Research Article
ISSN 2304-6295
Received: November 01, 2022 Accepted: November 07, 2022 Published: November 11, 2022

Conjugate Approximation of Thin-Walled Rods Internal Forces Functions in Bending Torsion

Rybakov, Vladimir Alexandrovich[1*]

[1] Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation; fishermanoff@mail.ru
Correspondence:* email fishermanoff@mail.ru; contact phone +79118297767

Keywords:

Lightweight gauge steel structures, Bending torsion, Thin-walled structures, Thin-walled rods, Bimoment, Warping, Moment of warping torsion, Moment of pure torsion

Abstract:

The goal of the work is to increase the convergence rate of bending torsion internal forces (bimoment, moment of warping torsion, moment of pure torsion) in finite elements in the calculation of thin-walled rods using V.I. Slivker's semi-shear theory. **The object of research** is the finite elements (FE) proposed earlier by the author of the article as part of the theory of V.I.Sliver's semi-shear theory, which differs from other FE by the approximation method of unknown functions: 3-nodal finite element having 5 degrees of freedom with square-law approximation of torsional angle function and linear approximation of warping function and 3-nodal finite element having 6 degrees of freedom with square-law approximation of torsional angle and warping functions. **The subject of research** is the convergence of internal forces in thin-walled rods, determined using the conjugate approximation method. **Method of research is** mathematical modeling of parameters (stiffness matrix, load column) and determination of the unknowns of two systems equations: of the FE-method and of the conjugate approximation method. **Results**. The formulas of the conjugate approximations method of are proposed in 2 variants: linear and quadratic conjugate approximations. On particular cases of two-sided fixed and cantilever beams, it is shown that when calculating open-type profiles, an acceptable 5% engineering error is provided by a linear conjugate approximation of the bimoment. For closed profiles, due to the special pattern of the bimoment distribution near the fixed supports, the linear conjugate approximation cannot provide engineering accuracy: it is necessary to use the deviding of the rod into 32 finite elements or more and use the quadratic conjugate approximation to refine the bimoment values on fixed supports

1 Introduction/Введение

На рубеже XX-XXI веов в большинстве стран мира приобретают широкое применение в строительстве зданий промышленного и гражданского назначения легкие стальные тонкостенные конструкции (ЛСТК), имеющие ряд технологических и эксплуатационных достоинств (легкость, быстровозводимость и т.д.) [1],[2] и др.

Методы проектирования и расчета стальных конструкций прокатных профилей неприменимы к ЛСТК ввиду специфических конструктивных особенностей.

Для расчета ЛСТК и их отдльных элементов существует 2 вида методов расчета: основанные на оболочечном моделировании и на стержневом.

Первая группа методов связана с моделированием элементов ЛСТК методом конечных элементов с помощью пластин, оболочек и иногда трехмерных тел в широко распространенных программных комплексах SCAD, Lira, SOFiSTiK и т.д.[3]–[7] и др. Эти методы достаточно точны, но при этом трудоемки с точки зрения комплексного расчета конструкции и, как правило используются для моделирования «проблемных» узловых соединений.

Вторая группа методов связана с использованием тонкостенных стержней, связанных с введением дополнительной «седьмой» степени свободы и включает в себя большое количество разновидностей каканалитических, так и численных методов .

Об одном нюансе численного метода расчета напряженно-деформированного состояния тонкостенных стержней, основанного на полусдвиговой теории В.И.Сливкера [8], пойдет ресь в данной статье.

Подробный тематический обзор проведен ранее в [9], где подробно разобраны проблемы статики [5], [10]–[13], динамики и устойчивости [7], [14]–[17] данных конструкций. Однако многие другие задачи и проблемы, в том числе уже рассмотренные, требовали и продолжают нуждаться в более глубоком и детальном изучении.

Дополнительно отметим, что в инженерной практике бимомент является ключевой характеристикой, поскольку он напрямую влияет на нормальные напряжения. В СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции» [18], бимомент как силовой фактор фигурирует наравне с остальными силовыми факторами, о чем свидетельствует в данном СП формула (43) для поперечно-изгибаемых элементов при действии моментов в двух главных плоскостях и при наличии бимомента:

$$\frac{M_x}{I_{xn}R_y\gamma_c}y \pm \frac{M_y}{I_{yn}R_y\gamma_c}x \pm \frac{B_\omega}{I_{\omega n}R_y\gamma_c}\omega \le 1 \qquad (1)$$

Формулы СП 16.13330.2016 [18] под номерами (53) – прочность при изгибе в плоскости наибольшей жесткости и стесненном кручении симметричных двутавров; (70) – устойчивость при изгибе в двух главных плоскостях и наличии бимомента; (105) и (106) - прочность внецентренно сжатых внецентренно растянутых элементов, – по своей сути являются модификацией формулы (3), приведенной выше.

В нормах по проектированию ЛСТК – СП 260.13330.2016 «Конструкции стальные тонкостенные из холодногнутых оцинкованных профилей и гофрированных листов» [19], – в первой бимомент как силовой фактор в прямом виде не упоминается. Однако сказано, что при действии в сечении элемента крутящего момента или изгибно-крутящего бимомента и отсутствии надежного его раскрепления от кручения расчет поперечного сечения по прочности следует выполнять в соответствии с формулами (7.75) и (7.85):

$$\sigma_{tot,r} = \sigma_{N,r} + \sigma_{My,r} + \sigma_{Mx,r} + \sigma_{w,r} \qquad (2)$$

$$\tau_{tot,r} = \tau_{Qy,r} + \tau_{Qx,r} + \tau_{t,r} + \tau_{w,r} \qquad (3)$$

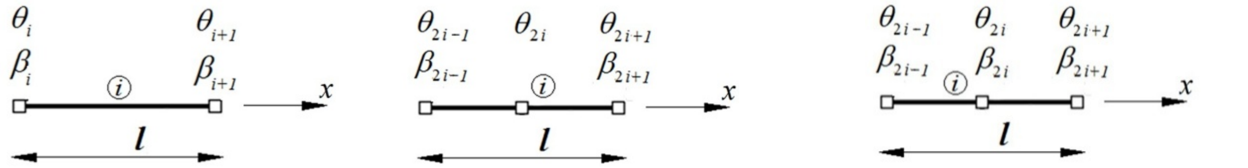
в которых $\sigma_{N,r}, \sigma_{My,r}, \sigma_{Mx,r}, \sigma_{w,r}$ – составляющие нормальных напряжений от продольной силы, изгибающих моментов в двух плоскостях и бимомента, соответственно; $\tau_{Qy,r}, \tau_{Qx,r}, \tau_{t,r}, \tau_{w,r}$ – составляющие касательных напряжений от двух продольных сил, момента чистого и стесненного кручения, соответственно.

При этом согласно теоретическим и экспериментальным исследованиям [20],[21],[22], в тонкостенных конструкциях, находящихся в условиях изгибного кручения, составляющая нормальных напряжений от бимомента может значительно превышать составляющую от изгибающего момента, а влияние касательных напряжений на напряженно-деформированное состояние мало по сравнению с влиянием нормальных напряжений.

Поэтому, с учетом того, что бимомент является производной некоторого порядка от функций перемещений, в данной статье рассмотрим различные способы аппроксимаций функций перемещений, влияющих на точность вычисления бимомента.

Ранее автором в [23] были построены и исследованы для профилей открытого типа в [24] типа и замкнутого типа в [25] 3 типа конечных элементов (рис. 1), соответствующих разным теориям стесненного кручения и количеством степеней свободы, зависящим от способа аппроксимации:

1. линейная аппроксимация функций кручения и депланации (рис. 1а);
2. квадратичная аппроксимация функции кручения и линейная аппроксимация функции депланации (рис. 1б);
3. квадратичная аппроксимация функций кручения и депланации (рис. 1в).



$$\theta(x)=h_1^{(i)}\theta_i+h_2\theta_{i+1}^{(i)}$$
$$\beta(x)=h_1^{(i)}\beta_i+h_2^{(i)}\beta_{i+1}$$
(а)

$$\theta(x)=h_3^{(i)}\theta_{2i-1}+h_4^{(i)}\theta_{2i}+h_5^{(i)}\theta_{2i+1}$$
$$\beta(x)=h_1^{(i)}\beta_{2i-1}+h_2^{(i)}\beta_{2i+1}$$
(б)

$$\theta(x)=h_3^{(i)}\theta_{2i-1}+h_4^{(i)}\theta_{2i}+h_5^{(i)}\theta_{2i+1}$$
$$\beta(x)=h_3^{(i)}\beta_{2i-1}+h_4^{(i)}\beta_{2i}+h_5^{(i)}\beta_{2i+1}$$
(в)

Рис. 1 - Конечные элементы по полусдвиговой теории: с четырьмя, с пятью и с шестью степенями свободы

Fig. 1 - Finite elements according to semi-shear theory: with four, five and six degrees of freedom

Предложенные матрицы жесткости являются универсальными в применении при расчетах методом конечных элементов как тонкостенных стержней открытого профиля (на основе теорий В.З. Власова [20] и В.И. Сливкера [8]), так и закрытого профиля (на основе теорий А.А. Уманского [26] и Пановко-Джанелидзе [27]), ввиду схожести соответствующих дифференциальных уравнений кручения и функционалов энергии деформации.

Одним из недостатков применения линейных интерполяционных полиномов является невозможность получить градиенты функции, отличные от постоянных на элементе. Градиент и любая связанная с ним величина получаются постоянными внутри элемента. Чтобы иметь более приемлемые значения узловых величин применяются различные методы усреднения. Можно, например, в качестве значения градиента в данном узле принять среднюю по двум соседним с этим узлом элементам эту величину, что является самым простым, и соответственно, самым приближенным способом.

Узловые значения усилий элемента (бимомент, секториальный крутящий момент и др.) можно также получить с помощью теории сопряженной аппроксимации [28],[29]. Этот способ дает значения статических силовых факторов в пределах элемента, согласованные с аппроксимирующими полиномами для функций перемещений.

Поэтому **целью** данной работы является реализация процедуры уточнения значений внутренних усилий стесненного кручения (бимомент, секториальный статический момент, момент чистого кручения) в конечных элементах при расчете тонкостенных стержней для увеличения скорости сходимости сетки сгущения заданных конечных элементов полусдвиговой теории В.И.Сливкера.

Объектом исследования являются тонкостенные конечные элементы с матрицами жесткости на оснвое линейных и квадратичных интерполяционных полиномов функций кручения и депланации.

Предметом исследования является сходимость внутренних силовых факторов (бимомент, моменты чистого и стесненного кручения) в тонкостенных стержнях, уточненные с помощью метода сопряженной аппроксимации.

2 Materials and Methods/ Материалы и методы

2.1. Conjugate Approximation with Square-law Approximation of Torsional Angle Function and Linear Approximation of Warping Function/ Сопряженная аппроксимация при линейной аппроксимации функции кручения и квадратичной аппроксимации функции депланации

Рассмотрим произвольную задачу с использованием конечных элементов на рис. 1,б.

Продемонмтрируем способ ухточнения внутренних усилий методом сопряженной аппроксимации на примере бимомента $B_{\omega i}$, который после решения системы разрешающих уравнений МКЭ, исходя из его определения [8] $B_\omega=-EI_\omega\beta^/$, окажется постоянной величиной в пределах конечного элемента и ступенчатой в пределах элемента конструкции.

Представим бимомент как линейную функцию в пределах одного конечного элемента (i):

$$B_\omega^{(i)}(x)=h_1^{(i)}B_{2i-1}+h_2^{(i)}B_{2i+1}, \tag{4}$$

где $h_1^{(i)}, h_2^{(i)}$ - линейные интерполяционные полиномы:

$$h_1^{(i)}(x) = -\frac{1}{l}x \ +1\,, h_2^{(i)}(x) = \frac{1}{l}x \tag{5}$$

Тогда узловые значения бимомента получаются решением системы уравнений:

$$[C]\cdot[B_\omega] = [R] \tag{6}$$

где $[B_\omega]$ - столбец узловых бимоментов:

$$[B_\omega] = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \dots \\ B_i \\ \dots \\ B_{n+1} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$[C]$ - матрица размерностью (*n+1*) x (*n+1*), определяемая как сумма матриц элементов вида:

$$[C^{(i)}] = \int_0^l [h^{(i)}]^T \cdot [h^{(i)}]dx \tag{8}$$

или

$$[C^{(i)}] = \begin{pmatrix} \frac{l}{3} & \frac{l}{6} \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $[R]$ - столбец, являющийся суммой поэлементных столбцов, определяемых равенством:

$$[R^{(i)}] = \int_0^l B_\omega^{(i)} \cdot [h^{(i)}]^T\, dx\,, \tag{10}$$

где $B_\omega^{(i)}$ - бимомент в пределах одного конечного элемента, являющийся постоянной величиной на элементе. Или, с учетом постоянства исходного бимомента в пределах конечного элемента:

$$[R^{(i)}] = B_\omega^{(i)} \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

Для окончательного определения узловых бимоментов распишем систему уравнений (6)

$$\begin{pmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}^{(1)} & C_{22}^{(1)}+C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(1)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{21}^{(2)} & C_{22}^{(1)}+C_{11}^{(2)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{22}^{(i-1)}+C_{11}^{(i)} & C_{12}^{(i)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_{12}^{(n1)} & C_{22}^{(n1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \dots \\ B_i \\ \dots \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)}+R_1^{(2)} \\ R_2^{(2)}+R_1^{(3)} \\ \dots \\ R_2^{(i-1)}+R_1^{(i)} \\ \dots \\ R_2^{(n)} \end{pmatrix} \tag{12}$$

и определим узловые неизвестные (12).

Столбец узловых моментов чистого кручения H_i , определяемого в полусдвиговой теории [8] как $H = GI_d\theta^/$ вычисляется аналогичным образом.

2.2. Linear Conjugate Approximation of Linearly Distributed Internal Forces on the Finite Element with Square-law Approximation of Torsional Angle and Warping Functions/ Линейная сопряженная аппроксимация линейно распределенных на конечном элементе усилий при квадратичной аппроксимации функций кручения и депланации

Рассмотрим произвольную задачу с использованием конечных элементов на рис. 1,в.

Продемонмтрируем способ учточнения внутренних усилий методом сопряженной аппроксимации на примере бимомента $B_{\omega i}$, который после решения системы разрешающих уравнений МКЭ, исходя из его определения [8] $B_{\omega} = -EI_{\omega}\beta^{/}$, окажется линейной функцией в пределах конечного элемента и линейно-ступенчатой в пределах элемента конструкции.

Так же, как и при сопряжении аппроксимаций внутренних усилий при линейной аппроксимации функции депланации и квадратичной аппроксимации функции кручения, будем бимомент представлять как линейную функцию в пределах одного конечного элемента (i) по формуле (5).

Матрица $[C]$ будет оставаться в обоих случаях аппроксимации одинаковой и вычисляться по формулам (8)-(9).

Столбец $[R]$ будет определяться также по формулам (10)-(11), но в отличие от предыдущего способа аппроксимации бимомент $B_{\omega}^{(i)}$ будет являться не постоянной, а переменной величиной в пределах одного конечного элемента.

На основании формул, вытекающих из определения бимомента в полусдвиговой теории $B_{\omega} = -EI_{\omega}\beta^{/}$ и квадратичных интерплояционных полиномов

$$B_{\omega}^{(i)}(x) = \frac{dh_3^{(i)}}{dx}\beta_{2i-1} + \frac{dh_4^{(i)}}{dx}\beta_{2i} + \frac{dh_5^{(i)}}{dx}\beta_{2i+1}, \tag{13}$$

где $h_3^{(i)}, h_4^{(i)}, h_5^{(i)}$ - квадратичные интерполяционные полиномы:

$$h_3^{(i)}(x) = \frac{2}{l_i^2}x^2 - \frac{3}{l_i}x + 1;\, h_4^{(i)}(x) = -\frac{4}{l_i^2}x^2 + \frac{4}{l_i}x;\, h_5^{(i)}(x) = \frac{2}{l_i^2}x^2 - \frac{1}{l_i}x \tag{13.1}$$

$$B_{\omega}^{(i)}(x) = -EI_{\omega}((\frac{4}{l^2}x - \frac{3}{l})\beta_{2i-1} + (-\frac{8}{l^2}x + \frac{4}{l})\beta_{2i} + (\frac{4}{l^2}x - \frac{1}{l})\beta_{2i+1}), \tag{14}$$

и допущении о линейном распределении бимомента полученный после решения основной системы уравнений бимомент в пределах одного конечного элемента можно выразить как:

$$B_{\omega}^{(i)}(x) = B_{\omega(2i-1)}^{(i)} + \frac{B_{\omega(2i+1)}^{(i)} - B_{\omega(2i-1)}^{(i)}}{l} \cdot x \tag{15}$$

Тогда столбец $[R]$ системы вычисляется путем интегрирования:

$$[R^{(i)}] = \begin{bmatrix} \int_0^l (B_{\omega(2i-1)}^{(i)} + \frac{B_{\omega(2i+1)}^{(i)} - B_{\omega(2i-1)}^{(i)}}{l} \cdot x)(-\frac{1}{l}x \quad +1)dx \\ \int_0^l (B_{\omega(2i-1)}^{(i)} + \frac{B_{\omega(2i+1)}^{(i)} - B_{\omega(2i-1)}^{(i)}}{l} \cdot x)\frac{1}{l}xdx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \cdot (\frac{B_{\omega(2i-1)}^{(i)}}{3} + \frac{B_{\omega(2i+1)}^{(i)}}{6}) \\ l \cdot (\frac{B_{\omega(2i-1)}^{(i)}}{6} + \frac{B_{\omega(2i+1)}^{(i)}}{3}) \end{bmatrix}, \tag{16}$$

Далее, поэлементно сформировав из столбцов (16) общий столбец $[R]$ для всей системы, подставляем его в систему (6), решаем ее, и, таким образом, определим узловые неизвестные B_i (7).

Столбцы узловых моментов чистого кручения H_i определяются аналогичным образом.

2.3. Linear Conjugate Approximation of Square-law Distributed Internal Forces on the Finite Element with Square-law Approximation of Torsional Angle and Warping Functions/Линейная сопряженная аппроксимация квадратично распределенных на конечном элементе усилий при квадратичной аппроксимации функций кручения и депланации

Данный вид аппроксимации актуален для поиска эпюры узловых секториальных крутящих моментов $M_{\omega i}$, который после решения системы разрешающих уравнений МКЭ, исходя из его определения [8] $M_{\omega} = \dfrac{GI_d}{\psi - 1}(\theta' - \beta)$, окажется линейной функцией при решениии задачи п.2.2.

На основании формул (17)-(19) секториальный крутящий момент в пределах конечного элемента можно выразить как (20)

В начале конечного элемента (*2i-1*-тый узел, при *x=0*):

$$M_{2i-1} = \frac{GI_d}{\psi - 1}\left(-\frac{3}{l}\theta_{2i-1} + \frac{4}{l}\theta_{2i} - \frac{1}{l}\theta_{2i+1} - \beta_{2i-1}\right). \qquad (17)$$

В конце конечного элемента (*2i+1*-ый узел, при *x=l*):

$$M_{2i+1} = \frac{GI_d}{\psi - 1}\left(\frac{1}{l}\theta_{2i-1} - \frac{4}{l}\theta_{2i} + \frac{3}{l}\theta_{2i+1} - \beta_{2i+1}\right). \qquad (18)$$

В середине конечного элемента (*2i*-тый узел, при *x=l/2*):

$$M_{2i} = \frac{GI_d}{\psi - 1}\left(-\frac{1}{l}\theta_{2i-1} + \frac{1}{l}\theta_{2i+1} - \frac{1}{2}(\beta_{2i-1} + \beta_{2i+1})\right). \qquad (19)$$

Тогда

$$M_{\omega}^{(i)}(x) = \frac{2M_{2i-1}^{(i)} + 2M_{2i+1}^{(i)} - 4M_{2i}^{(i)}}{l^2}\cdot x^2 + \frac{4M_{2i+1}^{(i)} - 3M_{2i-1}^{(i)} - M_{2i}^{(i)}}{l}\cdot x + M_{2i-1}^{(i)} \qquad (20)$$

Матрица $[C]$ будет также определяться по формулам (8,9 и 12).

Отличие будет состоять в столбцах $[R^{(i)}]$. Интегрируя по (10), получим:

$$[R^{(i)}] = \begin{bmatrix} \int\limits_0^l \left(\dfrac{2M_{2i-1}^{(i)} + 2M_{2i+1}^{(i)} - 4M_{2i}^{(i)}}{l^2}\cdot x^2 + \dfrac{4M_{2i+1}^{(i)} - 3M_{2i-1}^{(i)} - M_{2i}^{(i)}}{l}\cdot x + M_{2i-1}^{(i)}\right)\left(-\dfrac{1}{l}x + 1\right)dx \\ \int\limits_0^l \left(\dfrac{2M_{2i-1}^{(i)} + 2M_{2i+1}^{(i)} - 4M_{2i}^{(i)}}{l^2}\cdot x^2 + \dfrac{4M_{2i+1}^{(i)} - 3M_{2i-1}^{(i)} - M_{2i}^{(i)}}{l}\cdot x + M_{2i-1}^{(i)}\right)\cdot\dfrac{1}{l}xdx \end{bmatrix} = \qquad (21)$$

$$= \begin{bmatrix} l\cdot\left(\dfrac{M_{2i-1}^{(i)}}{6} + \dfrac{M_{2i}^{(i)}}{3}\right) \\ l\cdot\left(\dfrac{M_{2i+1}^{(i)}}{6} + \dfrac{M_{2i}^{(i)}}{3}\right) \end{bmatrix},$$

Поэлементно сформировав столбец $[R]$ и решив систему уравнений, получим искомые узловые неизвестные $M_{\omega i}$.

2.4. Square-law Conjugate Approximation of Linear Distributed Internal Forces on the Finite Element with Square-law Approximation of Torsional Angle and Warping Functions/ Квадратичная сопряженная аппроксимация линейно распределенных на конечном элементе усилий при квадратичной аппроксимации функций кручения и депланации

Для более точного определения узловых значений на опорах (т.е. значений в точках не лежащих между двумя другими значениям и) в некоторых задачах необходим более точный способ аппроксимации внутренних усилий. Рассмотрим это на примере определения бимомента при квадратичной аппроксимации функции депланации (рис. 1.в)

Представим бимомент как квадратичную функцию в пределах одного конечного элемента (i):

$$B_{\omega}^{(i)}(x) = h_3^{(i)} B_{2i-1} + h_4^{(i)} B_{2i} + h_5^{(i)} B_{2i+1}, \tag{22}$$

где - $h_3^{(i)}, h_4^{(i)}, h_5^{(i)}$ квадратичные полиномы (13.1).

Матрица $[C]$ будет иметь размерность *(2n+1)* x *(2n+1)* и определяется путем интегрирования произведений полиномов по формуле (8) и поэлементного суммирования:

$$[C^{(i)}] = \begin{pmatrix} \frac{2l}{15} & \frac{l}{15} & -\frac{l}{30} \\ \frac{l}{15} & \frac{8l}{15} & \frac{l}{15} \\ -\frac{l}{30} & \frac{l}{15} & \frac{2l}{15} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

Приняв во внимание формулу (22), и проинтегрировав по формуле (10), получим

$$[R^{(i)}] = \begin{bmatrix} \int_0^l (B_{\omega(2i-1)}^{(i)} + \frac{B_{\omega(2i+1)}^{(i)} - B_{\omega(2i-1)}^{(i)}}{l} \cdot x)(\frac{2}{l_i^2}x^2 - \frac{3}{l_i}x + 1)dx \\ \int_0^l (B_{\omega(2i-1)}^{(i)} + \frac{B_{\omega(2i+1)}^{(i)} - B_{\omega(2i-1)}^{(i)}}{l} \cdot x)(-\frac{4}{l_i^2}x^2 + \frac{4}{l_i}x)dx \\ \int_0^l (B_{\omega(2i-1)}^{(i)} + \frac{B_{\omega(2i+1)}^{(i)} - B_{\omega(2i-1)}^{(i)}}{l} \cdot x)(\frac{2}{l_i^2}x^2 - \frac{1}{l_i}x)dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \cdot \frac{B_{\omega(2i-1)}^{(i)}}{6} \\ l \cdot (\frac{B_{\omega(2i-1)}^{(i)}}{3} + \frac{B_{\omega(2i)}^{(i)}}{3}) \\ l \cdot \frac{B_{\omega(2i+1)}^{(i)}}{6} \end{bmatrix}, \tag{24}$$

Далее, решая систему уравнений (12), получим узловые неизвестные усилий.

3 Results and Discussion/Результаты и обсуждение

Рассмотрим примеры задачи о поиске статических силовых факторов с помощью сопряженной аппроксимации при стесненном кручении: бимомента, секториального крутящего момента и момента чистого кручения, вычисленных по полусдвиговой теории В.И. Сливкера

Пример 1. Определение внутренних усилий в жестко защемленной с двух сторон балке с помощью конечных элементов с линейной аппроксимации функции кручения и квадратичной аппроксимации функции депланации (рис. 1,б) при следующих параметрах:

- тонкостенный профиль ПН 150-1,5 по [30];
- равномерно распределенная нагрузка q = 10Н//м;
- длина балки l =3м.
- эксцентриситет приложения поперечной нагрузки α_z =3,35 см;
- секториальный момент инерции I_ω =341,41 см^6;
- момент инерции при свободном кручении $\mathrm{I_t}$ =0,027956 см^4.

Таблица 1. Результаты сопряженной аппроксимации функции бимомента
Table 1. Results of the conjugate approximation of the bimoment function

№ п/п	Кол-во КЭ	Размер КЭ, см	Значения B_ω,10^{-6} кН*м^2 при x, см									
			$x=0$ (центр)		$x=75$			$x=150$ (центр)			x=225	x=300
			МКЭ	сопряж.	МКЭ		сопряж.	МКЭ		сопряж.		
			$B_\omega^{справа}$	B_ω	$B_\omega^{слева}$	$B_\omega^{справа}$	B_ω	$B_\omega^{слева}$	$B_\omega^{справа}$	B_ω	симметрично	симметрично
1	1	300		-	-	-	-	-	-	-		
2	2	150	0	-	-	-	-	0	0	-		
3	4	75	-88,990	-133,485	-88,990	88,990	0	88,990	88,990	133,485		
4	8	37,5	-155,791	-186,604	-20,364	66,762	34,798	109,393	109,393	117,008		
5	16	18,75	-195,588	-213,167	7,2060	50,5421	30,923	114,391	114,391	116,147		
6	32	9,375	-217,241	226,599	19,465	41,052	30,762	115,634	115,634	116,072		
Аналитич.реш			-240,134		30,75506			116,047				

Результаты сопряженной аппроксимации для функций бимомента и момента чистого кручения получены по формулам, полученным в п.2.1, для функции момента стестенного кручения – по 2.3., и представлены в табл.1-3 и рис. 2-4.

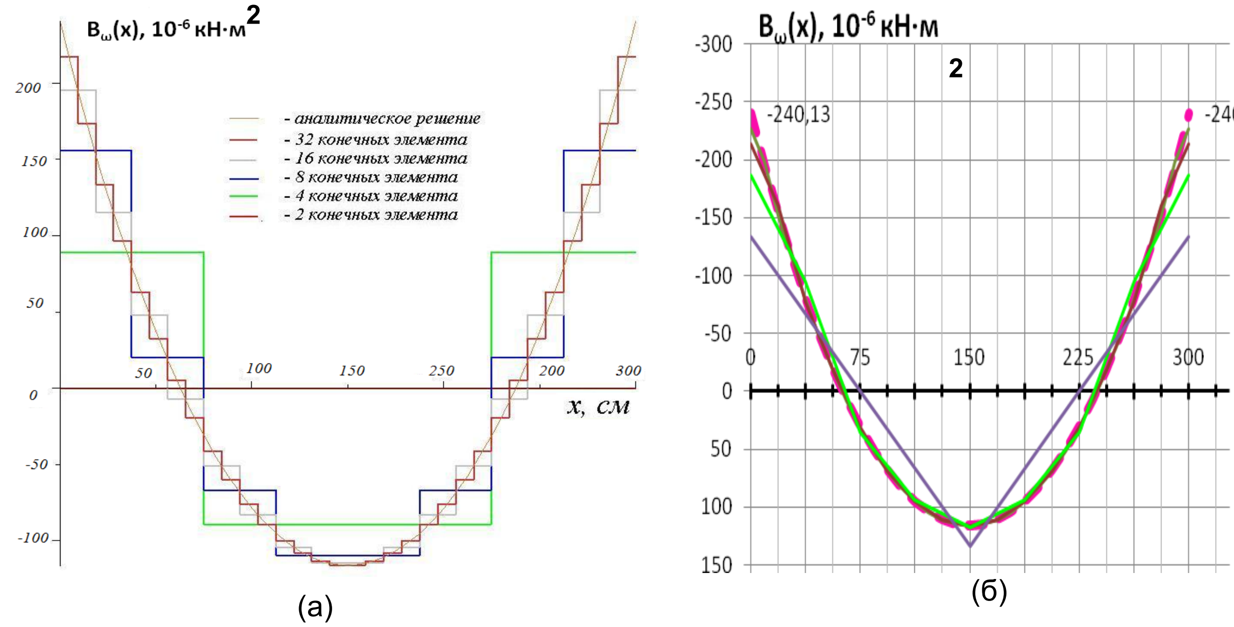


Рис. 2 - График распределения бимомента по полусдвиговой теории: (а) – после решения системы уравнений МКЭ; (б) – после сопряженной аппроксимации

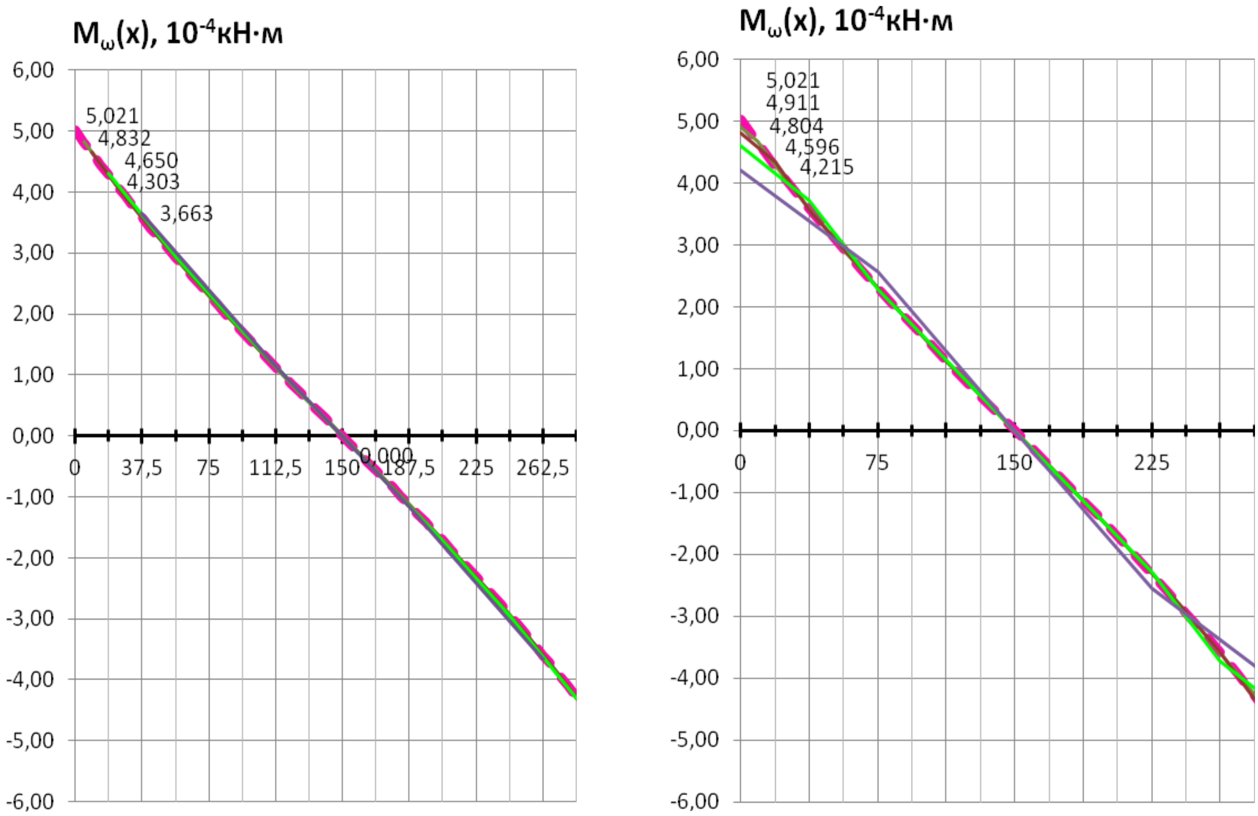
Fig. 2 - Bimoment diagram according to semi-shear theory: (а,в,д) – solving the system of FEM equations; (б,г,е) – after conjugate approximation

Таблица 2. Результаты сопряженной аппроксимации функции секториального крутящего момента

Table 2. Results of the conjugate approximation of the warping torsion moment function

№ п/п	Кол-во КЭ	Размер КЭ, см	Значения M_ω ,кгс*см при x, см								x=225	x=300
			$x=0$		$x=75$			$x=150$ (центр)				
			МКЭ	сопряж.	МКЭ		сопряж.	МКЭ		сопряж.		
			$M_\omega^{справа}$	M_ω	$M_\omega^{слева}$	$M_\omega^{справа}$	M_ω	$M_\omega^{слева}$	$M_\omega^{справа}$	M_ω	кососимметрично	кососимметрично
1	1	300	-	-	-	-	-	-	-	-		
2	2	150	-	-	-	-	-	-	-	-		
3	4	75	3,66253	4,21515	3,66253	1,15223	2,55728	1,15225	-1,15225	$3*10^{-14}$		
4	8	37,5	4,30293	4,59599	2,94591	1,71759	2,28327	0,564314	-0,564314	10^{-13}		
5	16	18,75	4,65026	4,80385	2,61878	2,00791	2,30773	0,280712	-0,280712	10^{-12}		
6	32	9,375	4,8323	4,9111	2,46129	2,15626	2,30802	0,14176	-0,140176	$6,5*10^{-13}$		
Аналитич.реш			5,023		2,30825			0				

Как видно из табл. 1-2, приемлемая 5-процентная прогрешность в результатах наблюдается при использовании метода сопряженных аппроксимаций при разбиении на 8 конечных элементов, причем для получения решения на границах (опорная зона) необходимо применение сопряженной аппроксимации при разбиении не менее, чем на 32 элементов при «смешанной» аппроксимации.



(а) (б)

Рис. 3 - График распределения секториального крутящего момента по полусдвиговой теории: (а) – после решения системы уравнений МКЭ; (б) – после сопряженной аппроксимации
Fig. 3 - Pure torsion moment diagram according to semi-shear theory: (а,в,д) – solving the system of FEM equations; (б,г,е) – after conjugate approximation

Таблица 3. Результаты сопряженной аппроксимации функции момента чистого кручения
Table 3. Results of the conjugate approximation of the pure torsion moment function

№ п/п	Кол-во КЭ	Размер КЭ, см	Значения H ,кгс*см при x, см									
			$x=0$		$x=75$			$x=150$ (центр)			x=225	x=300
			МКЭ	сопряж.	МКЭ		сопряж.	МКЭ		сопряж.		
			$H^{справа}$	H	$H^{слева}$	$H^{справа}$	H	$H^{слева}$	$H^{справа}$	H		
1	1	300	-	-	-	-	-	-	-	-	кососимметрично	кососимметрично
2	2	150	-	-	-	-	-	-	-	-		
3	4	75	0,104724	0,09028	0,10472	0,10353	0,133617	0,103525	-0,103525	$1{,}2*10^{-16}$		
4	8	37,5	0,092192	0,06453	0,19346	0,16603	0,202535	0,063561	-0,063561	$5{,}8*10^{-16}$		
5	16	18,75	0,058803	0,0379	0,20666	0,18966	0,202543	0,033226	-0,033226	$2{,}7*10^{-14}$		
6	32	9,375	0,033731	0,02127	0,20718	0,19827	0,203772	0,016793	-0,016793	$2{,}9*10^{-14}$		
Аналитич.реш			0		0,203148			0				

Из рис.2-4 и табл 1-3 видно, что для инженерных расчетов применение сопряженной аппроксимации для конечного элемента со «смешанной» аппроксимацией (линейная аппроксиммация функции депланации и квадратичная аппроксимация функции гла закручивания) имеет смысл только для бимомента – главным образом, для опорных сечений, где по результатам решения системы уравнений МКЭ не удается эффективно определить значение бимомента, влияющего на нормальные напряжения, а также для пролетных сечений.

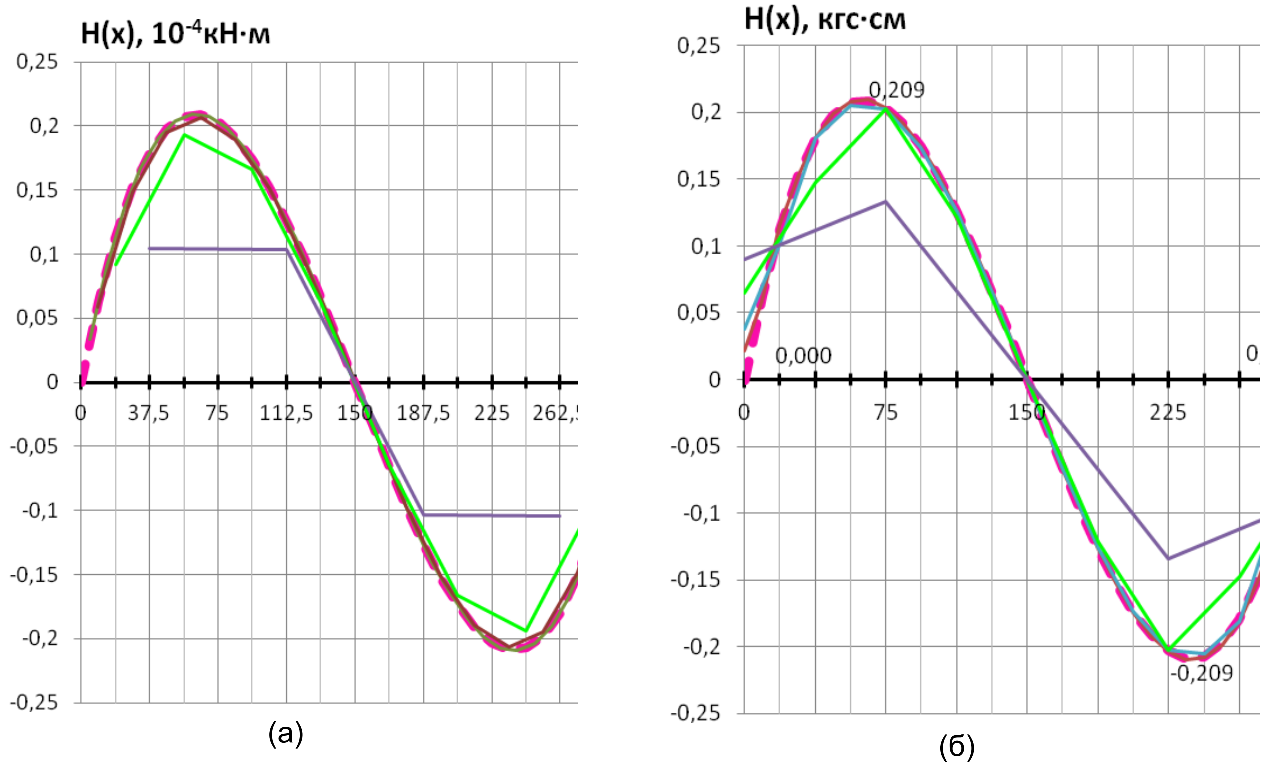


Рис. 4 - График распределения момента чистого кручения по полусдвиговой теории: (а) – после решения системы уравнений МКЭ; (б) – после сопряженной аппроксимации
Fig. 4 - Warping torsion moment diagram according to semi-shear theory: (а,в,д) – solving the system of FEM equations; (б,г,е) – after conjugate approximation

Пример 2. Определение внутренних усилий в жестко защемленной с двух сторон балке с помощью конечных элементов с квадратичной аппроксимацией функций кручения и депланации (рис. 1,в) при параметрах, полностью идентичных примеру 1.

Результаты расчета представлены на рис.5.

Таблица 4. Результаты сопряженной аппроксимации функции бимомента
Table 4. Results of the conjugate approximation of the bimoment function

№ п/п	Кол-во КЭ	Размер КЭ, см	Значения B_ω,кгс*см² при x, см									
			$x=0$ (центр)		$x=75$			$x=150$ (центр)			x=225	x=300
			МКЭ	сопряж.	МКЭ		сопряж.	МКЭ		сопряж.		
			$B_\omega^{справа}$	B_ω	$B_\omega^{слева}$	$B_\omega^{справа}$	B_ω	$B_\omega^{слева}$	$B_\omega^{справа}$	B_ω	симметрично	симметрично
1	1	300		-	-	-	-	-	-	-		
2	2	150	7,4484	7,448	-	-	-	-7,44835	-7,44835	-7,448		
3	4	75	108,245	146,26	-69,386	82,702	6,6581	-94,929	-94,929	-132,951		
4	8	37,5	187,629	206,114	1,605	53,8756	34,699	-113,451	-113,451	-118,019		
5	16	18,75	227,073	231,884	25,001	36,862	31,492	-116,229	-116,229	-116,710		
Аналитич.реш			-240,134		30,75506			116,047				

Пример 3. Определение внутренних усилий в консольной балке с помощью конечных элементов с квадратичной аппроксимацией функций кручения и депланации (рис. 1,в) при параметрах балки и нагрузки, полностью идентичных примеру 1.

Результаты расчета представлены на рис.6

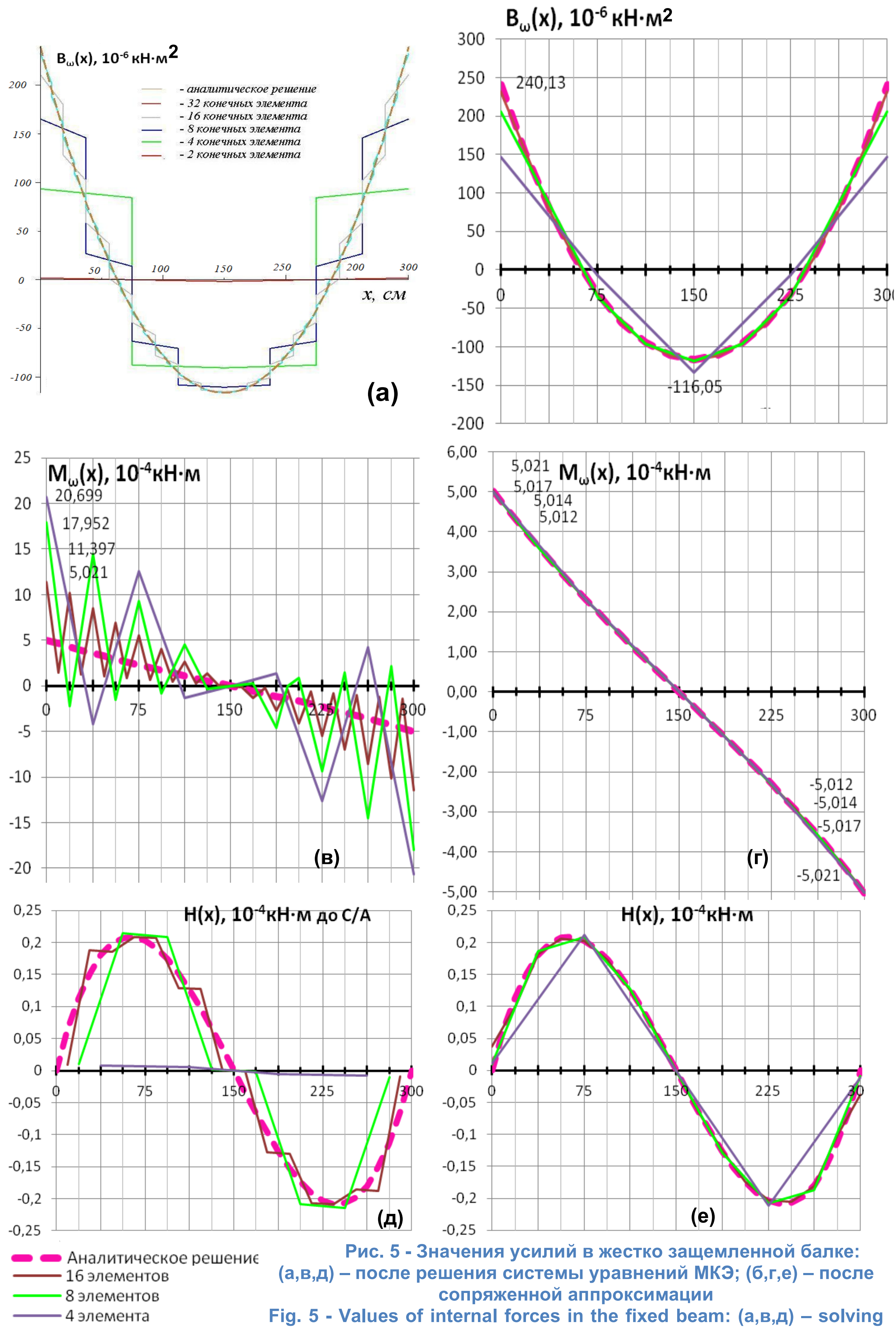


Рис. 5 - Значения усилий в жестко защемленной балке: (а,в,д) – после решения системы уравнений МКЭ; (б,г,е) – после сопряженной аппроксимации

Fig. 5 - Values of internal forces in the fixed beam: (а,в,д) – solving the system of FEM equations; (б,г,е) – after conjugate approximation

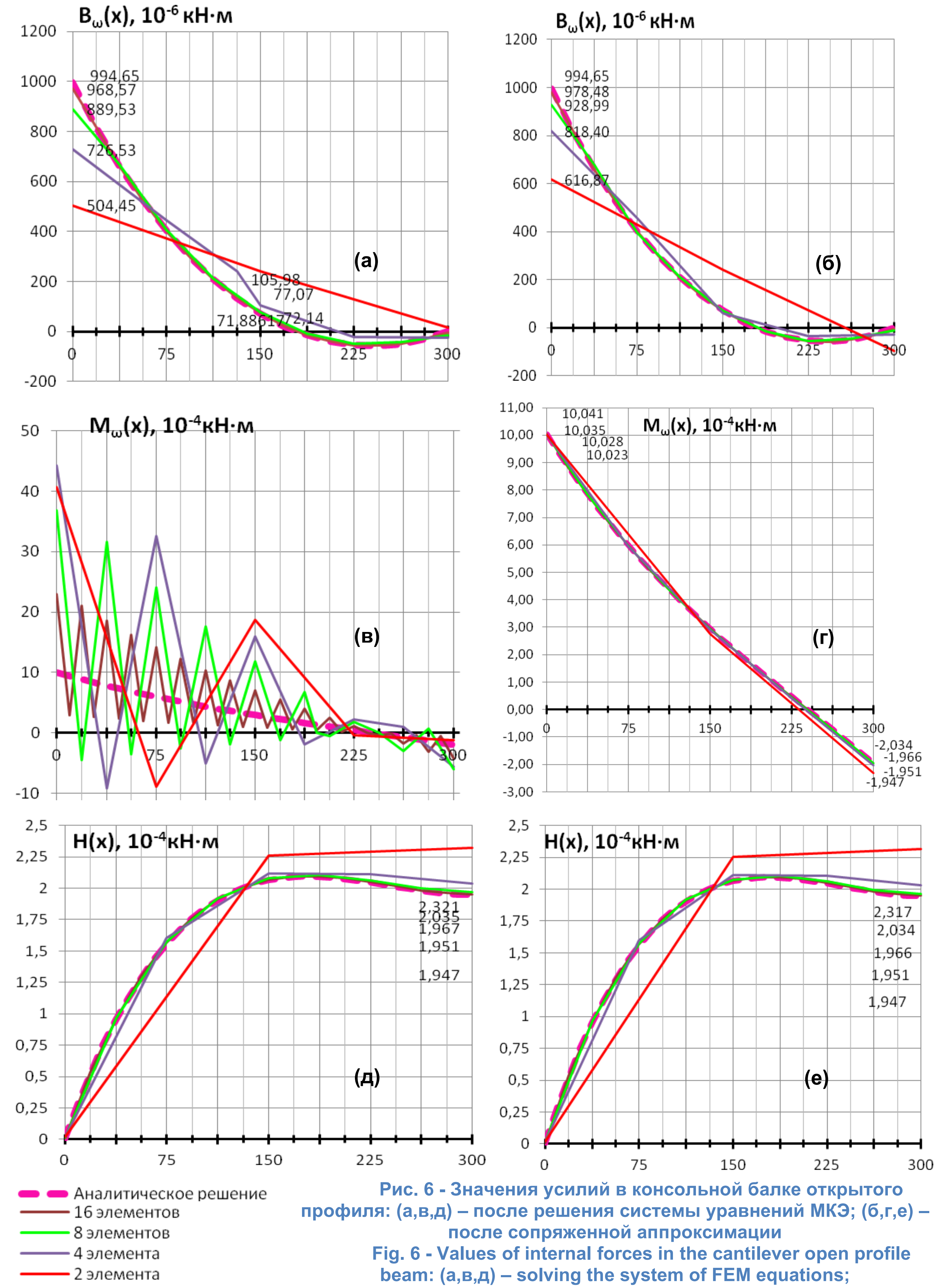


Рис. 6 - Значения усилий в консольной балке открытого профиля: (а,в,д) – после решения системы уравнений МКЭ; (б,г,е) – после сопряженной аппроксимации

Fig. 6 - Values of internal forces in the cantilever open profile beam: (а,в,д) – solving the system of FEM equations; (б,г,е) – after conjugate approximation

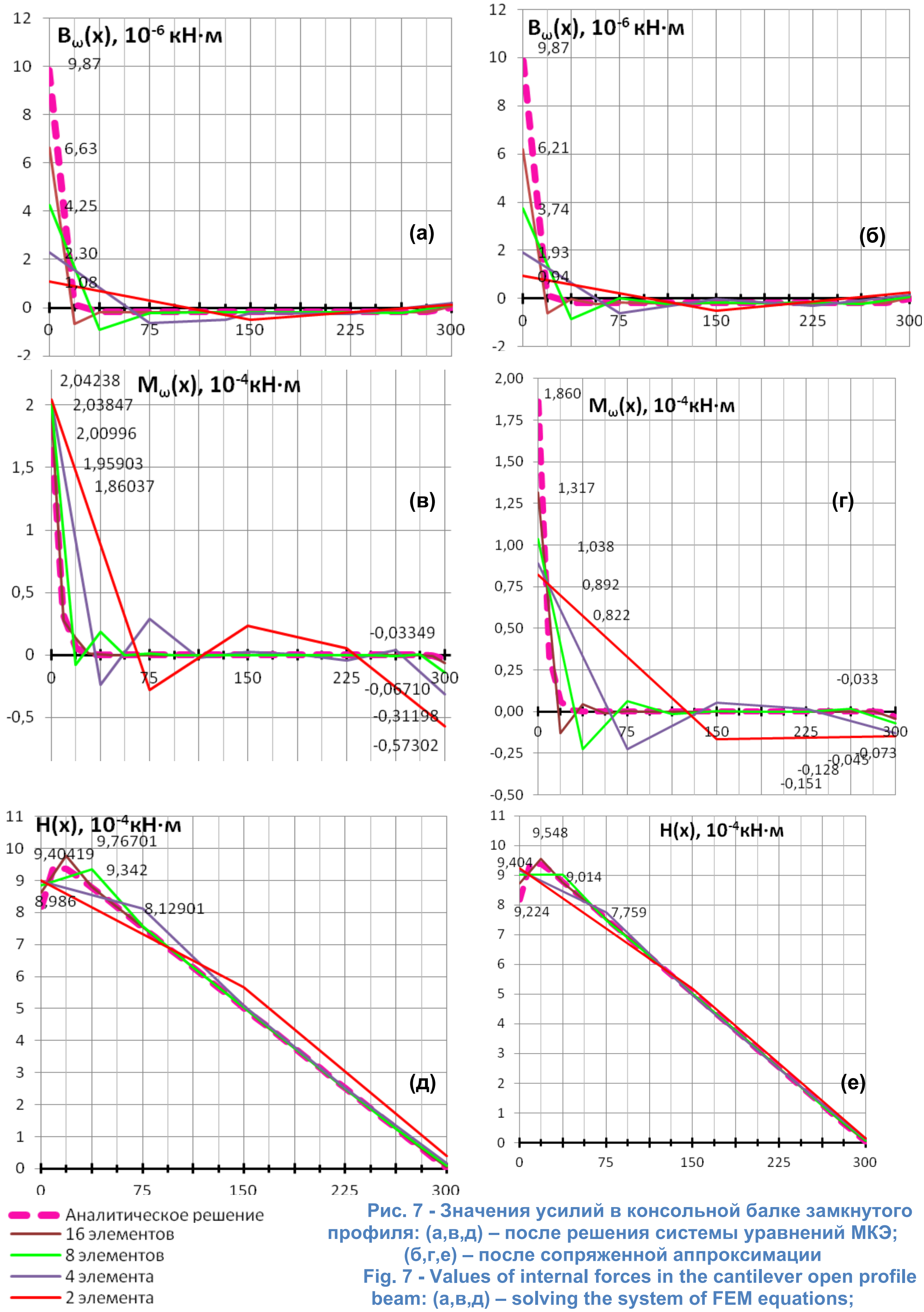


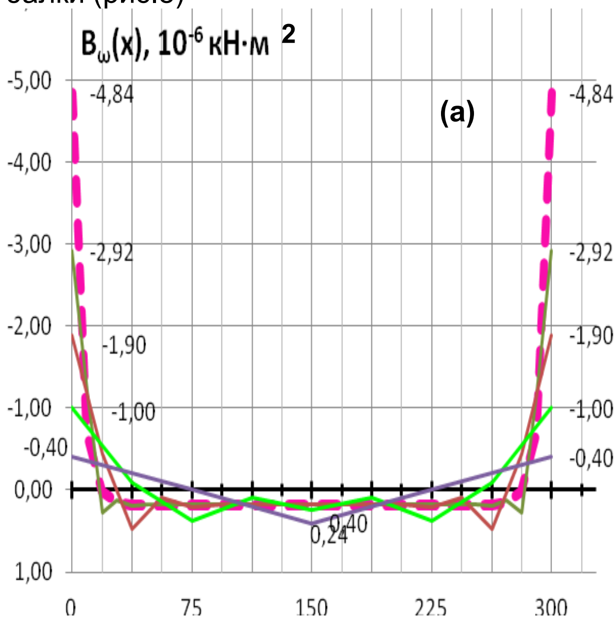
Рис. 7 - Значения усилий в консольной балке замкнутого профиля: (а,в,д) – после решения системы уравнений МКЭ; (б,г,е) – после сопряженной аппроксимации

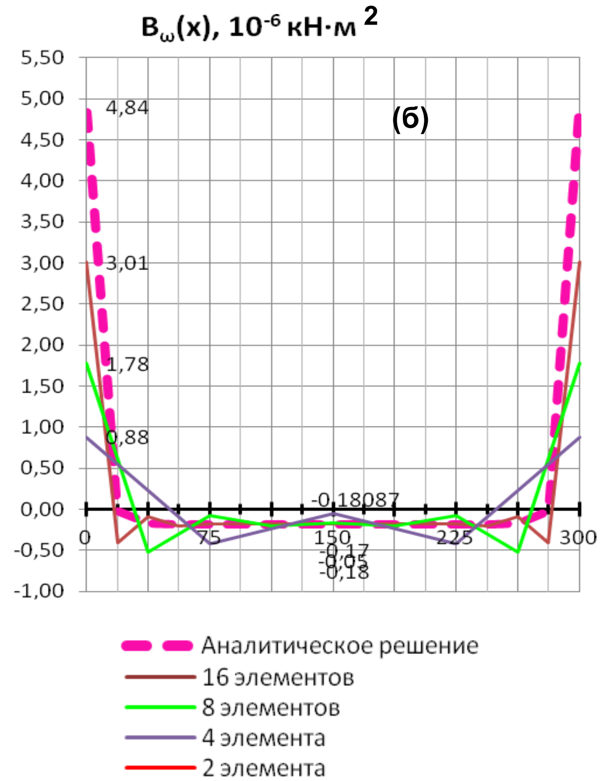
Fig. 7 - Values of internal forces in the cantilever open profile beam: (а,в,д) – solving the system of FEM equations; (б,г,е) – after conjugate approximation

Пример 4. Определение внутренних усилий в консольной балке с помощью конечных элементов с квадратичной аппроксимацией функций кручения и депланации (рис. 1,в) при параметрах:
- замкнутый прямоугольный профиль 150х50х1,5 (мм)
- момент инерции при свободном кручении I_t=84,375 см^4
- секториальный момент инерции I_w=175,78125 см^6
- параметр влияния формы сечения ψ=5,4
- равномерно распределенная нагрузка q = 10Н//м;
- длина балки l =3м.
- эксцентриситет приложения поперечной нагрузки α_z =3,35 см;

Результаты расчета представлены на рис.7

Пример 5. Определение внутренних усилий в консольной балке с помощью конечных элементов с квадратичной аппроксимацией функций кручения и депланации (рис. 1,в) при параметрах примера 4, но с помощью применения квадратичной сопряженной аппроксимации на примере тестовой задачи, требующей, как показали результаты в предыдущих разделах, наиболее тщательного поиска решений – задаче кручения жестко защемленной с двух сторон балки (рис.8)





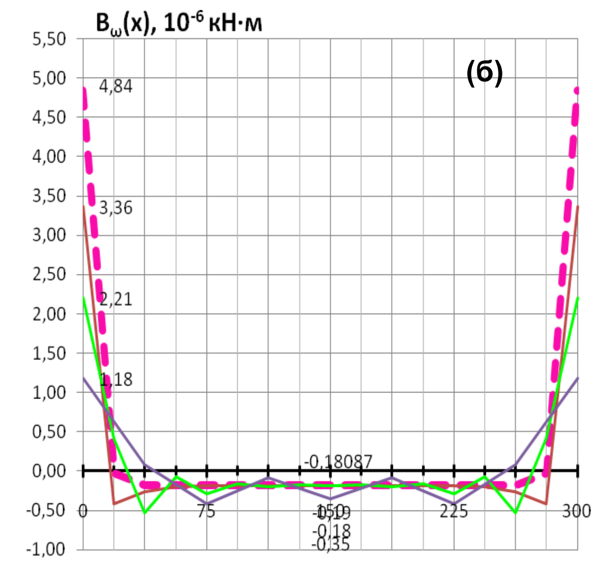


Рис. 8 - Графики распределения бимомента в прямоугольном профиле после сопряженной аппроксимации: (а) при «смешанной» аппроксимации функций перемещений (б) – при квадратичной аппроксимации (бимомент-линейная функция); (в) – то же (бимомент – квадратичная функция)

Fig. 8 – Bimoment giagram in a rectangular profile after conjugate approximation: (a) - with “mixed” approximation of displacement functions (b) with square-law approximation (bimomentum is linear function); (c) - the same (bimoment is a square-law function)

Как видно из рис.7(а), графики бимоментов имеют несколько «вытянутый» характер, сопровождающийся высоким значением производной на границах. Данное обстоятельство свидетельствует о необходимости сопряженной аппроксимации функции бимомента с помощью нелинейной (например, квадратичной) функции – рис. 8(в). и увеличении шага сгущения сетки до 32 конечных элементов.

4 Conclusions/Заключение

В данной статье с целью увеличения скорости сходимости сетки сгущения заданных конечных элементов полусдвиговой теории В.И.Сливкера для расчета тонкостенных стержней, моделирующих элементы легких стальных тонкостенных конструкций, была разработана и реализована для конечных элементов в рамках данной теории процедура уточнения значений внутренних силовых факторов (бимомент, секториальный статический момент, момент чистого кручения) по методу сопряженных аппроксимаций:

1. Получены формулы метода сопряженных аппроксимаций для уточнения значений следующих силовых факторов: бимомент, моменты чистого и стесненного кручения для конечных элементов со смешанной аппроксимацией функций перемещений (линейная аппроксимация функции депланации и квадратичная аппроксимация функции угла закручивания) и конечных элементов с квадратичной аппроксимацией функций угла закручивания и депланации; рассмотрены 2 варианта уточнения:
   - линейная сопряженная аппроксимация
   - квадратичная сопряженннная аппроксимация
2. На конкретных примерах защемленной с двух сторон и консольной балок показано, что при расчете профилей открытого типа приемлемую 5%-ную инженерную погрешность обеспечивает линейная сопряженная аппроксимация бимомента
3. Показано, что для расчета тонкостенных стержней замкнутых профилей с помощью конечных элементов по полусдвиговой теории, ввиду особого характера распределения бимомента вблизи опор, инженерную точность линейная сопряженная аппроксимация обеспечить не может: необходимо использовать разбивку стержня на 32 конечных элемента и более и применения квадратичной сопряженной аппроксимации для уточнения значений бимомента на жестких опорах

References/Библиографический список

1. Shevtsov, S.., Astafeva, N.S. The concept of modular construction on the example of the use of light metal structures. Inzhenernyye issledovaniya [Engineering Research]. 2022. No. 3(8). Pp. 30-37. EDN: BGGOMA.
2. Sovetnikov, D.O., Videnkov, N.V., Trubina, D.A. Light gauge steel framing in construction of multi-storey buildings. Construction of Unique Buildings and Structures. 2015. 3(30)(3). Pp. 152–165. DOI:10.18720/CUBS.30.11.
3. Bondar, V.T. Comparative analysis of stress-deformed state of profiled sheets C-44-1.5 mm, C-21-1.5 mm, CIMC-D02-01A 1.6. Inzhenernyye issledovaniya [Engineering Research]. 2022. No. 3 (8). Pp. 11-19. EDN: EGTJIJ.
4. Gordeeva, A., Vatin, N. Finite element calculation model of thin-walled cold-formed profile in software package SCAD Office. Magazine of Civil Engineering. 2011. 21(3). Pp. 36–46.
5. Nazmeeva, T., Sivokhin, A. Numerical investigations of the connections between cold-formed steel curtain walls and reinforced concrete slabs. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. 456(1). DOI:10.1088/1757-899X/456/1/012081.
6. Vlasov, P.P., Lalina, I.I., Savchenko, A., Viacheslavovich, E.E., Nesterov, A.A. Finite element analysis of the steel column in SCAD. Construction of Unique Buildings and Structures. 2015. 38(11). Pp. 27–41. DOI:10.18720/CUBS.38.3.
7. Nazmeeva, T. V., Vatin, N.I. Numerical investigations of notched C-profile compressed members with initial imperfections. Magazine of Civil Engineering. 2016. 62(2). Pp. 92–101. DOI:10.5862/MCE.62.9.
8. Slivker, V.I. Stroitelnaya mekhanika. Variatsionnye osnovy. [Structural mechanics. Variational basis]. Moscow: ASV, 2005. 710 p.

9. Sovetnikov, D.O., Azarov, A.A., Ivanov, S.S., Rybakov, V.A. Methods of calculation of thin-walled bars: statics, dynamics and stability. AlfaBuild. 2018. 3(1). Pp. 7–33. DOI:10.34910/ALF.4.1.
10. Garifullin, M., Bronzova, M., Pajunen, S., Mela, K., Heinisuo, M. Initial axial stiffness of welded RHS T joints. Journal of Constructional Steel Research. 2019. 153. Pp. 459–472. DOI:10.1016/J.JCSR.2018.10.025.
11. Horacek, M., Melcher, J., Balazs, I., Pesek, O. On Problem of Torsional Characteristics of Thin-walled Steel Beams with Web Openings. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. 471(5). DOI:10.1088/1757-899X/471/5/052040.
12. Gebre, T.H., Galishnikova, V. V. The impact of section properties on thin walled beam sections with restrained torsion. Journal of Physics: Conference Series. 2020. 1687(1). DOI:10.1088/1742-6596/1687/1/012020.
13. Galishnikova, V. A theory for space frames with warping restraint at nodes. Advances in the Astronautical Sciences. 2020. 170. Pp. 763–784.
14. Rybakov, V.A., Lalin, V. V., Ivanov, S.S., Azarov, A.A. Coordinate functions quadratic approximation in V.I. Slivker's semi-shear stability theory. Magazine of Civil Engineering. 2019. 89(5). Pp. 115–128. DOI:10.18720/MCE.89.10.
15. Garifullin, M., Nackenhorst, U. Computational analysis of cold-formed steel columns with initial imperfections. Procedia Engineering. 2015. 117(1). Pp. 1073–1079. DOI:10.1016/j.proeng.2015.08.239.
16. Atavin, I. V., Melnikov, B.E., Semenov, A.S., Chernysheva, N. V., Yakovleva, E.L. Influence of stiffness of node on stability and strength of thin-walled structure. Magazine of Civil Engineering. 2018. 80(4). Pp. 48–61. DOI:10.18720/MCE.80.5.
17. Al Ali, M. Resistance of closed compressed cold-formed steel cross-sections with intermediate stiffeners. Advances and Trends in Engineering Sciences and Technologies - Proceedings of the International Conference on Engineering Sciences and Technologies, ESaT 2015. 2016. Pp. 3–8. DOI:10.1201/B19249-3.
18. SP 16.13330.2017 Steel structures. URL: https://docs.cntd.ru/document/456069588.
19. SP 260.1325800.2016 Cold-formed thin-walled steel profile and galvanized corrugated plate constructions. Design rules. URL: https://docs.cntd.ru/document/456033922.
20. Vlasov, V.Z. Thin-walled elastic beams. Israel Program for Scientific Translation. Jerusalem, 1961. 493 p.
21. Tusnin, A. Chislennyy raschet konstruktsiy iz tonkostennykh sterzhney otkrytogo profilya [Numerical calculation of thin-walled structures of public profile]. Moscow, M.: MGSU: Izd-vo ASV, 2009. 143 p.
22. Perelmuter, A., Yurchenko, V. On the issue of structural analysis of spatial systems from thin-walled bars with open profiles. Metal Constructions. 2014. 20. Pp. 179–190.
23. Lalin, V.V., Rybakov, V.A. The finite elements for design of building walling made of thin-walled beams. Magazine of civil engineering. 2011. 26(8). Pp. 69–80. DOI:10.5862/mce.26.11.
24. Lalin, V.V., Rybakov, V.A., Morozov, S.A. The Finite Elements Research for Calculation of Thin-Walled Bar Systems. Magazine of civil engineering. 2012. 27(1). Pp. 53–73. DOI:10.5862/mce.27.7.
25. Rybakov, V.A. The V.I. Slivker's semi-shear theory finite elements research for calculation of thin-walled closed profile rods. AlfaBuild. 2022. 24(4). Pp. 2403–2403. DOI:10.57728/ALF.24.3.
26. Umanskiy A. A. Krucheniye i izgib tonkostennykh aviakonstruktsiy. [Torsion and bending thin aviakonstruktsy]. M.:Izd-vo Oborongiz, 1939. 112 p.
27. Dzhanelidze, G.Y., Panovko, Y.G. Statika uprugikh tonkostennykh sterzhney. [Statics of thin elastic rods]. Moscow, 1948. 208 p.
28. Oden, J.T., Reddy, J.N. Note on an approximate method for computing consistent conjugate stresses in elastic finite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1973. 6. Pp. 55–61.
29. Oden, J.T. A general theory of finite elements. II. Applications. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1969. 1(3). Pp. 247–259. DOI:10.1002/NME.1620010304..
30. TU 1121-001-1383-0080-2003. Profili stal'nyye otsinkovannyye dlya sistemy karkasnogo stroitel'stva [Galvanized steel profiles for frame construction system]. URL: https://www.baltprofile.ru/profili-lstk/.