



Research Article

Received: June 19, 2022

Accepted: July 07, 2022

Published: July 08, 2022

ISSN 2304-6295

Loading capacity of an arched underground bridge made of concrete blocks

Tyukalov, Yury Y.^{1*} Ashikhmin, Stanislav E.¹ ¹Vyatka State University, Kirov, Russian Federation; yutvgu@mail.ru (T.Y.Y); ashihminstanislav@gmail.com (A.S.E)Correspondence: * email yutvgu@mail.ru; contact phone [+79128218977](tel:+79128218977)

Keywords:

Arch bridge; Finite element method; Concrete blocks; Optimal parameters; Possible displacements principle

Abstract:

The object of research is an algorithm for determining the load capacity of an elliptical road bridge made of concrete blocks is proposed. The arch section heights are determined from the condition that the height of the concrete compressed zone should not be less than half the section height at any position of the automobile load. **Method.** To solve the problem by the finite element method in physically nonlinear formulation, the principle of possible stress states is used. The nodes equilibrium equations of the arch are compiled using the possible displacements principle. The arch internal forces by a finite element length are approximated with linear functions, the concrete deformation diagram is represented in a piecewise-broken curve. **Results.** To determine the loading capacity reserve of the optimal arch, the arch calculations were performed with a gradual increase in the automobile load up to destruction.

1 Introduction / Введение

Арочные бетонные и железобетонные сооружения с засыпкой грунтом широко используются для мостовых переходов и путепроводов. В статье [1] предлагается метод определения внутренних сил арочных перемычек с учетом упруго-пластической работы материала. В [2] рассмотрена модель растрескивания и пластического деформирования железобетонных арок. Решение было получено на основе функционала дополнительной энергии и обобщенного критерия распространения трещины Гриффитса. Проведено сравнение численных решений с экспериментальными данными. В статьях [3], [4] приведены численные и экспериментальные исследования кирпичных арок. В [3] арка представлена системой жестких блоков, соединенных тремя звеньями. В исследовании использован комбинаторный анализ для определения положения шарниров при малых перемещениях опор. В статье [5] исследуются механизмы разрушения каменных сводов под действием сосредоточенных сил. В статье отмечается важность учета возможности возникновения перемещений между жесткими блоками.

Ряд статей посвящен оптимизации формы арок [6], [7]. В статье [6] оптимизируется форма подземной бетонной арки с целью снижения изгибающих напряжений. Арка рассчитывается с использованием нелинейной модели конечных элементов. Центральная линия арки аппроксимирована кривой Безье с тремя степенями свободы. Оптимальные параметры определяются с помощью генетического алгоритма. Механизмы разрушения каменных арок и арок из бетонных блоков очень похожи. Статьи [8-11] посвящены кладке арочных мостов. В статье [12] представлен обзор исследований по методам армирования кирпичных арок композитными материалами. В частности, в [13] исследуется использование материалов из фибро-цементной матрицы (FRCM) для армирования кирпичных арок. В статье представлены

Tyukalov, Yu.; Ashikhmin, S.

Loading capacity of an arched underground bridge made of concrete blocks;

2022; Construction of Unique Buildings and Structures; 101 Article No 10105. doi: 10.4123/CUBS.101.5

численные и экспериментальные исследования армированных такими материалами арок. Арки моделируются с помощью набора жестких блоков. В статье [16] представлены результаты экспериментальных и численных исследований реакции многопролетного арочного каменного моста на вертикальные статические нагрузки. В [17] представлена двухфазная стратегия численного моделирования процесса разрушения камня арочных мостов. Каменные блоки представлены цельными элементами, а решение описывается специальными конечными элементами. Рассмотрены три режима разрушения (сжатие, растяжение и сдвиг) кладочных материалов. Статья [18] посвящена численному анализу кладки, основанному на экспериментальных данных. При расчете арочных мостов важно учитывать деформации сдвига. Теория учета сдвиговых деформаций круговых арок предложена в [20]. В данной статье представлено аналитическое решение для расчета круговых дуг, основанное на использовании логарифмических функций. Рассмотрение деформаций сдвига на основе аппроксимации напряжений представлено в [19], [20]. В работе [21] представлен алгоритм определения оптимальных размеров стреловидных арок из бетонных блоков. Для решения физически нелинейной задачи используется функционал дополнительной энергии в сочетании с принципом возможных перемещений [22-23]. Внутренние усилия по длине конечного элемента аппроксимируются кусочно-постоянными функциями. Метод дискретных элементов успешно применяется для расчета каменных арок с учетом нелинейности [24-27]. Значительное внимание уделяется учету влияния таких факторов, как дождь, смещение опор, ударные нагрузки на прочность и устойчивость арочных сооружений [28-30].

Целью данной работы является построение алгоритма определения резервов грузоподъемности и поиска оптимальных размеров арочного эллиптического моста из бетонных блоков. Решение строится на основе функционала дополнительной энергии. Внутренние усилия аппроксимируются линейными функциями, диаграмма деформирования бетона представляется кусочно-ломаной кривой.

2 Methods / Методы

Арка по длине разделяется на конечные элементы. Изгибающие моменты и продольные силы аппроксимируются по длине каждого конечного элемента линейными функциями независимо (Рис. 1). На Рис. 1 показана нумерация неизвестных усилий для первых двух конечных элементов.

Диаграмма деформации бетона арки представлена в виде кусочно-ломаной кривой, которая не учитывает растягивающие напряжения бетона (Рис. 2). Такая диаграмма используется потому, что в сечениях стыков бетонных блоков не могут возникать растягивающие напряжения. На участках между стыками, для запаса прочности, растягивающими напряжениями бетона также будем пренебрегать. При таком подходе расчет арки не будет зависеть от длины бетонных блоков и количества стыков.

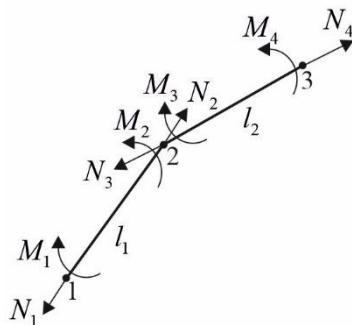


Рис. 1 - Нумерация неизвестных узловых усилий
Fig. 1 - Numbering of the unknown nodal forces

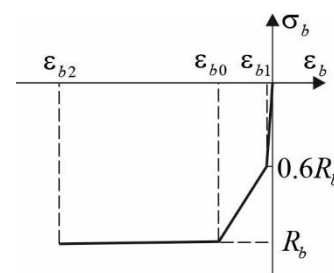


Рис. 2 - Диаграмма деформации бетона
Fig. 2 - Diagram of a concrete deformation

Для решения задачи в физически нелинейной постановке воспользуемся принципом возможных напряженных состояний. Для произвольного шага нарастающей нагрузки изменение приращения энергии дополнительных деформаций $\delta(\Delta\Pi_i)$ равно нулю.



$$\delta(\Delta\Pi_i) = \int_V (\varepsilon_i + \delta(\Delta\varepsilon_i)) \delta(\Delta\sigma_i) dV = 0. \quad (1)$$

$\varepsilon_i, \Delta\varepsilon_i$ – текущие деформации и приращения деформаций на шаге нагружения; $\Delta\sigma_i$ – приращения напряжений, которые должны удовлетворять уравнениям равновесия на шаге нагружения; V – предметная область. Приращения деформаций и напряжений в произвольной точке на каждом шаге связаны между собой касательным модулем деформации $E_i^t(\varepsilon_i)$:

$$\Delta\sigma_i = E_i^t(\varepsilon_i) \Delta\varepsilon_i. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем:

$$\delta(\Delta\Pi_i) = \int_V E_i^t(\varepsilon_i) (\varepsilon_i + \delta(\Delta\varepsilon_i)) \delta(\Delta\varepsilon_i) dV = 0. \quad (3)$$

Из выражения (3) следует, что приращение дополнительной энергии деформации будет иметь следующий вид:

$$\Delta\Pi_i = \int_V \left(E_i^t(\varepsilon_i) \varepsilon_i \Delta\varepsilon_i + \frac{1}{2} E_i^t(\varepsilon_i) \Delta\varepsilon_i^2 \right) dV. \quad (4)$$

Рассчитаем приращение дополнительной энергии деформации конечного элемента стержня. Приращения деформаций определяются согласно гипотезе прямой нормали:

$$\Delta\varepsilon_i = \Delta\varepsilon_{0i} - z\Delta\chi_i. \quad (5)$$

$\Delta\varepsilon_{0i}$ - приращение деформации средней линии; $\Delta\chi_i$ - приращение кривизны оси.

Подставляя (5) в (4), получаем:

$$\Delta\Pi_{i,k} = \int_0^{l_k} \int_{-h/2}^{h/2} b(\varepsilon_{0i} - z\chi_i) \Delta\sigma_i dz dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_k} \int_{-h/2}^{h/2} bE_i^t(\varepsilon_i) (\Delta\varepsilon_{0i}^2 - 2z\Delta\varepsilon_{0i}\Delta\chi_i + \Delta\chi_i^2) dz dx. \quad (6)$$

Введем обозначения для следующих интегралов:

$$EA^t = \int_{-h/2}^{h/2} bE_i^t(\varepsilon_i) dz, ES^t = \int_{-h/2}^{h/2} bE_i^t(\varepsilon_i) z dz, EI^t = \int_{-h/2}^{h/2} bE_i^t(\varepsilon_i) z^2 dz. \quad (7)$$

Интегралы (7) рассчитываются численно по диаграмме деформирования бетона (Рис. 2) методом трапеций. С учетом (7) приращение внутренних сил в сечении определяется по формулам:

$$\Delta N_i = \int_{-h/2}^{h/2} b\Delta\sigma_i dz = \int_{-h/2}^{h/2} bE_i^t(\varepsilon_i) (\Delta\varepsilon_{0i} - z\Delta\chi_i) dz = \Delta\varepsilon_{0i} EA^t - \Delta\chi_{ii} ES^t, \quad (8)$$

$$\Delta M_i = - \int_{-h/2}^{h/2} b\Delta\sigma_i z dz = - \int_{-h/2}^{h/2} bE_i^t(\varepsilon_i) (z\Delta\varepsilon_{0i} - z^2\Delta\chi_i) dz = -\Delta\varepsilon_{0i} ES^t + \Delta\chi_{ii} EI^t. \quad (9)$$

Из выражений (8), (9) получаем

$$\Delta\varepsilon_{0i} = \frac{\Delta N_i EI^t + \Delta M_i ES^t}{EA^t EI^t - ES^{t^2}}, \Delta\chi_i = \frac{\Delta N_i ES^t + \Delta M_i EA^t}{EA^t EI^t - ES^{t^2}}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (6), получаем

$$\Delta\Pi_{i,k} = \int_0^{l_k} (\varepsilon_{0i} \Delta N_i + \chi_i \Delta M_i) dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_k} \left(\frac{EI^t \Delta N_i^2}{EI^t EA^t - ES^{t^2}} + \frac{EA^t \Delta M_i^2}{EI^t EA^t - ES^{t^2}} + \frac{2ES^t \Delta M_i \Delta N_i}{EI^t EA^t - ES^{t^2}} \right) dx. \quad (11)$$

Введем векторы неизвестных узловых сил и их приращений для конечного элемента:



$$\mathbf{S}_{i,k} = \begin{Bmatrix} N_{i,2k-1} \\ M_{i,2k-1} \\ N_{i,2k} \\ M_{i,2k} \end{Bmatrix}, \Delta \mathbf{S}_{i,k} = \begin{Bmatrix} \Delta N_{i,2k-1} \\ \Delta M_{i,2k-1} \\ \Delta N_{i,2k} \\ \Delta M_{i,2k} \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

Для аппроксимации сил и моментов по длине конечного элемента будем использовать линейные функции (Рис. 3). Эти аппроксимации независимы для каждого конечного элемента. В этом случае глобальная матрица гибкости имеет блочно-диагональную форму и легко обратима. Выражение (11) можно записать в матричном виде:

$$\Delta \Pi_{i,k} = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{S}_{i,k}^T \mathbf{D}_{i,k}' \Delta \mathbf{S}_{i,k} + \Delta \mathbf{P}_{i,k}^T \Delta \mathbf{S}_{i,k}, \quad (13)$$

Второй интеграл в (11), определяющий элементы касательной матрицы, вычисляется численно по формуле трапеции. Из матриц $\mathbf{D}_{i,k}'$ конечных элементов формируем глобальную матрицу:

$$\mathbf{D}_i' = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{i,1}' & & & \\ & \mathbf{D}_{i,2}' & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{D}_{i,n}' \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Для всей системы получаем следующее выражение для приращения дополнительной энергии деформаций:

$$\Delta \Pi_i = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{S}_i^T \mathbf{D}_i' \Delta \mathbf{S}_i + \Delta \mathbf{P}_i^T \Delta \mathbf{S}_i. \quad (15)$$

В соответствии с принципом возможных напряженных состояний приращения сил и моментов должны удовлетворять уравнениям равновесия. Такие уравнения для узлов могут быть получены с использованием принципа возможных перемещений. В качестве возможных перемещений принимаются вертикальные, горизонтальные перемещения и углы поворота узлов. Для всей системы уравнения равновесия можно записать в следующей матричной форме:

$$\mathbf{L} \Delta \mathbf{S}_i + \Delta \mathbf{P}_i = 0. \quad (16)$$

Матрица глобального равновесия формируется из матриц равновесия конечных элементов.

$$\mathbf{L}_k = \begin{bmatrix} \frac{-\cos \alpha_k}{2} & \frac{\sin \alpha_k}{l_k} & \frac{-\cos \alpha_k}{2} & \frac{-\sin \alpha_k}{l_k} \\ \frac{-\sin \alpha_k}{2} & \frac{-\cos \alpha_k}{2} & \frac{-\sin \alpha_k}{2} & \frac{\cos \alpha_k}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\cos \alpha_k}{2} & \frac{-\sin \alpha_k}{l_k} & \frac{\cos \alpha_k}{2} & \frac{\sin \alpha_k}{l_k} \\ \frac{\sin \alpha_k}{2} & \frac{\cos \alpha_k}{l_k} & \frac{\sin \alpha_k}{2} & \frac{-\cos \alpha_k}{l_k} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \cos \alpha_k = \frac{x_{2k} - x_{2k-1}}{l_k}, \sin \alpha_k = \frac{y_{2k} - y_{2k-1}}{l_k}. \quad (17)$$

Матрица \mathbf{L} геометрическая и не зависит от нагрузки. Вектор нагрузки $\Delta \mathbf{P}_i$ формируется из сил, сосредоточенных в узлах, и нагрузок, распределенных по конечному элементу. Для этого необходимо рассчитать работу нагрузки при возможных перемещениях узлов.

Tyukalov, Yu.; Ashikhmin, S.

Loading capacity of an arched underground bridge made of concrete blocks;

2022; Construction of Unique Buildings and Structures; 101 Article No 10105. doi: 10.4123/CUBS.101.5



Используя метод множителей Лагранжа, получаем следующий расширенный функционал:

$$\Delta\Pi_i = \frac{1}{2} \Delta\mathbf{S}_i^T \mathbf{D}'_i \Delta\mathbf{S}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i^T \Delta\mathbf{S}_i + \mathbf{w}_i^T (\mathbf{L}\Delta\mathbf{S}_i + \Delta\mathbf{P}_i). \quad (18)$$

Вектор множителей Лагранжа состоит из значений узловых перемещений и углов поворота:

$$\mathbf{w}_i^T = (u_1 \quad w_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad u_n \quad w_n \quad \varphi_n). \quad (19)$$

Приравнивая функциональные производные по векторам $\Delta\mathbf{S}_i^T$ и \mathbf{w}_i^T , получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}'_i \Delta\mathbf{S}_i + \boldsymbol{\Delta}_i + \mathbf{L}^T \mathbf{w}_i &= 0, \\ \mathbf{L}\Delta\mathbf{S}_i + \Delta\mathbf{P}_i &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Выразим из первого уравнения вектор приращения сил

$$\Delta\mathbf{S}_i = -\mathbf{D}'_i^{-1} \boldsymbol{\Delta}_i - \mathbf{D}'_i^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{w}_i. \quad (21)$$

Матрица \mathbf{D}'_i блочно-диагональная, легко инвертируется. Введем обозначения матричного произведения:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{L} \mathbf{D}'_i^{-1} \mathbf{L}^T. \quad (22)$$

Из второго уравнения (25) получаем разрешающую систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{K}_i \mathbf{w}_i = \Delta\mathbf{P}_i - \mathbf{L} \mathbf{D}'_i^{-1} \boldsymbol{\Delta}_i. \quad (23)$$

Для решения (23) проведем итерационное уточнение по схеме Ньютона — Рафсона. Полученные изгибающие моменты используются для расчета поперечных сил в конечных элементах:

$$Q_k = \frac{M_{2k} - M_{2k-1}}{l_k}. \quad (24)$$

Далее выполняется проверка возможного смещения сечений в местах стыков бетонных блоков:

$$|Q_k| \leq k_{fr} |N_{2k-1}|, \quad |Q_k| \leq k_{fr} |N_{2k}|. \quad (25)$$

k_{fr} — коэффициент трения бетона по бетону; $N_{2k-1}, M_{2k-1}, N_{2k}, M_{2k}$ — внутренние силы в начале и конце конечного элемента. Если условия (25) не выполняются, то возможно смещение бетонных блоков друг относительно друга и необходимо изменить расчетную схему.

В каждом узле арки рассчитывается модуль эксцентриситета продольной силы и необходимая высота сечения, при которой сжатая зона будет равна половине высоты сечения (при линейной диаграмме напряжений в сжатой зоне)

$$e_i = \left| \frac{M_i}{N_i} \right|, \quad h_i^s = 3 \cdot e_i. \quad (26)$$

Расчеты показали, что максимальные сжимающие напряжения далеки от предельного значения; поэтому диаграмма напряжений в сжатой зоне практически линейна. Нелинейность деформаций связана с исключением из работы растянутой зоны бетона. Процесс уточнения необходимых высот сечений сходится не более чем за 15 итераций. В результате расчета для каждого узла определяются максимальный эксцентриситет продольной силы и необходимая высота сечения. Эти высоты обеспечат значение зоны сжатия не менее половины поперечного сечения при любом положении автомобильной нагрузки. equations are numbered, including those that are not referenced in the text:

3 Results and Discussion / Результаты и обсуждение

Рассмотрим задачу определения оптимальных параметров моста в форме эллиптической арки. На арку действуют нагрузки от веса грунта засыпки и подвижная нагрузка от автомобиля P_a . При этом минимальная высота сжатой зоны должна составлять не менее половины высоты сечения арки. При поиске оптимальных параметров будем считать, что пролет арки задан, а оптимальную высоту арки нужно подобрать. Оптимальная высота определяется последовательным расчетом арок с постепенным ее увеличением. Все данные для расчета приведены в Таблице 1. Арка разбита по длине на 16 конечных элементов.

Таблица 1. Данные для расчета арки
Table 1. Arch calculation data

| Обозначение | Размерность | Значение | Параметр |
|----------------|-------------------|--------------|-----------------------------------|
| h_0 | m | 2.0 | Высота засыпки от верха арки |
| φ_{gr} | degree | 35 | Угол внутреннего трения грунта |
| γ_{gr} | kN/m ³ | 17.7 | Объемный вес грунта |
| a | m | 1.2 | Расстояние между осями автомобиля |
| P_a | kN | 250 | Нагрузка на ось |
| a_x | m | 3.6 | Длина нагрузки от автомобиля |
| a_y | m | 2.7 | Ширина нагрузки от автомобиля |
| L | m | 12 | Пролет арки |
| B | m | 0.5 | Ширина арки |
| h_{min} | m | Задается | Минимальная высота сечения арки |
| H | m | Определяется | Высота арки |

Вертикальные и горизонтальные нагрузки от транспортного средства и грунта (Рис. 3) определяются по следующим формулам:

$$q_a = \frac{1.2 \cdot B \cdot P_a}{(h_0 + a_x)(h_0 + a_y)}, q_{gz,i} = 1.1 \cdot \gamma_{gr} (H + h_0 - z_i) \cdot B. \quad (27)$$

$$q_{qx,up} = 1.1 \cdot \gamma_{gr} h_0 \cdot tg^2 \left(45 - \frac{\varphi_{gr}}{2} \right) B, q_{qx,dn} = 1.1 \cdot \gamma_{gr} (H + h_0) \cdot tg^2 \left(45 - \frac{\varphi_{gr}}{2} \right) B. \quad (28)$$

К этим нагрузкам добавляется нагрузка от собственного веса арки.

Параметры диаграммы деформирования сжатого бетона были приняты следующими: $\varepsilon_{b1} = -0.000314$, $\varepsilon_{b0} = -0.002$, $\varepsilon_{b2} = -0.0035$, $R_b = 17000 \text{ kN} / \text{m}^2$. На Рис. 2 показана оптимальная арка с минимальным весом ($h_{min} = 0.4 \text{ m}$).

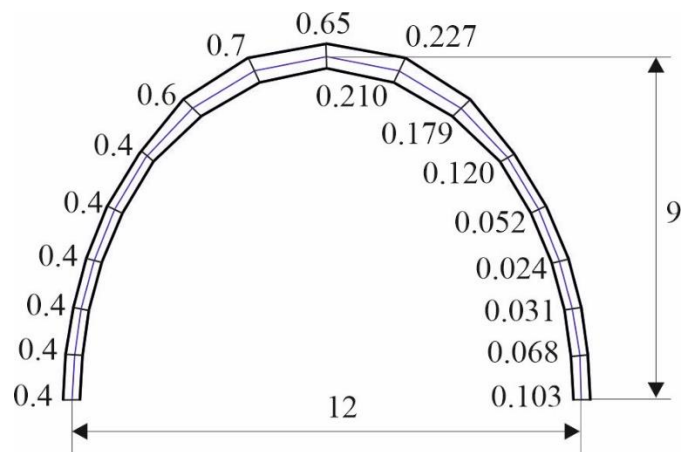


Рис. 2 - Арка с минимальной массой 15,409 тонн: слева указаны высоты сечения блоков; справа указаны максимальные эксцентриситеты продольной силы (в метрах)
Fig. 2 - Arch with minimum weight of 15.409 tons: on the left side the blocks section heights are indicated; on the right side the maximum eccentricities of the longitudinal force (in meters) are indicated

Разбиение арки на конечные элементы осуществлялось автоматически. Узлы арки определялись как точка пересечения прямой линии, проведенной из середины пролета, и дуги эллипса. Прямые линии проводились с угловым шагом 11.25 градусов. Углы отсчитывались от горизонтальной линии. Первые пять конечных элементов половины арки имеют минимальное сечение. Далее требуется увеличение высоты сечения до 0.6–0.7 метра.

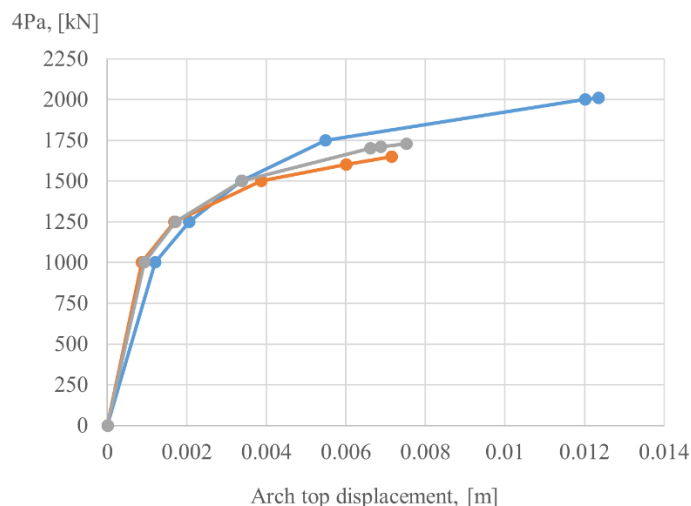


Рис. 3 - Перемещения вершины арки в зависимости от величины автомобильной нагрузки. Синяя линия – нагрузка расположена симметрично; серая линия – нагрузка смещена на 1.2 метра от центра; красная линия – нагрузка смещена на 2.4 метра от центра
Fig. 3 - The arch top displacements depending on the Vehicle axle load value. Blue line – the load is located symmetrically; gray line – the load is displaced on 1.2 meters from the center; red line – the load is displaced on 2.4 meters from the center

Для определения резервов несущей способности оптимальной арки, были выполнены расчеты арки с постепенным увеличением автомобильной нагрузки вплоть до разрушения. Рассматривались три варианта расположения автомобильной нагрузки. Наиболее опасным является расположение нагрузки со смещением на 2.4 метра от вершины арки (красная линия на рис. 3). В этом случае предельная автомобильная нагрузка примерно в 1.6 раза больше расчетной. Опасность несимметричного расположения нагрузки для арок из каменных блоков, также отмечается в работах [1, 4]. Если автомобильная нагрузка расположена симметрично относительно вершины арки, то разрушающая автомобильная нагрузка в два раза больше расчетной. Если необходимо обеспечить большой запас прочности арки, то нужно принять минимальную высоту сжатой зоны больше, чем половина высоты сечения.



4 Conclusions / Заключение

1. Предложен алгоритм определения грузоподъемности и оптимальных параметров арочного автомобильного моста из бетонных блоков. Высоты сечений арки моста определяются из условия, что высота сжатой зоны бетона не должна быть меньше половины высоты сечения.
2. Решение физически нелинейной задачи строится на основе принципов возможных напряженных состояний и возможных перемещений. Внутренние усилия аппроксимируются линейными функциями, диаграмма деформирования бетона представляется в виде кусочно-ломаной кривой.
3. Определены оптимальные параметры арочного автомобильного моста с пролетом 12 метров и его грузоподъемность. Показано, что разрушение арки происходит при увеличении автомобильной нагрузки примерно в 1.6 раза.

References

1. AudioNet, A., Fanning, P., Sobczak, L., Peremans, H. 2-D analysis of arch bridges using an elasto-plastic material model. *Engineering Structures*. 2008. 30(3). Pp. 845–855. DOI:10.1016/j.engstruct.2007.05.018.
2. Amorim, D.L.N.D.F., Proença, S.P.B., Flórez-López, J. A model of fracture in reinforced concrete arches based on lumped damage mechanics. *International Journal of Solids and Structures*. 2013. 50(24). Pp. 4070–4079. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2013.08.012.
3. Galassi, S., Misseri, G., Rovero, L., Tempesta, G. Failure modes prediction of masonry voussoir arches on moving supports. *Engineering Structures*. 2018. 173(July). Pp. 706–717. DOI:10.1016/j.engstruct.2018.07.015.
4. Gattesco, N., Boem, I., Andretta, V. Experimental behaviour of non-structural masonry vaults reinforced through fibre-reinforced mortar coating and subjected to cyclic horizontal loads. *Engineering Structures*. 2018. 172(December 2017). Pp. 419–431. DOI:10.1016/j.engstruct.2018.06.044.
5. Beatini, V., Royer-Carfagni, G., Tasora, A. Modeling the shear failure of segmental arches. *International Journal of Solids and Structures*. 2019. 158. Pp. 21–39. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2018.08.023.
6. Houšť, V., Eliáš, J., Miča, L. Shape optimization of concrete buried arches. *Engineering Structures*. 2013. 48. Pp. 716–726. DOI:10.1016/j.engstruct.2012.11.037.
7. Kimura, T., Ohsaki, M., Fujita, S., Michiels, T., Adriaenssens, S. Shape optimization of no-tension arches subjected to in-plane loading. *Structures*. 2020. 28(August). Pp. 158–169. DOI:10.1016/j.istruc.2020.08.053.
8. Misseri, G., Justin, M., Rovero, L. Experimental and numerical investigation of the collapse of pointed masonry arches under quasi-static horizontal loading. *Engineering Structures*. 2018. 173(October 2017). Pp. 180–190. DOI:10.1016/j.engstruct.2018.06.009.
9. Pulatsu, B., Erdogmus, E., Lourenço, P.B. Comparison of in-plane and out-of-plane failure modes of masonry arch bridges using discontinuum analysis. *Engineering Structures*. 2019. 178(August 2018). Pp. 24–36. DOI:10.1016/j.engstruct.2018.10.016.
10. Scozzese, F., Ragni, L., Tubaldi, E., Gara, F. Modal properties variation and collapse assessment of masonry arch bridges under scour action. *Engineering Structures*. 2019. 199(September). Pp. 109665. DOI:10.1016/j.engstruct.2019.109665.
11. Smoljanović, H., Živaljić, N., Nikolić, Ž., Munjiza, A. Numerical analysis of 3D dry-stone masonry structures by combined finite-discrete element method. *International Journal of Solids and Structures*. 2018. 136–137. Pp. 150–167. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2017.12.012.
12. Zampieri, P., Simoncello, N., Tetougueni, C.D., Pellegrino, C. Review article A review of methods for strengthening of masonry arches with composite materials. *Engineering Structures*. 2018. 171(December 2017). Pp. 154–169. DOI:10.1016/j.engstruct.2018.05.070.
13. Zampieri, P., Simoncello, N., Gonzalez-libreros, J., Pellegrino, C. Evaluation of the vertical load capacity of masonry arch bridges strengthened with FRCM or SFRM by limit analysis. *Engineering Structures*. 2020. 225(July). Pp. 111135. DOI:10.1016/j.engstruct.2020.111135.



14. Dmitriev, A., Lalin, V., Novozhilov, Y., Mikhalyuk, D. Simulation of Concrete Plate Perforation by Coupled Structures. 2020. 92(9207). DOI:10.18720/CUBS.92.7.
15. Ribeiro, F., Sena-Cruz, J., Branco, F.G., Júlio, E. 3D finite element model for hybrid FRP-confined concrete in compression using modified CDPM. *Engineering Structures*. 2019. 190(April). Pp. 459–479. DOI:10.1016/j.engstruct.2019.04.027.
16. Zani, G., Martinelli, P., Galli, A., di Prisco, M. Three-dimensional modelling of a multi-span masonry arch bridge: Influence of soil compressibility on the structural response under vertical static loads. *Engineering Structures*. 2020. 221(May). Pp. 110998. DOI:10.1016/j.engstruct.2020.110998.
17. Zhao, C., Xiong, Y., Zhong, X., Shi, Z., Yang, S. A two-phase modeling strategy for analyzing the failure process of masonry arches. *Engineering Structures*. 2020. 212(March). Pp. 110525. DOI:10.1016/j.engstruct.2020.110525.
18. Mohireva, A., Proskurovskis, A., Belousov, N., Nazinyan, A., Glebova, E. Strength and deformability of compressed-bent masonry structures during and after fire. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. 92(9203). Pp. 2–6. DOI:10.18720/CUBS.92.3.
19. Thai, S., Thai, H.T., Vo, T.P., Patel, V.I. A simple shear deformation theory for nonlocal beams. *Composite Structures*. 2016. 183(1). Pp. 262–270. DOI:10.1016/j.compstruct.2017.03.022.
20. Pydah, A., Batra, R.C. Shear deformation theory using logarithmic function for thick circular beams and analytical solution for bi-directional functionally graded circular beams. *Composite Structures*. 2017. 172. Pp. 45–60. DOI:10.1016/j.compstruct.2017.03.072.
21. Tyukalov, Y.Y. Optimal Shape of Arch Concrete Block Bridge. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. 93 Article No 9307. doi: 10.18720/CUBS.93.7
22. Tyukalov, Y.Y. Calculation of circular plates with assuming shear deformations. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. 687(3). DOI:10.1088/1757-899X/687/3/033004.
23. Tyukalov, Y.Y. Calculation of bending plates by finite element method in stresses. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018. 451(1). DOI:10.1088/1757-899X/451/1/012046.
24. Cannizzaro, F., Pantò, B., Caddemi, S., Calì, I. A Discrete Macro-Element Method (DMEM) for the nonlinear structural assessment of masonry arches. *Engineering Structures*. 2018. 168. Pp. 243–256. DOI:10.1016/j.engstruct.2018.04.006.
25. Mahmoudi Moazam, A., Hasani, N., Yazdani, M. Incremental dynamic analysis of small to medium spans plain concrete arch bridges. *Engineering Failure Analysis*, 2018. 91. Pp. 12–27. DOI:10.1016/j.engfailanal.2018.04.027.
26. Pulatsu, B., Erdogmus, E., Bretas, E. M. Parametric Study on Masonry Arches Using 2D Discrete-Element Modeling. *Journal of Architectural Engineering*. 2018. 24(2). 04018005. DOI:10.1061/(asce)ae.1943-5568.0000305.
27. Zhang, Y., Tubaldi, E., Macorini, L., Izzuddin, B. A. Mesoscale partitioned modelling of masonry bridges allowing for arch-backfill interaction. *Construction and Building Materials*. 2018. 173. Pp. 820–842. DOI:10.1016/j.conbuildmat.2018.03.272.
28. Fusade, L., Orr, S. A., Wood, C., O'Dowd, M., Viles, H. (2019). Drying response of lime-mortar joints in granite masonry after an intense rainfall and after repointing. *Heritage Science*. 2019. 7(1). DOI:10.1186/s40494-019-0277-7.
29. Leontari, A., Apostolou, M. Stability and rocking response of non-uniform masonry arches: The 'part-elliptical' profile. *Engineering Structures*. 2021. 228. DOI:10.1016/j.engstruct.2020.111519.
30. Grosman, S., Bilbao, A. B., Macorini, L., Izzuddin, B. A. Numerical modelling of three-dimensional masonry arch bridge structures. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Engineering and Computational Mechanics*. 2021. 174(2). Pp. 96–113. DOI:10.1680/jenm.20.00028.