



Research Article

Received: October 19, 2022

Accepted: December 09, 2022

Published: December 09, 2022

ISSN 2304-6295

# Analytical solution of the problem of filtration flow in a rectangular dam

Vatin, Nikolai Ivanovich<sup>1</sup> Kotov, Evgeny Vladimirovich<sup>1\*</sup> KHorobrov, Svyatoslav Vladimirovich<sup>1</sup>

Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education "Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University", RF, [vatin\\_ni@spbstu.ru](mailto:vatin_ni@spbstu.ru) (V.N.I); [kotov\\_ev@spbstu.ru](mailto:kotov_ev@spbstu.ru) (K.E.V); [horobrov\\_sv@spbstu.ru](mailto:horobrov_sv@spbstu.ru) (K.S.V.)

Correspondence: \* [kotov\\_ev@spbstu.ru](mailto:kotov_ev@spbstu.ru); contact phone +79213461312

## Keywords:

Unsteady filtration flow; Boussinesq limit problem; Reduction; Crocco's equation; Rectangular dam; Depression curve

## Abstract:

**The object of study** is an unsteady pressureless filtration flow in a porous isotropic medium, in which the region of motion is limited from above by a free surface, on which the fluid pressure is constant and equal to the external atmospheric pressure. Such currents are characteristic of groundwater filtration through hydraulic structures (dams, water drawdowns, drainages, foundations, pits during their drainage). The study aims to solve the problem of the nonstationary gravitational flow of a fluid in a scalar porous medium with two-dimensional filtration motion in a vertical plane. The limiting problem of nonstationary filtration theory (Boussinesq) for a scalar porous medium is formulated using dimensionless factorization, which allows solving groups of problems for areas with similar domains of definition. The Boussinesq limit problem is reduced to a typical limit problem for Crocco's ordinary differential equation. Crocco's limiting problem is formulated and solved. An analytical solution to the limit problem for a rectangular bridge is obtained. The solution determines the depth of the filtration flow downstream of the cofferdam. The paper proves that the limiting problems of nonstationary filtration in the vertical plane are identical to the limiting problems of the stationary theory of the boundary layer in the von Mises variables - the longitudinal coordinate-current function.

## 1 Introduction

Исследование процессов фильтрации жидкостей через пористые среды, возможность прогнозирования характеристик движения, разработка методов расчетов являются актуальными задачами при проектировании, строительстве и ремонте таких грунтовых гидротехнических сооружений как перемычки, дамбы, откосы котлованов.

Грунтовые перемычки и дамбы составляют более 80 % всех проектируемых и построенных в мире грунтовых гидротехнических сооружений. Существующие методы фильтрационного расчёта перемычек, оградительных дамб до настоящего времени не в полной мере учитывают неустановившейся режим фильтрационного потока, что не позволяет достоверно определять фильтрационный расход воды сквозь тело перемычки, дамбы, положение депрессионной кривой и градиенты напора, что сказывается на условиях их строительства. Причина состоит в том, что предельная задача сильно нелинейная.

В то же время прикладной характер задач, связанных с определением мгновенного положения депрессионной кривой нестационарной безнапорной фильтрации раскрыт недостаточно, несмотря на практическую потребность в исследовании фильтрационных

процессов, происходящих на гидротехнических объектах при наличии дренажа, поверхностных источников и взаимосвязи грунтовых вод с подземными.

Предметом исследования является положение депрессионной кривой в неустановившемся фильтрационном потоке через перемычку прямоугольной формы.

Целью работы является решение задачи о неустановившемся безнапорном движении жидкости в скалярной пористой среде для двумерного фильтрационного движения в вертикальной плоскости.

Задачи исследования:

- сформулировать предельную задачу Буссинеска нестационарной теории фильтрации для скалярной пористой среды и редуцировать уравнение Буссинеска к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) низкого порядка;
- получить аналитическое решение предельной задачи для прямоугольной перемычки.

Следует отметить, что ставшие классическими стационарные решения для безнапорной фильтрации в скалярной среде выполнены в терминах аналитической теории ОДУ [1]. Исползованный в [1] прием, редукция уравнений с частными производными к ОДУ, получил широкое применение в решении задач механики сплошных сред [2]-[4].

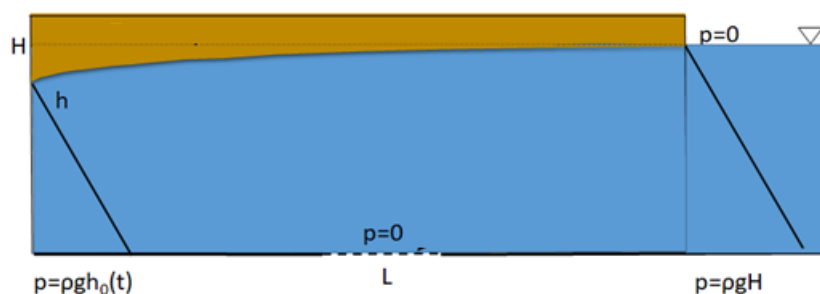
Современное развитие аналитических методов расчета фильтрации приведено в работах [5]-[7]. В [8], [9] показано, что в задачах фильтрации предельная задача Крокко возникает при решении предельной задачи для уравнения Буссинеска, в [4], дано приближенное решение типичной предельной задачи Крокко с использованием процедуры осреднения. Известно [10], что уравнение Крокко является редукцией уравнения Блазиуса. Последнее характеризует поведение ламинарного несжимаемого пограничного слоя на плоской пластине. Численные решения уравнения рассмотрены в работах [11]-[21] и, в основном, посвящены улучшению сходимости предикт-коррекшн методов решения ОДУ пограничного слоя. Исключение составляет работа [16], содержащая развитие метода С. Каплуна, трактуемого в терминах гомотопических отображений промежутка интегрирования на компакт. В [20], [22] показана возможность применения уравнения Крокко в решении уравнения Блазиуса и определении постоянной Блазиуса [23]. Представляет теоретический и практический интерес получить аналитическое решение предельной задачи Буссинеска неустановившегося фильтрационного потока через перемычку прямоугольной формы, используя редукцию уравнения Буссинеска к уравнениям Блазиуса и Крокко и ОДУ.

## 2 Materials and Methods

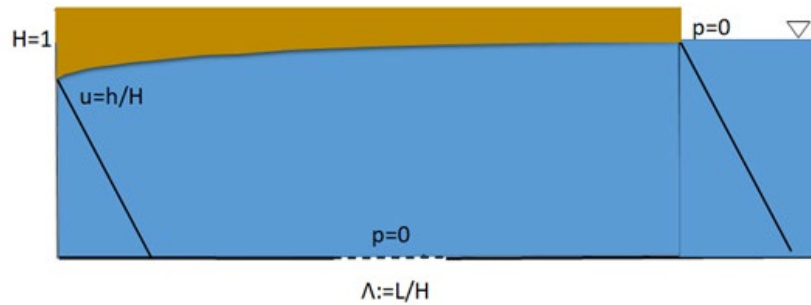
Основные допущения, используемые при решении задач нестационарной безнапорной фильтрации, минимальны и физически обоснованы: живые сечения существуют и давление в любом живом сечении фильтрационного потока распределено по гидростатическому закону. Как следствие получается уравнение Буссинеска-Лейбензона для определения глубины безнапорного фильтрационного потока  $h(t,x)$ :

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (1)$$

где  $t$  – время,  $x$  – координата,  $h=h(t,x)$  – глубина фильтрационного потока,  $h_e \leq h_0 < h \leq H$ , рисунок 1,  $m$  – коэффициент пористости среды,  $0 < m < 1$ ,  $k$  – коэффициент фильтрации.



Размерная постановка



### Безразмерная постановка

Рис. 1 - Постановка задачи

Замена переменных:

$$t' := \frac{kt}{mH} > 0, x' = \frac{x}{H}, 0 < x' < \lambda := l/H, \lambda \leq \Lambda := L/H, u := h/H, u_0 < u < 1, u_0 = h_0/H,$$

приводит уравнение Буссинеска к безразмерному виду:  $\frac{\partial u}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( u \frac{\partial u}{\partial x'} \right)$ . В дальнейшем штрихи у аргументов опускаются. Предельные условия для факторизованного уравнения Буссинеска ставятся так:  $u(0, x) - 1 = u(t, 0) - u_0 = u(t, \infty) - 1 = 0$ .

Уравнение Буссинеска описывает фильтрационный поток при неустановившемся течении. Результатом решения уравнения Буссинеска является зависимость глубины фильтрационного потока от времени  $t$  и координаты  $x$ . Как следствие, определяется и мгновенная величина промежутка высачивания.

Уравнение Буссинеска допускает редукцию к обыкновенному дифференциальному уравнению. Возможна редукция уравнения Буссинеска к уравнению Блазиуса и редукция к уравнению Крокко. Замена переменных  $\zeta = \frac{x}{2\sqrt{t}}$ ;  $u(t, x) = u(\zeta)$  в уравнении Буссинеска приводит его к виду:

$$-2\zeta \frac{du}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta} \left( u \frac{du}{d\zeta} \right) \quad (2)$$

Обозначая  $d\zeta/u := d\eta$  и выражая  $u = d\zeta/d\eta$  уравнение (2) сводится к уравнению Блазиуса (нижние индексы фиксируют порядок производных):

$$\zeta \eta \eta \eta + 2\zeta \zeta \eta \eta = 0, D(\zeta) = (\eta : 0 < \eta < \infty) \quad (3)$$

причем  $\zeta(0) = \zeta'(0) - u_0 = \zeta'(\infty) - 1 = 0$ . Уравнение (2), с помощью понижающей порядок подстановки, принимает вид:

$$\frac{du}{d\zeta} = j(u) \text{ и } d\zeta = \frac{du}{j(u)}, \quad (4)$$

преобразуется к виду - уравнение Крокко [67,68]:

$$2\varphi\varphi'' + u = 0 \quad (5)$$

где  $\varphi(u) := \int_u^1 \zeta(v) dv$ ,  $D(\varphi) = (u : u_0 < u < 1)$ ,  $\varphi(1) = \varphi'(u_0) = 0$ .

Предлагаемая редукция уравнения Буссинеска выполнена с целью получения ОДУ второго порядка (уравнение Крокко), решение которого необходимо найти на отрезке  $[0, 1]$ , являющимся компактом, что упрощает вычисления относительно эквивалентной задачи Блазиуса, решение которой необходимо искать на полубесконечном интервале  $[0, \infty)$ .

Аналитическое решение уравнения Крокко производится для его обобщенной формулировки, частным случаем которой является формулировка для прямоугольной перемычки. Типичная предельная задача Крокко формулируется следующим образом [67]:



$$\begin{aligned}yy'' + \gamma x &= 0, D(y) = (x : x_0 < x < 1), \\y'(x_0) = y(1) &= 0, \text{Im}(y) = (y : y_0 > y > 0),\end{aligned}\tag{6}$$

где  $y_0 := y(x_0) > 0$ . В классическом случае типичной предельной задачи  $\gamma = 1/2$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 := y(0)$ . Далее рассматривается именно этот случай.

Можно доказать, что двухточечные предельные условия (6) равносильны условию Коши:  $y(0) - a = y'(0) = 0$ .

Пусть  $a = 0$ . Тогда  $y(x) = \pm \sqrt{2/3}(-x)^3$  есть решение однородной одноточечной задачи для уравнения Крокко на отрицательной полуоси.

В гидродинамических приложениях  $y(x)$  – (обезразмеренное) трение,  $x$  – (обезразмеренная) продольная компонента скорости в пограничном слое на пластине, обдуваемой плоским потоком в продольном направлении. Тогда  $y_0$  представляет касательное напряжение трения на стенке (константа Блазиуса) [29].

В гидравлической теории фильтрации  $x$  – (обезразмеренная) глубина фильтрационного потока сквозь скалярную (однородную и изотропную) пористую среду,  $y$  – потенциал Крокко, определяемый как

$$y(x) = \int_x^1 s dx', y(1) = y'(0) = 0,\tag{7}$$

где  $s$  – продольная координата, отсчитываемая вдоль фильтрационного потока. В задачах фильтрации постоянная  $y_0$  пропорциональна фильтрационному расходу в сечении выхода потока на границу среды [1].

Справедливы следующие утверждения:

**Утверждение 1.** Уравнение Крокко имеет две ветви решения, положительную  $y_+(x)$ , и отрицательную,  $y_-(x)$ . Отрицательная ветвь определяется как решение предельной задачи:

$$\begin{aligned}2y_- y_-'' + \gamma x &= 0, D(y_-) = (x : x_0 < x < 1), \\y_-'(0) = y_-(1) &= 0, \text{Im}(y_-) = (y_- : -y_0 > y_- > 0),\end{aligned}\tag{8}$$

при этом  $y_+(x) + y_-(x) = 0$ ,  $0 < x < 1$ . Доказательство очевидно.

Далее рассматривается *только* положительная ветвь решения уравнения Крокко, т.е.  $y := y_+$ .

**Утверждение 2.** Решение типичной предельной задачи Крокко (11) обладает свойствами:

$$\begin{aligned}y'(x) &< 0, y''(x) < 0; \\y'(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 1-0} -\infty.\end{aligned}\tag{9}$$

Поэтому  $y_0 > y(x)$ ,  $0 < x < 1$ . Для доказательства формально понизим порядок уравнения Крокко и сведем его к интегральному уравнению:

$$2y' = -\int_0^x \frac{tdt}{y(t)} \rightarrow y' \leq 0, 0 \leq x < 1,\tag{10}$$

что и требовалось.

Интеграл в правой части можно вычислить, используя теорему Бонне о среднем значении. Получим:

$$2yy' = -1/2(1 - \theta^2)x^2,\tag{11}$$

где  $\theta$  – правильная дробь. Остается перейти к пределу при  $x \rightarrow 1-0$ .

Решение уравнения (11) такое, что  $y(1) = 0$  есть:

$$y^2(x, \theta) = 1/6(1 - \theta^2)(1 - x^3).\tag{12}$$

Это решение непрерывно зависит от величины дроби  $\theta$ . Среднее по  $\theta$  значение решения (12) представляет так называемое слабое решение типичной предельной задачи Крокко, трактуемое как *распределение* по  $\theta$  с *плотностью распределения*  $y(x; \theta)$  [7].

В силу (12) слабое решение типичной предельной задачи Крокко имеет вид:

$$y(x) = 1/3\sqrt{1 - x^3},\tag{13}$$



и тогда  $y_0=y(0)=1/3$ , что является неплохим рациональным приближением для постоянной Блазиуса. Точное значение постоянной Блазиуса вычислено в работе [11]. Как видно из формулы (13), слабое решение можно продолжить на отрицательные значения  $x$  с сохранением непрерывности и гладкости решения в точке  $x=0$ .

Решение типичной предельной задачи Крокко связано с решением нелинейного интегрального уравнения:

$$y(x) = 1/2 \left\{ \int_0^1 \frac{(1-s)sds}{y(s)} - \int_0^x \frac{(x-s)sds}{y(s)} \right\}. \quad (14)$$

Из уравнения (14) получается следующее выражение постоянной Блазиуса:

$$y_0 := y(0) = 1/2 \int_0^1 \frac{(1-s)sds}{y(s)}, \quad (15)$$

Решение уравнения (19, 14) можно получить в виде ряда Лагранжа. Доказано, что радиус сходимости ряда Лагранжа меньше 1 и ряд расходится при  $x \rightarrow 1-0$ . Альтернативой методу решения в виде ряда Лагранжа может служить итерационный процесс:

$$y_k(x) = 1/2 \left\{ \int_0^1 \frac{(1-s)sds}{y_{k-1}(s)} - \int_0^x \frac{(x-s)sds}{y_{k-1}(s)} \right\}, k = 1(1)\infty, \quad (16)$$

где нижний значок определяет номер итерации. Итерированные значения постоянной Блазиуса определяются из последовательности:

$$y_k(0) = 1/2 \int_0^1 \frac{(1-s)sds}{y_{k-1}(s)}. \quad (17)$$

Последовательно находим:

$$k = 1: y_0(x) = y_0 = \sqrt{1/12} = 0.2887;$$

$$k = 2: y_1(x) \cdot y_0 = 1/12(1-x^3), y_1(x) = (1-x^3)/\sqrt{12}, y_1(0) = 1/\sqrt{12}$$

$$k = 3: y_2(x) = \sqrt{3} \left( \int_0^1 \frac{(1-s)sds}{1-s^3} - \int_0^x \frac{(x-s)sds}{1-s^3} \right) - \sqrt{3} \left\{ \begin{aligned} & \ln \sqrt{3} - \frac{x+2}{3} \ln \sqrt{1+x+x^2} + \\ & + 1/3(1-x) \ln \left( \frac{1}{1-x} \right) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

$$y_2(0) = \sqrt{3} \left( \ln \sqrt{3} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right),$$

и т.д. Соответственно первые три итерированные значения постоянной Блазиуса образуют последовательность значений:

$$y_0(0) = 1/\sqrt{12} = 0.2887..., y_1(0) = 0.2887..., y_3(0) = 0.4278...,$$

и, в среднем, за первые три итерации,  $0,3299 < y(0) < 0,3344$ . Итерационный процесс приводит к тривиальным и длинным вычислениям, что видно уже на третьей итерации. Очевидно, любое итерированное решение обладает всеми основными свойствами решения предельной задачи (6):

$$\forall x \in (0, 1), \forall k = 1(1)\infty, y'_k(x) < 0, y''_k(x) < 0, y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1-0} -\infty.$$

Неудобство итерационного процесса состоит в громоздкости выражений для итерированных решений и в отсутствии доказательства сходимости итерационного процесса. Оба этих препятствия можно обойти, используя разностную аппроксимацию предельной задачи (6).

Для предельной задачи Крокко, сформулированной для прямоугольной переемычки, доказано, что полученное слабое решение обладает всеми свойствами точного решения. Значение постоянной Блазиуса в слабом решении,  $\gamma=1/2$ ,  $y(0)=1/3$ ,  $\gamma=1$ ,  $y(0)=0,4714$ , и отличается от точного значения меньше, чем на 0,4%. Слабое решение предельной задачи Крокко имеет вид:

$$\phi(u) = 1/3\sqrt{1-u^3}. \quad (19)$$



Предельная задача Буссинеска, рассмотренная выше, эквивалентна предельной задаче Крокко для «потенциала фильтрации»  $\varphi(u)$ :

$$\varphi(u) = \int_u^1 z(v) dv, z = s / (2\sqrt{\tau}), \varphi(1) = \varphi'(u_0) = 0, 0 < u_0 < 1 \quad (20)$$

Из уравнения Буссинеска следует дифференциальное уравнение для  $\varphi(u)$ :

$$2\varphi\varphi'' + u = 0, D(\varphi) = (u : u_0 < u < 1) \quad (21)$$

в совокупности с предельными условиями  $\varphi(1) = \varphi'(u_0) = 0$  образуют так называемую *типичную предельную задачу Крокко* [7], [25].

Область определения  $D(\varphi)$  решения уравнения (21) можно расширить левее точки  $u_0$  с сохранением непрерывности и гладкости в этой точке. Продолжение решений уравнения (21) играет важную роль для построения мгновенной депрессионной кривой. Нетривиально: на отрицательной полуоси  $u < 0$  уравнение (21) имеет *точное решение*  $\varphi(u) = \sqrt{-2/3u^3}$ , что легко проверить подстановкой.

Слабое положительное решение уравнения (21) для типичной предельной задачи имеет вид (отрицательные слабые решения не рассматриваем, они не имеют физического смысла для решаемой задачи) [19]:

$$\varphi(u; u_0) = 1/6\sqrt{4(1-u^3) - 3u_0(1-u^2) - 6u_0^2(1-u)}, u_0 < u < 1, \quad (22)$$

или, выделяя корень  $u=1$ :

$$\varphi(u; u_0) = 1/6\sqrt{(1-u)(4(1+u+u^2) - 3u_0(1+u) - 6u_0^2)}. \quad (23)$$

Вещественные значения  $\varphi(u; u_0)$  возможны, если выполняются условия:

$$u \leq 1; u^2 + (1 - 3/4u_0)u + 1 - 3/4u_0 - 3/2u_0^2 \geq 0,$$

$$u \leq 1; u'' \leq u, u \geq u',$$

$$u' := -1/2 + 3/8u_0 + \sqrt{105/64u_0^2 + 3/8u_0 - 3/4}, \varphi(u'; u_0) = 0, \quad (24)$$

$$u'' := -1/2 + 3/8u_0 - \sqrt{105/64u_0^2 + 3/8u_0 - 3/4}, \varphi(u''; u_0) = 0,$$

$$u_0^2 + 8/35u_0 - 16/35 \geq 0; 1 \geq u_0 \geq -4/35 + 4 \cdot 6/35 = 20/35 = 4/7.$$

Наконец, если  $u_0 < 4/7$ , то никаких вещественных корней, кроме  $u=1$ , функция  $\varphi(u; u_0)$  не имеет.

Если  $u_0 < 4/7$ , то потенциал Крокко не имеет нулей на отрезке  $[0, 1]$ ; если  $4/7 < u_0 < 1$ , то существует вещественный нуль  $u'$ . Если  $1 > u_0 \geq -1/4 + \sqrt{1/16 + 2/3} = 0,6\dots$ , то существуют положительные, отличные от 1 нули функции  $\varphi(u; u_0)$ ,  $0 \leq u' < 1$ ; если  $4/7 \leq u_0 \leq -1/4 + \sqrt{1/16 + 2/3}$ , то  $u' < 0$ .

График функции  $\varphi(u; u_0)$ , построенный по формуле (22), показан на рисунке 3. Как видно из (22), решение может быть продолжено на промежуток  $u < u_0$  с сохранением непрерывности и гладкости решения в точке  $u = u_0$ . При этом если  $u_0 < 4/7$ , то продолженное решение не имеет нулей, кроме  $u=1$ . Если  $4/7 < u_0 < 1$ , продолженное решение имеет корень, расположенный левее точки  $u=1$ . Например, пусть  $\varphi(0, u_0) = 0$ . Тогда  $u_0 = -1/4 + \sqrt{1/16 + 2/3} > 4/7$ . При таком значении  $u_0$  функция  $\varphi(u, u_0)$  обращается в 0 при  $u=0$ ,  $u=1$ . Уравнение (21) с предельными условиями  $\varphi(0, u_0) = \varphi(1, u_0) = 0$  образуют *однородную предельную задачу Крокко*. Следовательно, решение однородной предельной задачи Крокко получается сшиванием в точке  $u_0$  двух типичных предельных задач для промежутков  $0 < u < u_0 = 0$ ,  $u_0 + 0 < u < 1$  с сохранением непрерывности и гладкости в точке  $u = u_0$ .

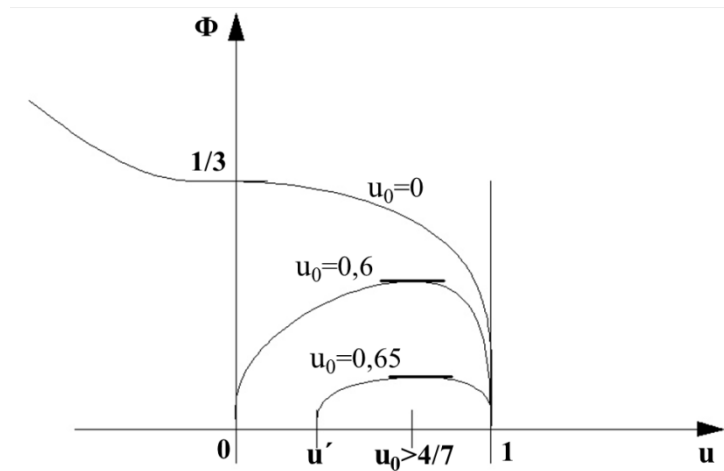


Рис. 1 - Потенциал Крокко  $\varphi(u; u_0)$  при различных  $u_0$

Значение  $a(u_0) := \varphi(u_0; u_0)$ , в силу (22) вычисляется так:

$$\varphi(u_0; u_0) := a(u_0) = 1 / 6(1 - u_0) \sqrt{4 + 5u_0} \quad (25)$$

Из формулы (25) следует, что  $a(u_0)$  монотонно убывает в промежутке  $0 < u_0 < 1$ :  $a(0) = 1/3 > a(u_0) > a(1) = 0$ , рисунок 4. Иначе, если  $u_0 \rightarrow +0$ , то значение  $a(0) = 1/3$  практически совпадает с постоянной Блазиуса.

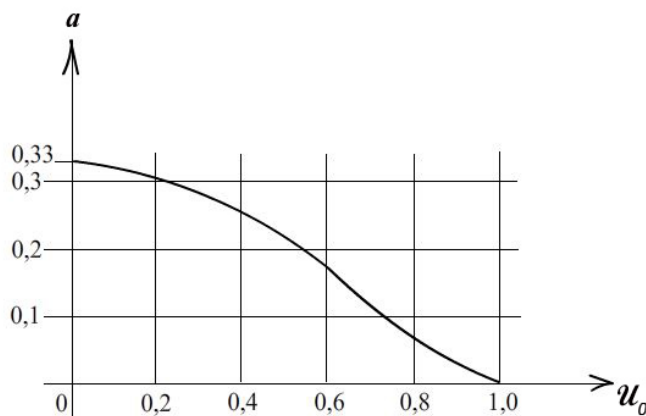


Рис. 2 - Значение потенциала Крокко  $\varphi(u_0; u_0)$

Явная форма депрессионной кривой имеет вид:  $\zeta(u, u_0) = -d\varphi / du$ , или, используя слабое решение (22):

$$\zeta(u, u_0) = \frac{u^2 - uu_0 / 2 - u_0^2 / 2}{\sqrt{4(1 - u^3) - 3u_0(1 - u^2) - 6u_0^2(1 - u)}} \quad (26)$$

Как следует из (26),  $u \rightarrow 1 - 0$ ,  $\zeta \rightarrow \infty$ . Депрессионная кривая пересекает ось  $\zeta = 0$  в двух точках: в точке  $u = u_0$  и в точке  $u = -u_0/2$ .  $4/7 < u_0 < 1$ . В промежутке значений  $-u_0/2 < u < u_0$  функция  $\zeta(u, u_0)$  имеет разрыв непрерывности в точке  $u = u'$ ,  $u'$  – корень уравнения (23), отличный от  $u = 1$ . Именно,

$$u' = -1/2 + 3u_0 / 8 \pm \sqrt{105 / 64u_0^2 + 3u_0 / 8 - 3 / 4}.$$

Если же  $u_0 < 4/7$ , то продолжение решения (22) левее точки  $u = u_0$  не имеет вещественных нулей и на промежутке  $-u_0/2 < u < u_0$  образуется непрерывное неоднозначное продолжение депрессионной кривой, так называемая петля Герсеванова, причем точка минимума  $\zeta(u, u_0)$  соответствует точке выхода депрессии на низовой откос с касанием низового откоса. Подчеркнем, что петля Герсеванова существует только при  $u_0 < 4/7$ , т.е. в длинных перемычках с относительно небольшими промежутками высачивания (с высотой  $\Delta$  не больше  $4/7 - u_e$ ). Если же  $1 > u_0 > 4/7$ , то петля Герсеванова не образуется. В этом случае продолженное левее точки  $u_0$  решение (23) уравнения (21) не имеет нулей, кроме обязательного нуля  $u = 1$ , рисунок 5.

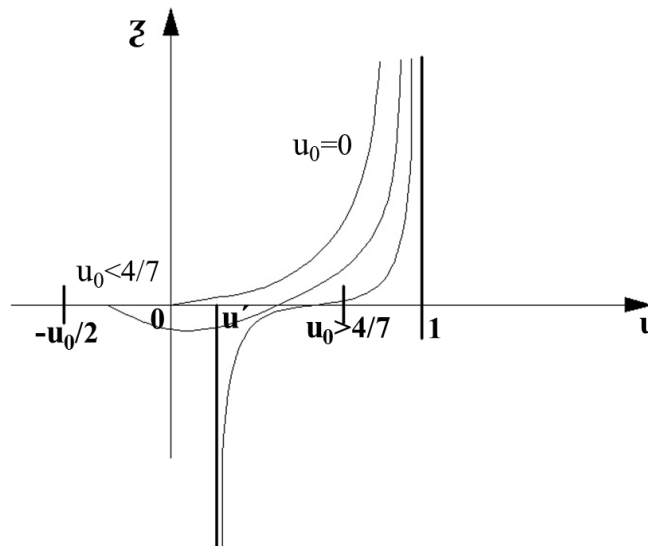


Рис.3 - Образование петель Герсеванова

Потенциал Крокко связан с длиной активной зоны фильтрации, что непосредственно получается из тождества:

$$\lambda := \int_0^{\infty} (1-u) dx = 2\sqrt{t} a(u_0). \quad (27)$$

Действительно:

$$\lambda(t) := \int_0^{\infty} (1-u) dx = 2\sqrt{t} \int_0^{\infty} (1-u) d\zeta = 2\sqrt{t} \int_{u_0}^1 (1-u) (-\varphi''(u)) du, \quad (28)$$

и далее интегрирование по частям с учетом предельных условий для  $\varphi(u)$ . Для  $\theta_0(t)$  справедлива легко проверяемая цепочка тождеств:

$$\theta_0(t) := (u \partial u / \partial x)_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{t}} u_0 \left( \frac{du}{d\zeta} \right)_{\zeta=0} = \frac{a(u_0)}{\sqrt{t}}. \quad (29)$$

Итак, из формулы (29), следует, что решение дифференциального уравнения (5), такое, что  $\lambda(0)=0$ , есть:  $\lambda(t) = 2\sqrt{t} a(u_0)$ , что совпадает с формулой (27). Следовательно, при одном и том же значении времени  $\tau$  длина активной зоны фильтрации возрастает при убывании  $u_0$ :  $\lambda(t) \leq 2 / 3t, t \geq 9 / 4\lambda^2$ .

### 3 Results and Discussion

Результатами выполненных исследований неустановившегося фильтрационного потока через перемычку прямоугольной формы являются:

1. Стационарное положение депрессионной кривой и стационарная величина промежутка высачивания получаются как пределы ( $t \rightarrow \infty$ ) мгновенных депрессионных кривых и мгновенных промежутков высачивания. Достаточным критерием сходимости задачи на установление является  $t \geq L/k$ , где  $t$  - время,  $L$  - длина перемычки,  $k$  - коэффициент фильтрации пористой среды.

2. Депрессионная кривая в перемычке конечной безразмерной длины  $\Lambda$  получается из депрессионной кривой в полубесконечной перемычке, имеющей мгновенную длину депрессионной кривой  $\lambda = \Lambda$ .

3. В процессе установления фильтрационного потока расход в нижнем бьефе изменяется от  $\theta_0 = \frac{1}{2\lambda}$  до  $\theta_0 = \frac{1-u_e^2}{2\Lambda}$ , где  $u_e = \frac{h_e}{H}, \lambda = \frac{l}{H}, \theta_0 = \frac{q}{kH}$ , где  $\lambda$  - текущая безразмерная длина депрессионной кривой;  $\Lambda$  - безразмерная длина перемычки,  $\Lambda := L/H$ ;  $\theta$  - безразмерный расход;  $u_e$  - безразмерная глубина воды в нижнем бьефе;  $h$  - текущая глубина фильтрационного потока;  $h_e$





– глубина воды в нижнем бьефе;  $H$  – глубина воды в верхнем бьефе;  $h_0$  – глубина потока в точке выклинивания; иначе, в процессе установления предельное значение расхода совпадает с расходом, найденным по формуле Дюпюи, т.е. достигает (минимального) стационарного значения.

4. Точка выклинивания депрессионной кривой на низовом откосе находится в пределах  $(0, H)$  в моменты времени, близкие к начальному. Касание депрессионной кривой с низовым откосом получается при продолжении решения в область  $x < 0$ , т.е. на петле Герсеванова.

5. В длинных перемычках ( $L \geq 7 \dots 9$ ) промежутков высачивания мал: точка выклинивания успевает упасть в нижний бьеф за время, в течении которого величина  $\lambda \rightarrow \Lambda - 0$ . И наоборот, в коротких перемычках точка выклинивания не успевает упасть в нижний бьеф за время прохождения через перемычку уединенной волны расхода, растягивающей длину депрессионной кривой до значения  $\Lambda - 0$ .

## 4 Conclusions

Предельная задача нестационарной теории фильтрации (Буссинеска) сформулирована для скалярной пористой среды с использованием безразмерной факторизации, что позволяет решать группы задач для областей с подобными областями определения.

Предельная задача Буссинеска редуцирована на типичную предельную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения Крокко.

Сформулирована и решена предельная задача Крокко. Ее решение используется для определения глубины фильтрационного потока в нижнем бьефе.

Предельные задачи нестационарной фильтрации в вертикальной плоскости тождественны предельным задачам стационарной теории пограничного слоя в переменных Мизеса - продольная координата-функция тока.

## References

1. Anakhaev K.N. (2009) A Particular analytical solution of a steady-state flow of a groundwater mound. *Water Resources*, **No. 5**, 507-512. <https://doi.org/10.1134/S0097807809050029>
2. Aksenov A.V. and A.A. Kozyrev (2012) Reductions of the stationary boundary layer equation. *Ufa Mathematical Journal*, **No. 4**, 3-12. <https://doi.org/10.1134/S1064562413020233>
3. Kaptsov O. V. and D. O. Kaptsov. (2017) Reductions of partial differential equations to systems of ordinary differential equations. *Computing technologies*, **No. 4**, 61-67. <https://doi.org/10.2991/jnmp.2004.11.1.3>
4. Polyanin A. D. (2018) Reductions and new exact solutions of the equations of convective heat and mass transfer with a nonlinear source. *Bulletin of NRNU "MEPhI"*, **No. 6**, 458–469. <https://doi.org/10.1007/bf02827383>
5. Anakhaev K.N. (2022) On movements with variable acceleration. *Proceedings of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, **No. 6 (110)**, 13-18. <https://doi.org/10.35330/1991-6639-2022-6-110-13-18>
6. Anakhaev K.N. (2016) Definition of modular elliptic function in problems of the free-flow filtration. *Doklady Physics*, **No. 9**, 449-452. <https://doi.org/10.1134/S1028335816080012>
7. M.R. Petrichenko, E.V. Kotov, D.D. Zaborova, T.A. Musorina. (2018) Weak solutions of Crocco's limit problems. Scientific and technical statements of the St. Petersburg State Polytechnic University. *Physical and mathematical sciences*, **No. 3**, 27-38. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-19868-8\\_82](https://doi.org/10.1007/978-3-030-19868-8_82)
8. Petrichenko M.R., Kotov E.V. (2019) Numerical verification of weak solutions to a typical Crocco limit problem using an implicit second-order difference scheme. *Scientific and Technical Bulletin of SPbPU. Physical and mathematical sciences*, **No. 2**, 63-72. <https://doi.org/10.18721/JPM.12205>
9. Zaborova D.D., Petrichenko M.R., Musorina T.A. (2018) Dupuy's Paradox and Mathematical Modeling of Nonstationary Filtration in a Homogeneous Cofferdam. *Physical and mathematical sciences*, **No. 2**, 49 – 60. <https://physmath.spbstu.ru/en/article/2018.40.5/>
10. Varin V.P. (2016) Asymptotic expansion of the Crocco solution and the Blasius constant. *Preprint of the Institute of Applied Mathematics*, 22. <https://doi.org/10.1134/S0965542518040164>
11. A. Asaithambi. (2005) Solution of the Falkner-Skan equation by recursive evaluation of Taylor coefficients. *J. Comput. Appl. Math.*, **176**, 203-214. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.07.013>



12. Kuo B-L. (2005) Heat transfer analysis for the Falkner-Skan wedge flow by the differential transformation method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. **48**, 5036–5046. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.10.046>
13. Paul M. (2014) An Accurate Taylor's Series Solution with High Radius of Convergence for the Blasius Function and Parameters of Asymptotic Variation. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, v. **7.**, 557–564. <https://doi.org/10.36884/jafm.7.04.21339>
14. Liao S-J. (1999) A explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. **34**, 759–778. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(98\)00056-0](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00056-0)
15. Liu C-S. (2013) An SL (3, R) shooting method for solving the Falkner-Skan boundary layer equation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. **49**, 145–151. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(71\)90090-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(71)90090-8)
16. Liu Y. and Kurra S.N. (2011) Solution of Blasius Equation by Variational Iteration. *Applied Mathematics*, v. **1.**, 24–27. <https://doi.org/10.5923/j.am.20110101.03>
17. Asaithambi A. (2004) A second-order finite-difference method for the Falkner-Skan equation. *Applied Mathematics and Computation*, v. **14.**, 1021–1024. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.06.020>
18. Asaithambi A. (2004) Numerical solution of the Falkner-Skan equation using piecewise linear functions. *Applied Mathematics and Computation*, v. **159**, 267–273. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.10.047>
19. Asaithambi A. (2005) Solution of the Falkner-Skan equation by recursive evaluation of Taylor coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. **176**, 203–214. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.07.013>
20. Asaithambi A. (2014) Numerical solution of the Blasius equation with Crocco-Wang transformation. *Journal Of Applied Fluid Mechanics*, No. **5**, 2595-2603. <https://doi.org/10.18869/acadpub.jafm.68.236.25583>
21. Zhao Y. and Lin Z. A Modified Homotopy Analysis Method for Solving Boundary Layer Equations. *Applied Mathematics*, v. **4**, 11–15. <https://doi.org/10.4236/am.2013.41003>
22. Faiz A. (2007) Application of the Crocco–Wang equation to solve the Blasius equation. *Technical acoustics*, No. **7**, T. 7. <https://sciup.org/14316076>
23. Petrichenko M.R. (2015) Approximate estimates of the Blasius constant. *Scientific and technical statements of the St. Petersburg State Polytechnic University. Physical and mathematical sciences*, No. **2 (218)**, 43-48. <https://doi.org/10.5862/JPM.218.4>
24. Williams, F.A. (1985). Crocco Variables for Diffusion Flames. *Casci, C., Bruno, C. (eds) Recent Advances in the Aerospace Sciences*, Springer, Boston, MA. [https://doi.org/10.1007/978-1-4684-4298-4\\_20](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-4298-4_20)
25. L. Crocco, M. D'Urso, T. Isernia, (2009) The Contrast Source-Extended Born Model for 2D Subsurface Scattering Problems. *Progress In Electromagnetics Research B*, Vol. **17**, 343-359. <https://doi.org/10.2528/PIERB09080502>