−0,0650	0,04124	0,0414
	y = 2 м (середина)	−0,0799	−0,0280	−0,0621	−0,0590	0,0442	0,0474
	y = 3 м	−0,0699	−0,0240	−0,0621	−0,0559	0,0442	0,0505
	y = 4 м (опора)	−0,0572	−0,0200	−0,0513	−0,0790	0,0586	0,0412

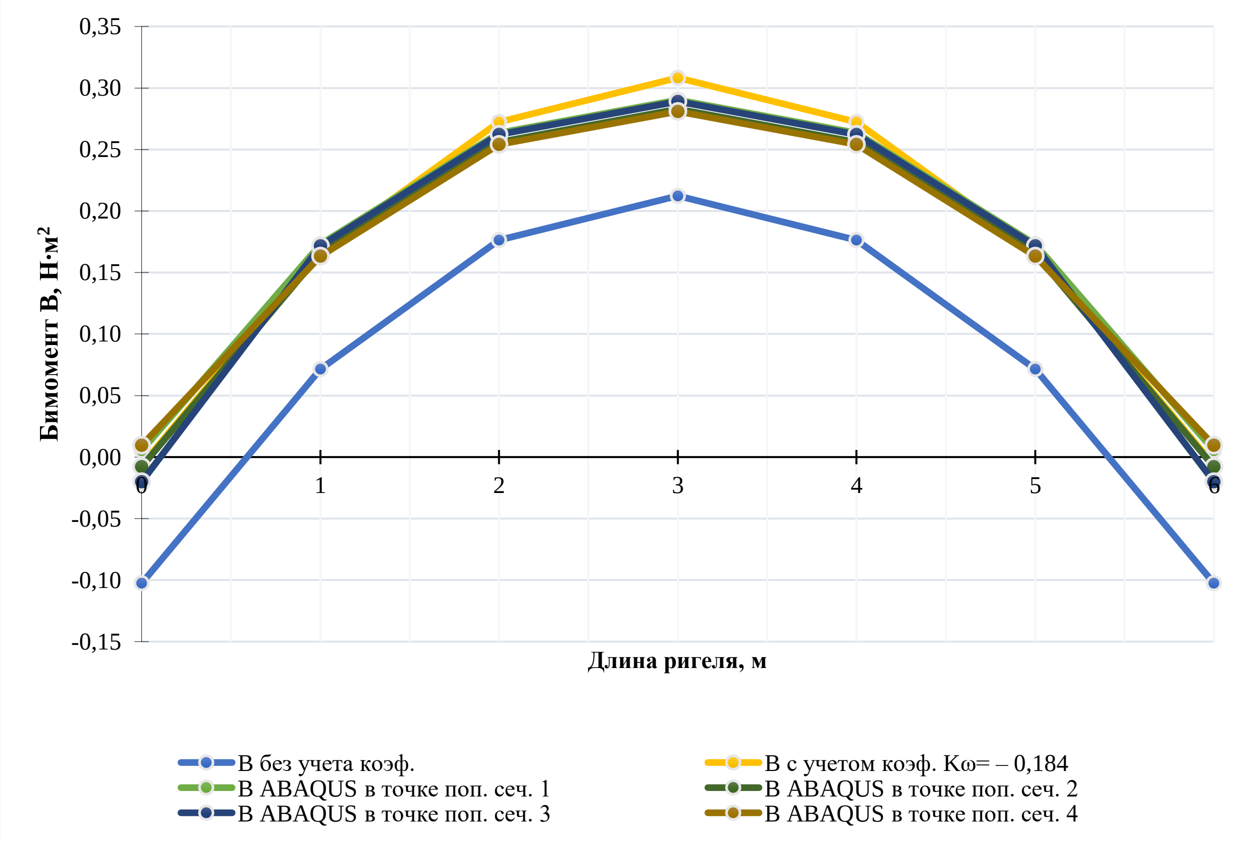

Рис.18– Распределение бимомента *B* вдоль оси ригеля
Fig. 18 – Distribution of bimoment *B* along the crossbar axis

Как видно из графика на Рис.18 значения бимомента в ригеле, вычисленные по предложенному способу, являются достоверными; максимальное значение бимомента несколько выше (на 6-7%) истинного, что может считаться запасом прочности. При этом погрешность значений бимомента, вычисленных без учета коэффициента поворота [30], составляет более

30%, а сами значения оказываются существенно ниже истинных, что при расчетах без обеспечения запаса прочности может приводить к нарушению условий прочности и требований строительных норм.

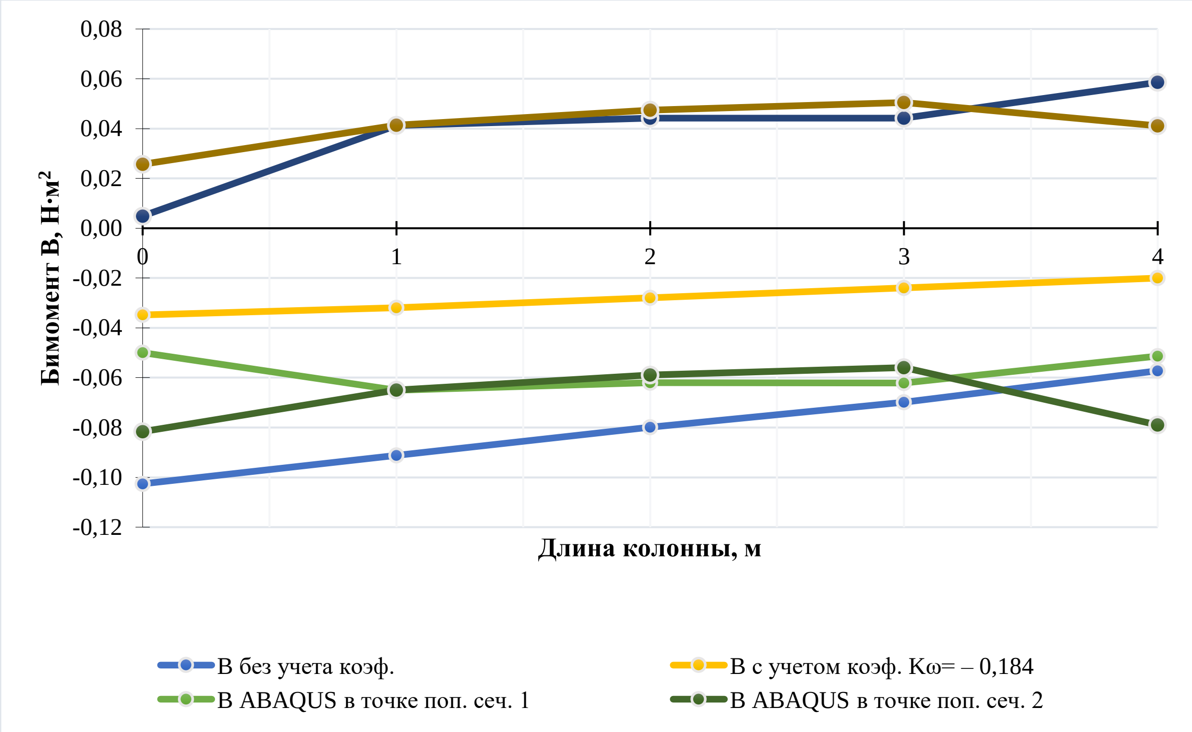

Рис.19 – Распределение бимомента B вдоль оси колонны
Fig. 19 – Distribution of bimoment B along the column axis

Из графика на Рис.19 видно, что значения бимомента в колонне, вычисленные по предложенному способу, также как и значения без учета «коэффициента поворота», не являются точными, что можно объяснить, в целом, сложным характером распределения напряжений в колонне, не полностью соответствующим формуле (3), и как следствие – отсутствие однозначной эпюры B. Однако при осреднении функций B, вычисленных по напряжениям в четырех точках, именно предложенный способ дает точное соответствие (желтая кривая лежит между кривыми вычисленными через «истинные» напряжения; в то время как синяя кривая – в стороне)

Conclusions / Заключение

1. Показано, что предложенный метод учета бимомента в узлах рам, состоящих их тонкостенных профилей, основанный на использовании «коэффициента поворота» в матрице поворота конечных элементов с «седьмой» (депланационной) степенью свободы, при инженерных расчетах, является корректным для пролетных сечений, удаленных от двух депланационно-податливых узлов.
2. По результатам сравнения значений, полученных при расчете предложенным способом с коэффициентом поворота $K_\omega = -0{,}184$, со значениями, вычисленными для пространственной конечно-элементной модели в ПК ABAQUS (далее «истинные» значения) вдоль оси ригеля:
   - погрешность напряжений для максимально опасной точки максимально опасного сечения составила 4,3%. Значения напряжений в опасном сечении, полученные предложенным способом, отличаются в большую сторону от «истинных» значений, что дает небольшой запас;
   - при отдалении от опасного сечения (в середине ригеля) в обе стороны на треть пролета погрешность плавно уменьшается до 2,9%;
   - в зоне узловых соединений погрешность составила 9,2%, но при этом напряжения оказались ниже, чем «истинные».
3. Значения нормальных напряжений вдоль оси колонны, полученные в результате расчета пространственной конечно-элементной модели в ПК ABAQUS, отличаются от значений, полученных для стержневой модели (без учета коэффициента поворота K_ω и с его учетом).

4. Показана неприменимость гипотезы Туснина [2] (без учета коэффициента поворота K_ω) для рассмотренной задачи; напряжения, вычисленные данным способом, оказались в среднем ниже на 30%, чем «истинные».
5. Характер распределения бимомента вдоль оси ригеля и его значения, при расчете с учетом коэффициента поворота K_ω, очень близки к показателям бимомента, полученного для пространственной конечно-элементной модели в ПК ABAQUS.
6. Распределение бимомента вдоль оси колонны и его значения, вычисленные обратным ходом из НДС пространственной конечно-элементной модели существенно ближе к «истинным», чем вычисленные без учета «коэффициента поворота»

References

1. Slivker, V.I. Stroitelnaya mekhanika. Variatsionnye osnovy. [Structural mechanics. Variational basis]. Moscow: ASV, 2005., 2005. 710 p.
2. Lalin, V., Rybakov, V., Sergey, A. The finite elements for design of frame of thin-walled beams. Applied Mechanics and Materials. 2014. 578–579. Pp. 858–863. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMM.578-579.858.
3. Lalin, V. V., Rybakov, V.A., Diakov, S.F., Kudinov, V. V., Orlova, E.S. The semi-shear theory of V.I. Slivker for the stability problems of thin-walled bars. Magazine of Civil Engineering. 2019. 87(3). Pp. 66–79. DOI:10.18720/MCE.87.6.
4. de Borst, R., Crisfield, M.A., Remmers, J.J.C., Verhoosel, C. V. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Second Edition. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Second Edition. 2012. DOI:10.1002/9781118375938.
5. Lalin, V. V., Zdanchuk, E. V., Kushova, D.A., Rozin, L.A. Variational formulations for non-linear problems with independent rotational degrees of freedom. Magazine of Civil Engineering. 2015. 56(4). DOI:10.5862/MCE.56.7.
6. Tusnina, O. A finite element analysis of cold-formed Z-purlins supported by sandwich panels. Applied Mechanics and Materials. 2014. 467. Pp. 398–403. DOI:10.4028/WWW.SCIENTIFIC.NET/AMM.467.398.
7. Tusnina, O. An influence of the mesh size on the results of finite element analysis of Z-purlins supported by sandwich panels. Applied Mechanics and Materials. 2014. 475–476. Pp. 1483–1486. DOI:10.4028/WWW.SCIENTIFIC.NET/AMM.475-476.1483.
8. Hsiao, K.M., Lin, J.Y., Lin, W.Y. A consistent co-rotational finite element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-D beams. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. 169(1–2). Pp. 1–18. DOI:10.1016/S0045-7825(98)00152-2.
9. Kibkalo, A., Lebedeva, M., Volkov, M. Methods of Parametric Optimization of Thin-Walled Structures and Parameters which Influence on it. MATEC Web of Conferences. 2016. 53. DOI:10.1051/MATECCONF/20165301051.
10. Basaglia, C., Camotim, D., Silvestre, N. GBT-based local, distortional and global buckling analysis of thin-walled steel frames. Thin-Walled Structures. 2009. 47(11). Pp. 1246–1264. DOI:10.1016/J.TWS.2009.04.003.
11. Basaglia, C., Camotim, D., Silvestre, N. Global buckling analysis of plane and space thin-walled frames in the context of GBT. Thin-Walled Structures. 2008. 46(1). Pp. 79–101. DOI:10.1016/J.TWS.2007.07.007.
12. Basaglia, C., Camotim, D., Silvestre, N. Post-buckling analysis of thin-walled steel frames using generalised beam theory (GBT). Thin-Walled Structures. 2013. 62. Pp. 229–242. DOI:10.1016/J.TWS.2012.07.003.
13. Manta, D., Gonçalves, R., Camotim, D. Combining shell and GBT-based finite elements: Linear and bifurcation analysis. Thin-Walled Structures. 2020. 152. DOI:10.1016/J.TWS.2020.106665.
14. Pignataro, M., Rizzi, N., Ruta, G., Varano, V. The effects of warping constraints on the buckling of thin-walled structures. Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2009. 4(10). Pp. 1711–1727. DOI:10.2140/JOMMS.2009.4.1711.
15. Atavin, I. V., Melnikov, B.E., Semenov, A.S., Chernysheva, N. V., Yakovleva, E.L. Influence of stiffness of node on stability and strength of thin-walled structure. Magazine of Civil Engineering. 2018. 80(4). Pp. 48–61. DOI:10.18720/MCE.80.5.
16. Garifullin, M., Pajunen, S., Mela, K., Heinisuo, M., Havula, J. Initial in-plane rotational stiffness of welded RHS T joints with axial force in main member. Journal of Constructional Steel Research. 2017. 139. Pp. 353–362. DOI:10.1016/J.JCSR.2017.09.033.

17. Garifullin, M., Vatin, N., Jokinen, T., Heinisuo, M. Numerical solution for rotational stiffness of RHS tubular joints. Advances and Trends in Engineering Sciences and Technologies II - Proceedings of the 2nd International Conference on Engineering Sciences and Technologies, ESaT 2016. 2017. Pp. 81–86. DOI:10.1201/9781315393827-16.
18. Garifullin, M., Bronzova, M., Pajunen, S., Mela, K., Heinisuo, M. Initial axial stiffness of welded RHS T joints. Journal of Constructional Steel Research. 2019. 153. Pp. 459–472. DOI:10.1016/J.JCSR.2018.10.025.
19. Gorodetskiy, A.S., Zdorenko, V.S., Karpilovskiy, V.S. Primeneniye MKE k raschetu tonkostennykh sterzhnevykh sistem [Application of FEM to the design of thin-walled bar systems]. Soprotivleniye materialov i teoriya sooruzheniy. 1976. 28. Pp. 134–140.
20. Tusnin, A. Chislennyy raschet konstruktsiy iz tonkostennykh sterzhney otkrytogo profilya [Numerical calculation of thin-walled structures of public profile]. Moscow, M.: MGSU: Izd-vo ASV, 2009. 143 p.
21. Tusnin, A. Finite Element for Calculation of Structures Made of Thin-Walled Open Profile Rods. Procedia Engineering. 2016. 150. Pp. 1673–1679. DOI:10.1016/J.PROENG.2016.07.149.
22. Perelmuter, A., Yurchenko, V. Calculation of spatial structures from thin_walled bars with open profile. Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 2012. 245(6). Pp. 18–25.
23. Perelmuter, A., Yurchenko, V. On the issue of structural analysis of spatial systems from thin-walled bars with open profiles. Metal Constructions. 2014. 20. Pp. 179–190.
24. Postnov, V.A., Kharkhurim, I.Y. Metod konechnykh elementov v raschetakh sudovykh konstruktsiy [Finite element method in calculations of ship structures]. Moscow, 1974. 344 p.
25. Nemchinov, Y.I. Raschet tonkostennykh prostranstvennykh sistem metodom konechnykh elementov [Calculation of thin-walled spatial systems by the finite element method]. Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 1976. 5. Pp. 14–17.
26. Nemchinov, Y.I. Raschet zdaniy i sooruzheniy metodom prostranstvennykh konechnykh elementov [Calculation of buildings and structures by the spatial finite element method]. Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 1981. 5. Pp. 29–33.
27. Cichoń, C., Koczubiej, S. No TitleConsistent FEM model for thin-walled space frames. Czasopismo Techniczne. 2008. 21. Pp. 3–20.
28. Rezaiee-Pajand, M., Moayedian, M. Explicit stiffness of tapered and monosymmetric I beam–columns. InternationalJournal of Engineering. 2000. 13(2). Pp. 1–18.
29. Bazant, Z.P., El Nimeiri, M. Large-deflection spatial buckling of thin-walled beams and frames. ASCE J Eng Mech Div. 1973. 99(EM6). Pp. 1259–1281. DOI:10.1061/jmcea3.0001837.
30. Tusnin, A.R. Finite element for numeric computation of structures of thin-walled open profile bars. Metal constructions. 2009. 15(1). Pp. 73–78.
31. Selyantsev, I.M., Tusnin, A. Cold-formed steel joints with partial warping restraint. Magazine of Civil Engineering. 2021. 101(1). DOI:10.34910/MCE.101.1.
32. Britvin, E.. Analysis jf frame structurs formed of thinwalled bar elements. Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 2016. 4. Pp. 43–54.
33. Serpik, I., Shkolyarenko, R. Refinement of the accounting methodology of bi-moments transfer at the junctions of the I-section bars. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. 365(4). DOI:10.1088/1757-899X/365/4/042011.
34. Rybakov, V.A., Jos, V.A. Stress State of Г-Shaped Thin-Walled Rod Joints in Bending Torsion. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 99(1). Pp. 9903–9903. DOI:10.4123/CUBS.99.3. URL: https://unistroy.spbstu.ru/article/2022.100.3 (date of application: 18.04.2022).
35. Rybakov, V., Sovetnikov, D., Jos, V. Cross-Sectional Warping of Thin-Walled Rods at Plane Frame Joints. Lecture Notes in Civil Engineering. 2020. 70. Pp. 231–243. DOI:10.1007/978-3-030-42351-3_20.
36. Rybakov, V.A., Sovetnikov, D.O., Jos, V.A. Bending torsion in Г-shaped rigid and warping hinge joints. Magazine of Civil Engineering. 2020. 99(7). DOI:10.18720/MCE.99.9.
37. Vlasov, V.Z. Thin-walled elastic beams. Israel Program for Scientific Translation. Jerusalem, 1961. 493 p.