



Research Article

Received: May 24, 2022

Accepted: June 10, 2022

Published: June 14, 2022

ISSN 2304-6295

The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels

Sviridenko, Olesya V.^{1*} Komerzan, Evgeny V.¹ 

¹ Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; SviridenkoOV@mpei.ru (S.O.V.); KomerzanYV@mpei.ru (K.E.V.)

Correspondence:* email SviridenkoOV@mpei.ru; contact phone [+79057175101](tel:+79057175101)

Keywords:

Lower estimate of natural frequency; First frequency of natural oscillations; Cantilever truss; Dunkerley method; Maxwell-Mohr formula; Maple; Induction

Abstract:

The object of research. The object of the study is a spatial cantilever statically definable truss consisting of three planar trusses with a cross lattice system connected on the long sides. The supports of the truss structure, represented by a rack, spherical and cylindrical connection, are rigid. The rods are assumed to be elastic. The hinges connecting the rods are perfect. The dependence of the first natural frequency of vibrations of the truss on the number of panels, dimensions, weight, construction and material properties is found in an analytical form. **Method.** The rigidity of the truss structure with masses concentrated in the nodes is calculated according to the Maxwell-Mohr formula. Using the Dunkerley method, which gives a lower estimate of the natural frequency, the problem of deriving the analytical dependence of the lowest oscillation frequency of the console truss on a number of parameters is solved. The common terms of the sequence of coefficients are determined by solving linear homogeneous recurrent equations. To calculate the forces in the rods and analyze the results obtained, the induction method was used. All transformations, solutions of systems of equilibrium equations of nodes are made using the symbolic mathematics system Maple. **Results.** The analysis of the obtained results and their comparison shows the high accuracy of the formula derived using the Dunkerley method, which gives a lower estimate of the natural frequency. The analytical dependence of the accuracy of the lower estimate of the natural oscillation frequency of the cantilever truss on the number of panels is obtained.

1 Introduction / Введение

Фермы представляют собой устойчивые и прочные конструкции, нашедшие широкое применение в строительной отрасли. Пространственные фермы используют для строительства зданий различного назначения, ангаров и т.д. Однако, область их применения этим не ограничивается. Они являются конструктивной основой башенных и порталных монтажных кранов, рабочих органов экскаваторов и многих других, в основном грузоподъемных, машин [1], [2]. Кроме ферм технического назначения, особую группу пространственных ферм составляют обзорные вышки и ориентиры [3]. При проектировании, конструкции фермы легко придать требуемый внешний вид, который определяется особенностями технологии изготовления. Нагрузка на ферменные конструкции может быть различной. Предполагаемые расчетные нагрузки напрямую определяют конструктивные особенности формы ферм. Соответственно, ферменная конструкция может быть легкой, состоящей из тонких прутьев, или тяжелой, выполненной с применением стержней, которые могут компоноваться из нескольких элементов крупных профилей или листов. Расчет собственных частот колебаний таких конструкций является одной из актуальных задач наряду с оценкой жесткости и прочности. Методики расчета

Sviridenko, O.; Komerzan, E.

The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels; 2022; *Construction of Unique Buildings and Structures*; 101 Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1



ферм разработаны и применяются в специализированных пакетах, основанных на методе конечных элементов и использующих численные алгоритмы [4], [5]. Такой подход позволяет получать решения задач для статически неопределимых систем и систем со сложными граничными условиями для учета неупругих или нелинейных свойств материала стержней. Аналитическое решение задачи возможно в том случае, когда используется простая математическая модель статически определимой фермы [6], [7]. В аналитических расчетах собственных частот в основном применяют полуэмпирические или приближенные формулы. Например, для расчета частоты колебаний балочной фермы используют метод эквивалентной жесткости конструкции [8]. Это предполагает приравнивание жесткости фермы к жесткости эквивалентной балки, собственную частоту которой определяют методами сопротивления материалов. В случае рассмотрения регулярных конструкций с периодической структурой, используют метод индукции [9]. Это позволяет получить решения для целого класса конструкций путем ввода в качестве параметра количества элементов периодичности, например, числа панелей, или стержней. Результаты решения задач расчета статически определимых регулярных систем, как плоских, так и пространственных, нашли отражение в научных трудах Хатчинсона Р.Г., Флека Н.А. [10], [11], Зока Ф.В., Латтюра Р.М., Бегли М.Р. [12]. Отдельные решения задачи о деформации регулярных плоских ферм в аналитической форме получены в [13]–[18]. Аналитический расчет деформаций плоской фермы треугольного очертания в системе Maple получен в [19]. Формулы для расчета пространственных ферм с произвольным числом панелей рассмотрены в [20]–[23]. Известны также аналитические решения для строительных конструкций в тригонометрических рядах [24], [25]. В справочнике [26] собраны различные схемы плоских ферм и формулы для расчета их прогибов в зависимости от числа панелей. Задачи о нижней оценке первой частоты собственных колебаний регулярных ферм решены в [27]–[29][30]. Аналитические решения применимы для предварительной оценки свойств проектируемых конструкций, а также для решения задач оптимизации.

В настоящей работе рассматривается математическая модель регулярной статически определимой консольной ферменной конструкции с крестообразной решеткой и массой, распределенной по узлам. Решается задача вывода аналитической оценки зависимости низшей частоты колебаний фермы от числа панелей, массы, линейных размеров ее конструкции и свойств материала. Результаты исследования могут быть использованы для контроля численных решений, что особенно актуально для крупномасштабных конструкций с большим числом элементов, и для предварительных расчетов проектируемых сооружений.

2 Materials and Method / Материалы и методы

Модель консольной фермы, состоит из трех плоских ферм, соединенных между собой по длинным сторонам (Рис. 1). Число панелей равно n .

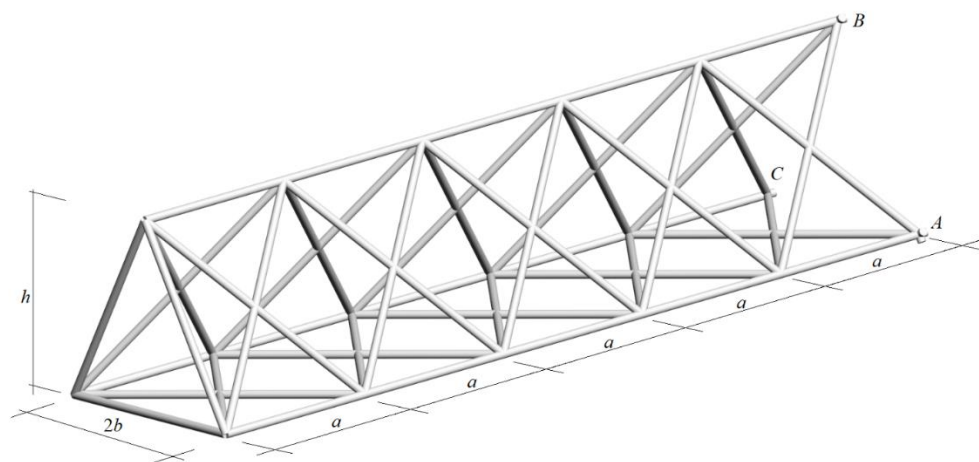


Рис. 1 – Модель консольной фермы, $n=5$
Fig. 1 – Console Truss model, $n=5$



Высота фермы h , ширина основания $2b$, каждая панель имеет длину a . Опоры фермы представлены сферическим соединением в узле C , цилиндрическим соединением в узле A и стойкой в узле B . Ферма представляет собой статически определимую конструкцию. Общее количество стержней в конструкции, включая шесть стержней, моделирующие опоры, составляет $q = 9n + 9$.

Инерционные свойства фермы заданы одинаковыми сосредоточенными массами, расположенными во всех узлах ферменной конструкции, за исключением опор. Стержни предполагаются упругими. Шарниры, соединяющие стержни, идеальные.

Задача заключается в получении аналитической оценки зависимости нижней частоты собственных колебаний фермы от количества панелей. Решение выполнено в предположении, что массы в узлах колеблются вдоль оси z . Число степеней свободы рассматриваемой модели ферменной конструкции равно $N = 3(n + 1)$. Жесткость конструкции определена по формуле Максвелла – Мора в предположении упругих деформаций стержней фермы. Полагаем, что шесть стержней, которые моделируют опоры, являются жесткими. Усилия в узлах фермы и реакции опор найдены из общей системы уравнений равновесия в проекциях на оси координат. Матрица системы уравнений равновесия включает направляющие косинусы сил, значения которых получены на основе данных о координатах узлов и структуре соединений стержней (Рис. 2).

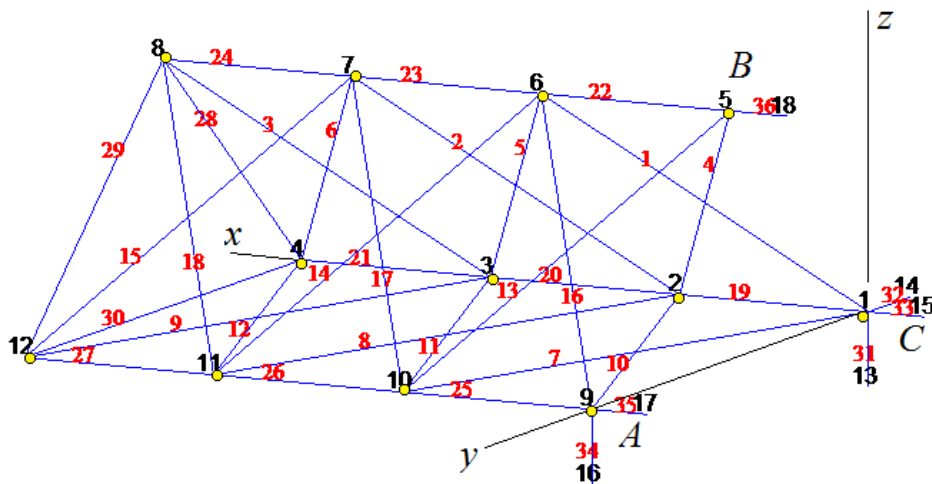


Рис. 2 – Структура соединения стержней, нумерация узлов и стержней, $n=3$
Fig. 2 – The structure of the connection of rods, numbering of nodes and rods, $n=3$

Координаты узлов имеют вид:

$$\begin{aligned}x_i &= a(i-1), y_i = 0, z_i = 0, \\x_{i+n+1} &= a(i-1), y_{i+n+1} = b, z_{i+n+1} = h, \\x_{i+2n+2} &= a(i-1), y_{i+2n+2} = 2b, z_{i+2n+2} = 0, i = 1, \dots, n+1.\end{aligned}$$

Выполнена нумерация концевых узлов стержней для ввода данных о порядке их соединения в узлах конструкции. В правую часть системы уравнений равновесия вносятся значения внешних сил. В задаче колебаний это единичные силы, направленные вдоль оси z . Решение системы уравнений, позволило получить аналитические выражения для сил, используемых при определении жесткости конструкции. Для обобщения ряда частных решений использован метод индукции, реализованный в системе компьютерной математики Maple.

Система дифференциальных уравнений колебаний точечных масс в узлах фермы представлена в матричном виде:

$$\mathbf{M}_N \ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{D}_N \mathbf{Z} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{Z} = [z_1, z_2, \dots, z_N]^T$ – смещение массы вдоль оси z ;



\mathbf{D}_N – матрица жесткости;

\mathbf{M}_N – диагональная матрица инерции размера $N \times N$;

$\ddot{\mathbf{Z}}$ – вектор ускорения.

В случае одинаковых масс матрица инерции пропорциональна единичной матрице $\mathbf{M}_N = m\mathbf{I}_N$. Обозначаем \mathbf{B}_N как матрицу податливости, обратную матрице жесткости $\mathbf{D}_N = \mathbf{B}_N^{-1}$. Ее элементы определены по формуле Максвелла-Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^q S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \quad (2)$$

где EF – жесткость стержней;

$S_{\alpha}^{(i)}$ – усилие в стержне с номером α от действия единичной силы, действующей на узел i в направлении оси z ;

l_{α} – длина стержня α .

Чтобы найти усилия в стержнях, использован программный пакет символьных вычислений Maple. Умножив равенство (1) на матрицу \mathbf{B}_N и приняв во внимание очевидное соотношение $\ddot{\mathbf{Z}} = -\omega^2 \mathbf{Z}$, задача сведет к стандартной задаче о собственных значениях матрицы \mathbf{B}_N : $\mathbf{B}_N \mathbf{Z} = \lambda \mathbf{Z}$, где $\lambda = 1/(m\omega^2)$ – собственное значение матрицы \mathbf{B}_N , ω – собственная частота колебаний.

Приближенное решение задачи о нижней границе первой частоты можно получить с использованием метода Донкерлея. Нижняя оценка первой частоты колебаний по этому методу имеет вид:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{k=1}^N \omega_k^{-2}, \quad (3)$$

где ω_k – частота колебаний одной массы m (парциальная частота).

3 Results and Discussion / Результаты и обсуждение

Уравнение вертикальных колебаний массы m , расположенной в отдельном узле имеет вид: $m\ddot{z}_k + d_k z_k = 0$, где z_k – вертикальное смещение массы, \ddot{z}_k – вектор ускорения, d_k – коэффициент жесткости. Следовательно, парциальная частота равна $\omega_k = \sqrt{d_k/m}$. Коэффициент жесткости, обратный коэффициенту податливости, определяется по формуле Максвелла-Мора: $\delta_k = 1/d_k = \sum_{\alpha=1}^N (\tilde{S}_{\alpha}^{(k)})^2 l_{\alpha} / (EF)$, где $\tilde{S}_{\alpha}^{(k)}$ – усилие в стержне α от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу, где расположена масса с номером k . В соответствии с формулой Донкерлея (3):

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{k=1}^N \delta_k = m \Delta_n. \quad (4)$$

Расчеты для ферм с разным числом панелей дает последовательность формул:

$$\Delta_1 = (37a^3 + 20b^3 + 14c^3 + 3d^3 + 10f^3 + 20h^3) / (4h^2 EF),$$

$$\Delta_2 = (191a^3 + 22b^3 + 54c^3 + 13d^3 + 12f^3 + 30h^3) / (4h^2 / EF),$$

$$\Delta_3 = (281a^3 + 20b^3 + 54c^3 + 13d^3 + 10f^3 + 20h^3) / (2h^2 / EF),$$

$$\Delta_4 = (651a^3 + 21b^3 + 94c^3 + 23d^3 + 11f^3 + 25h^3) / (2h^2 / EF),$$

$$\Delta_5 = 3(861a^3 + 20b^3 + 94c^3 + 23d^3 + 10f^3 + 20h^3) / (4h^2 / EF), \dots$$



где $c = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$, $d = \sqrt{a^2 + 4b^2}$, $f = \sqrt{h^2 + b^2}$.

Общая форма решения имеет вид:

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 c^3 + C_4 d^3 + C_5 f^3 + C_6 h^3) / (h^2 EF). \quad (5)$$

Формулы для общих членов полученных последовательностей коэффициентов находятся с помощью компьютерной математической системы Maple, позволяющей определить рекуррентные уравнения, которым они удовлетворяют. Уравнения получаются однородными, линейными. Решение рекуррентных уравнений дало формулы для коэффициентов:

$$\begin{aligned} C_1 &= (3n^4 + 18n^3 + 38n^2 + 19n + 2(-1)^n - 2) / 8, C_2 = (5n - 2(-1)^n + 3) / 2, \\ C_3 &= (20n^2 + 14n + 3(-1)^n - 3) / 8, C_4 = (5n^2 + 3n + (-1)^n - 1) / 8, \\ C_5 &= (10n - 3(-1)^n + 7) / 8, C_6 = 5(n+1) / 2. \end{aligned} \quad (6)$$

Погрешность нижнего приближения решения (5) оценивается из сравнения с численным решением задачи о колебании системы с числом степеней свободы N . Найдены собственные значения матрицы \mathbf{B}_N . Для этого использован оператор собственных значений Eigenvalues из пакета LinearAlgebra системы Maple. На графике (Рис. 3) показано сравнение численного решения о зависимости первой частоты ω_1 спектра от числа панелей и оценки Донкерлея ω_D по формуле (5) с коэффициентами (6). В решении использованы следующие константы: модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, площадь поперечного сечения стержней $F = 0.1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, $m = 150$ кг, размеры конструкции $a = 2$ м, $b = 3$ м и $h = 2$ м.

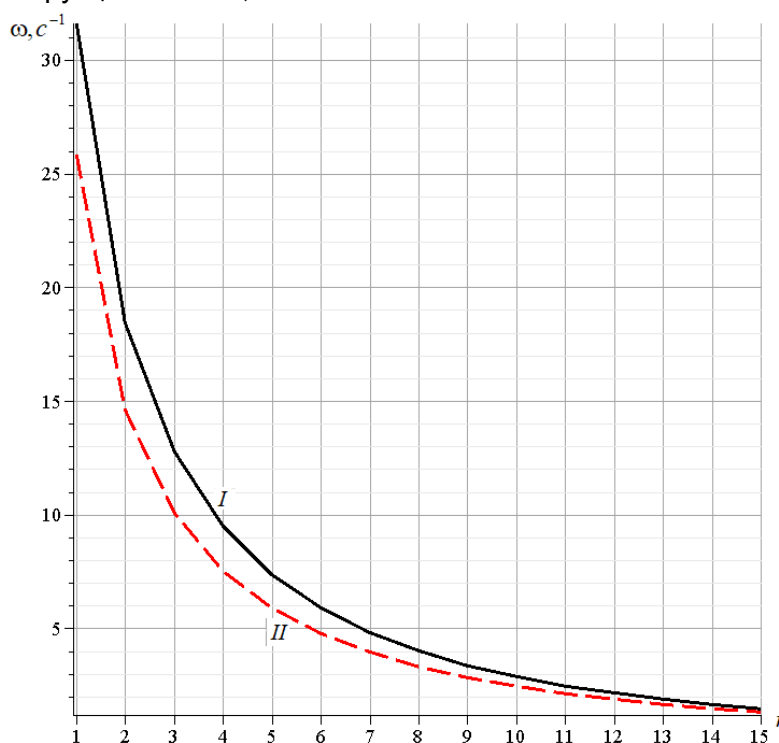


Рис. 3 – Сравнение аналитической оценки и численного решения задачи о минимальной частоте: I – численное решение ω_1 ; II – решение по формуле (5) для ω_D

Fig. 3 – Comparison of the analytical estimate and the numerical solution of the minimum frequency problem; I – numerical solution ω_1 ; II – solution (5) for ω_D

Из полученных графиков видно, что по мере увеличения количества панелей точность оценки Донкерлея растет. Это отображено на рисунке 4 из соотношения относительных

погрешностей $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$. Кроме того, замечено, что уменьшение высоты h несколько повышает точность приближенного решения. Для плоских ферм метод Донкерлея дает заметно большую точность [31].

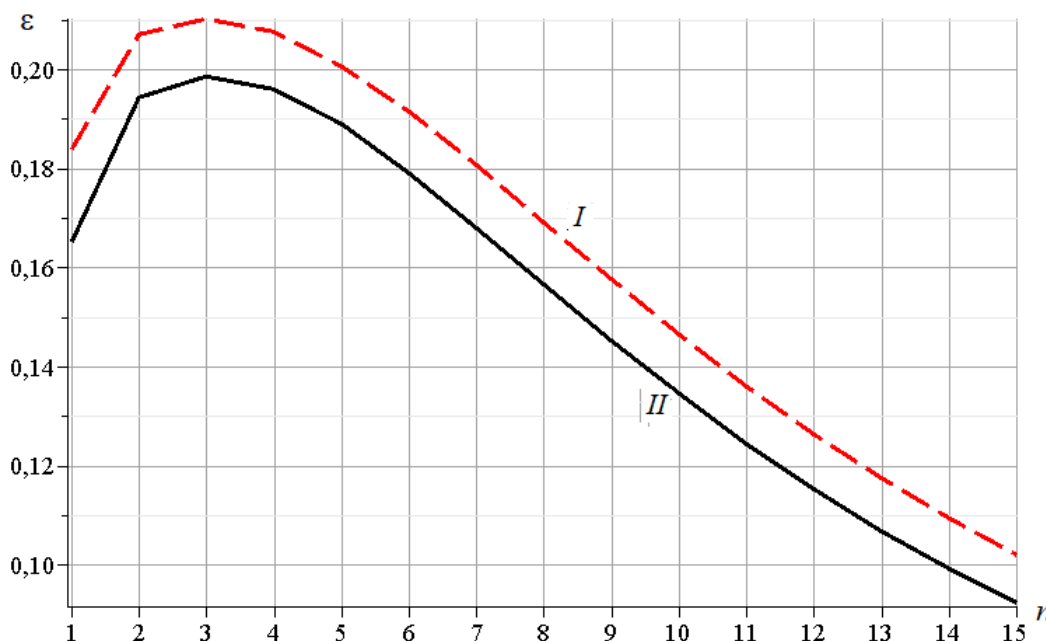


Рис. 4 – Погрешности формулы (5): I – $h = 2\text{м}$; II – $h = 1\text{м}$

Fig. 4 – An error of formula (5): I – $h = 2\text{m}$; II – $h = 1\text{m}$

4 Conclusions / Выводы

1. Получена аналитическая зависимость первой частоты собственных колебаний пространственной консольной фермы от количества панелей в предположении, что смещения масс в узлах происходят только в одном направлении.

2. В решении учтены массы грузов, размеры конструкции, модуль упругости материала стержня и число панелей. Используемая модель консольной фермы представляет собой упрощенную схему реальной конструкции.

3. Введение жестких соединений в узлах вместо шарнирных соединений и добавление дополнительных горизонтальных связей позволит сделать конструкцию более жесткой и увеличит первую частоту собственных колебаний фермы. Следовательно, выведенная с использованием метода Донкерлея формула для оценки нижней границы частоты колебаний останется актуальной.

4. Предлагаемое решение может быть использовано в качестве проверки для оценки численных расчетов, что особенно эффективно для систем с большим числом панелей.

5 Fundings / Финансирование

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 22-21-00473.

References

- Jiang, W., Ding, L., Zhou, C. Digital twin: Stability analysis for tower crane hoisting safety with a scale model. *Automation in Construction*. 2022. 138. Pp. 104257. DOI:10.1016/J.AUTCON.2022.104257. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0926580522001303> (date of application: 24.05.2022).
- Li-Jeng, H., Hong-Jie, S. Seismic Response Analysis of Tower Crane Using SAP2000. *Procedia Engineering*. 2014. 79. Pp. 513–522. DOI:10.1016/J.PROENG.2014.06.374.

Sviridenko, O.; Komerzan, E.

The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels; 2022; *Construction of Unique Buildings and Structures*; 101 Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1



3. Qu, W.L., Chen, Z.H., Xu, Y.L. Dynamic analysis of wind-excited truss tower with friction dampers. *Computers & Structures*. 2001. 79(32). Pp. 2817–2831. DOI:10.1016/S0045-7949(01)00151-1.
4. Han, Q.H., Xu, Y., Lu, Y., Xu, J., Zhao, Q.H. Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM analysis. *Engineering Structures*. 2015. 82. Pp. 186–198. DOI:10.1016/J.ENGSTRUCT.2014.10.013.
5. Vatin, N., Havula, J., Martikainen, L., Sinelnikov, A.S., Orlova, A. V., Salamakhin, S. V. Thin-walled cross-sections and their joints: Tests and FEM-modelling. *Advanced Materials Research*. 2014. 945–949. Pp. 1211–1215. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMR.945-949.1211.
6. Kirsanov, M.N., Zaborskaya, N. Деформации периодической фермы с раскосной решеткой // *Инженерно-строительный журнал*. №. 2017. 3(71). Pp. 61–67. DOI:10.18720/MCE.71.7.
7. Kirsanov, M., Serdjuks, D., Buka-Vaivade, K. Analytical Expression of the Dependence of the Multi-lattice Truss Deflection on the Number of Panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. 90. Pp. 9003. DOI:10.18720/CUBS.90.3.
8. Liu, M., Cao, D., Zhang, X., Wei, J., Zhu, D. Nonlinear dynamic responses of beamlike truss based on the equivalent nonlinear beam model. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2021. 194. Pp. 106197. DOI:10.1016/J.IJMECSCI.2020.106197.
9. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N., Serdjuks, D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2020. 4(4). Pp. 510–517. DOI:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.
10. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. 54(4). Pp. 756–782. DOI:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
11. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. 85(9). Pp. 607–617. DOI:10.1002/zamm.200410208.
12. Zok, F.W., Lature, R.M., Begley, M.R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. 96. Pp. 184–203. DOI:10.1016/j.jmps.2016.07.007.
13. Kirsanov, M.N. Formulas for computing of deflection and forces in the truss with arbitrary number of panels. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018. 14(2). Pp. 90–95. DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-2-90-95. URL: <http://ijccse.iasv.ru/article/view/140> (date of application: 26.04.2021).
14. Kitaev, S.S. Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple. *Postulat*. 2018. 5–1. Pp. 43. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1477> (date of application: 3.03.2021).
15. Kirsanov, M.N., Khromatov, V.Y. Modeling deformations of triangular shape flat truss. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2017. 275(6). Pp. 24–28. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30638551> (date of application: 8.07.2021).
16. Belyankin, N.A.; Boyko, A.Y. Formula for deflection of a girder with an arbitrary number of panels under the uniform load. *Structural Mechanics and Structures*. 2019. 1(20). Pp. 21–29. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_37105069_21945931.pdf.
17. Ilyushin, A. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame. *Structural mechanics and structures*. 2019. 3(22). Pp. 29–38. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_41201106_54181191.pdf.
18. Ovsyannikova, V.M. Dependence of deformations of a trapezous truss beam on the number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2020. 26(3). Pp. 13–20. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44110286> (date of application: 11.03.2021).
19. Kirsanov, M. Deformations of a Triangular Trussed Rafter With an Arbitrary Number of Panels: An Analytical Solution. *AlfaBuild*. 2021. 19. Pp. 1903. DOI:10.57728/ALF.19.3.
20. Kirsanov, M. Model of a spatial dome cover. Deformations and oscillation frequency. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 99(9904). DOI:10.4123/CUBS.99.4. URL: [https://unistroy.spbstu.ru/userfiles/files/2022/1\(99\)/9904.pdf](https://unistroy.spbstu.ru/userfiles/files/2022/1(99)/9904.pdf) (date of application: 13.04.2022).
21. Kirsanov, M. Deformations of the Rod Pyramid: An Analytical Solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021. 95. Pp. 9501. DOI:10.4123/CUBS.95.1.
22. Kirsanov, M. Deformations And Spatial Structure Vibrations Frequency of The Rectangular Contour Type Cover: Analytical Solutions. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021. 98(9805). DOI:10.4123/CUBS.98.5. URL:

Sviridenko, O.; Komerzan, E.

The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels; 2022; *Construction of Unique Buildings and Structures*; 101 Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1



- [https://unistroy.spbstu.ru/userfiles/files/2021/5\(98\)/9805.pdf](https://unistroy.spbstu.ru/userfiles/files/2021/5(98)/9805.pdf) (date of application: 13.04.2022).
23. Kirsanov, M.N. The Stress-Strain State of a Rectangular Covering Spatial Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. 91(6). Pp. 9104–9104. DOI:10.18720/CUBS.91.4. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2020.91.4> (date of application: 27.02.2021).
 24. Goloskokov, D.P., Matrosov, A. V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack. *Materials Physics and Mechanics*. 2018. 36(1). Pp. 137–141. DOI:10.18720/MPM.3612018_15.
 25. Matrosov, A. V., Suratov, V.A. Stress-strain state in the corner points of a clamped plate under uniformly distributed normal load. *Materials Physics and Mechanics*. 2018. 36(1). Pp. 124–146. DOI:10.18720/MPM.3612018_16.
 26. Kirsanov, M. *Planar Trusses: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2019.
 27. Kirsanov, M. N., Vorobyev, O.V. Calculating of a spatial cantilever truss natural vibration frequency with an arbitrary number of panels: analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021. 94. Pp. 9402. DOI:10.4123/CUBS.94.2.
 28. Petrenko, V.F. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021. (20). Pp. 2001. DOI:10.34910/ALF.20.1.
 29. Vorobev, O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. 92(7). Pp. 9204–9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2020.92.4> (date of application: 27.02.2021).
 30. Kirsanov, M.N., Safronov, V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. *Magazine of Civil Engineering*. 2022. 111(3). DOI:10.34910/MCE.111.14. URL: <http://engstroy.spbstu.ru/> (date of application: 10.06.2022).
 31. Kirsanov, M. The natural frequency of a truss with double braces. *AlfaBuild*. 2022. 22(2202). DOI:10.57728/ALF.22.2.