



Research Article

Received: January 06, 2022

Accepted: January 16, 2022

Published: January 23, 2022

ISSN 2304-6295

Free vibrations of a viscoelastic isotropic plate with a negative Poisson's ratio

Abdikarimov, Rustamkhan Alimkhanovich.¹ Vatin, Nikolai Ivanovich.² Khodzhaev, Dadakhan Akmalkhanovich.³ ¹ Tashkent University of Architecture and Construction, Tashkent, Uzbekistan; rabdikarimov@mail.ru² Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation; vatin@mail.ru³ National Research University "Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers", Tashkent, Uzbekistan; dhodjaev@mail.ruCorrespondence: * email vatin@mail.ru; contact phone [+79219643762](tel:+79219643762)

Keywords:

Viscoelasticity; Creep; Bubnov-Galerkin method; Numerical Methods; Integro-differential Equations; Thin Walled Structure; Linear Vibrations; Plates; Equations of Motion; Austhetics

Abstract:

Vibrations of viscoelastic isotropic rectangular plates of an auxetic metamaterial are considered in a linear formulation. The problem is described by a linear integro-differential partial differential equation with initial and boundary conditions. The weakly singular relaxation kernel of Koltunov-Rzhanitsyn is used. Using the Bubnov-Galerkin method, the resulting equation is reduced to a linear ordinary integro-differential equation with respect to the time function. This equation is solved by a numerical method based on the use of quadrature formulas, eliminating singularities in the relaxation kernel. The effect on the amplitude-frequency characteristic of vibrations of a viscoelastic isotropic rectangular plate of a metamaterial with a negative Poisson's ratio is studied.

1 Introduction

1.1. Метаматериалы - ауксетики

Анализ аварийности заданий, сооружений и промышленных объектов показывает, что многие крупные аварии связаны с взрывами смеси горючих газов, аэрозолей или пылевых частиц с воздухом с последующим разрушением зданий, сооружений и объектов. Защита критической инфраструктуры, как элемент мероприятий гражданской обороны, стала важной в связи с активизацией террористической деятельности в последние годы.

Устойчивость зданий и сооружений при взрывных нагрузках может быть повышена применением защитных сотовых покрытий с отрицательным коэффициентом Пуассона. Коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации) показывает зависимость между продольными и поперечными деформациями элемента, характеризует упругие свойства материала и для обычных материалов является величиной положительной. Однако в последние годы разработаны метаматериалы на основе сотовых структур с отрицательным коэффициентом Пуассона, называемые также ауксетическими метаматериалами. Свежий обзор противовзрывных и противоударных характеристик ауксетических конструкций, материалов и методов их изготовления [1] опубликован в 2023 г.

Сотовые метаматериалы это сверхлегкие материалы с механическими свойствами, которые в основном обусловлены конфигурацией их элементарных ячеек, а не свойствами

материалов матрицы [2]. В последние годы они активно используются в аэрокосмической промышленности, на транспорте и в строительстве [3].

В момент приложения ударной нагрузки метаматериал с отрицательным коэффициентом Пуассона сжимается в поперечном по отношению к нагрузке направлении, притекая к месту удара [4]. Это явление увеличивает локальную плотность материала с отрицательным коэффициентом Пуассона и частично поглощает энергию удара, что приводит к более эффективной ударопрочности [5], [6]. При той же начальной плотности материал с отрицательным коэффициентом Пуассона имеет более высокий предел текучести и более низкую жесткость [7].

В самое последнее время появились результаты исследований таких метаматериалов для защиты конструкций и оборудования от взрывных воздействий [8], [9], [10], [11], [12]. Явление повторных (многократных) взрывов часто возникает при серьезных авариях, что выдвигает более высокие требования к работоспособности защитных сооружений. Метаматериалы показали высокую эффективность защиты и в этих условиях [13]. Ауксетические метаматериалы могут создаваться в том числе и методами 3D печати [12].

Публикации по материалам с отрицательным коэффициентом Пуассона появились, начиная с 1969 г. В 1987 году опубликована первая, высоко цитируемая публикация [14] в журнале Science. В ней был представлен новый пенообразный метаматериал с отрицательным коэффициентом Пуассона. Такой метаматериал расширялся в поперечном направлении при растяжении, в отличие от обычных материалов. В течение долгого времени ауксетические метаматериалы не имели практического применения. По мере появления практических применений число научных публикаций лавинообразно росло.

Ряд ауксетических метаматериалов построены с использованием хиральных строительных блоков, хиральных или антихиральных решеток [15], часть структуры метаматериалов используют принципы оригами, т.е. изготовление элементарной ячейки метаматериала из листового материала путем его сгибов и сложений [16], [17].

Динамические характеристики металлических сэндвич-панелей с ауксетическим шестиугольным сотовым наполнителем были исследованы с помощью серии взрывных испытаний [18], либо численными методами [19], с подтверждением полученных результатов путем сравнения со взрывными испытаниями. Виды деформаций и лежащие в их основе механизмы были классифицированы и подробно проанализированы для панелей с различной относительной плотностью материала при различных уровнях взрывного импульса. Сэндвич-панели с ауксетическими сотовыми наполнителями не всегда демонстрировали лучшие результаты по сравнению с неауксетическими, что в значительной степени зависело от импульса взрыва и уровня плотности материала. Взрывостойкость панелей оценивалась по максимальному остаточному прогибу задней поверхности. Такой критерий оценки взрывостойкости является рациональным для взрывазащитных перегородок, но не для покрытий, прилегающих к защищаемым конструкциям, что сужает применимость данных экспериментальных результатов. В [20] моделировалась механическая реакция ауксетических метаматериалов на высокоскоростные динамические воздействия.

Пористые оболочечные конструкции, изготовленные из титанового сплава с разной конфигурацией сот, изучались с помощью численного моделирования [21]. Правильность численного моделирования подтверждено сопоставлением с опубликованными экспериментальными результатами. Для часто применяемой конфигурации "двойная стрела", она же DAA, исследование включает три различных плотности. Показано, что способность поглощать структурную энергию оболочек с двойной стрелой увеличивается с плотностью. Ограниченность этого исследования в рамках решаемой научной проблемы, состоит в исследовании ударной нагрузки от твердого предмета, но не от ударной волны.

Энергопоглощающая защитная структура с отрицательным коэффициентом Пуассона исследовалась применительно к защите транспортируемых водородных баллонов [22]. Сравнены три сотовой структуры одинаковой массы и три вида алюминиевого сплава, используемых для их изготовления. Построена оптимизационная математическая модель, оперирующая удельным энергопоглощением метаматериала, максимальной силой удара и максимальным напряжением материала соты. Кроме того, для оптимизации структуры используются адаптивный мутационный генетический алгоритм и генетический алгоритм сортировки. Ограниченность этих результатов для решаемой проблемы состоит в анализе

ударной, а не взрывной нагрузки. В то же время, оптимизационные методы представляют несомненный интерес.

В [23] была разработана новая цилиндрическая сэндвич-панель с сердечником из ауксетика с "двойной стрелой" для защиты от ударной волны взрыва в воздухе. Разработана численная модель, реализованная на ABAQUS, использованная для оптимизации конструкции. Были рассмотрены два критерия оптимизации конструкции: по уменьшению прогиба и массы конструкции и по уменьшению прогиба и увеличению поглощения энергии на единицу массы. Подход к оптимизации можно использовать в аналогичных исследованиях.

Эффективность сэндвич-панелей с ауксетическим сотовым наполнителем изучалось для защиты железобетонной плиты при взрыве вблизи и в дальней зоне [24]. Ряд численных моделей был разработан с использованием LS-DYNA. Численная модель была подтверждена сопоставлением с экспериментальными результатами. На модели были исследованы деформации, поглощение энергии, демпфирование избыточного давления, отражение давления взрыва и передача напряжения на защищаемую конструкцию. Недостатком модели является упрощенное задание параметров ударной волны.

Используя теорию деформации сдвига первого порядка, исследовано нелинейное динамическое поведение и собственные частоты плиты на упругом основании с взрывной нагрузкой [25]. Плита имеет три слоя: графеновая пластина, армированный композит и ауксетический слой. Представлены численные результаты исследования влияния геометрических параметров, параметров упругого основания, взрывных нагрузок на нелинейное динамическое поведение и вибрацию многослойной плиты. Авторский подход представляет несомненный научный интерес, хоть не подтвержден сопоставлениями с экспериментальными результатами.

В [26] экспериментально исследована эффективность поглощения взрывного воздействия ауксетичных панелей в сравнении с тремя другими типами панелей (монолитные, с воздушным зазором, сэндвич с полимерной пеной). Экспериментальные исследования имеют ограниченное применение для задач с воздействием только взрывной волной, т.к. в данном случае помимо взрывной волны на панели действовали частицы грунта.

Численно исследовалась деформация металлической ауксетичной сэндвич-панели с двойным стержневым сотовым наполнителем, и ее характеристики рассеяния энергии при воздействии ударной волны воздуха [27]. Результаты подтвердили эффект концентрации ауксетичного метаматериала. Варьировались углов наклона элементов панели и ее относительная плотности. Панель с более тонкими стенками сердцевины при низкой относительной плотности и панель с суженными углами наклона при высокой относительной плотности более выгодны для поглощения энергии пластика. Предложены конкретные конфигурационные решения.

Общий обзор применения панелей для целей поглощения энергии внешнего воздействия представлен в [28]. Ауксетичные материалы рассмотрены весьма кратко.

Аналитический нелинейный динамический анализ пористых внецентренно подкрепленных пологих ауксетических оболочек двойной кривизны с отрицательным коэффициентом Пуассона, подверженных взрывным, механическим и термическим нагрузкам представлен в [29]. В сочетании с теорией деформации сдвига первого порядка и деформациями фон-Кармана получены основные уравнения для нелинейного динамического отклика неглубоких ауксетических оболочек двойной кривизны. Затем предлагается использовать функцию напряжений и методы Бубнова-Галеркина для получения результирующих уравнений: основной частоты, динамического отклика и соотношения частота–амплитуда. Изложенный подход дополняет аналитическую часть исследования [20] и может быть использован для дальнейшего совершенствования в данном проекте.

В работе [30] аналитически исследуются нелинейные свободные и вынужденные колебания многослойной цилиндрической панели на вязко-упругом основании под воздействием взрывной нагрузки. Многослойная цилиндрическая панель состоит из двух лицевых листов из композита, армированного углеродными нанотрубками. Предполагается, что свойства материала наружных листов композита, армированного углеродными нанотрубками непрерывно изменяются в направлении толщины в соответствии с четырьмя различными типами линейных функций. Взрывная нагрузка варьируется по расстоянию от центра взрыва до центра сооружения и по мощности взрыва. Использована теория пластин и



оболочек со сдвиговой деформацией высокого порядка Редди с учетом влияния начального несовершенства и вязко-упругого основания. Методы Бубнова-Галеркина и Рунге-Кутты используются для получения нелинейного динамического отклика и собственной частоты трехслойной цилиндрической панели. Точность предложенного подхода подтверждается частичным совпадением с известными литературными данными.

Предложена многослойная геометрия ауксетического сотового заполнителя из элементарных ячеек, сформированных по принципу оригами [31]. Образцы оригами были испытаны на ударное воздействие при скоростях удара 50 м/с и 100 м/с.

Взрывозащитные стальные ворота исследовались на взрывное воздействие численно с использованием Abaqus/Explicit [32]. Результаты показали, что крепление ауксетического сотового заполнителя к воротам привело к резкому снижению остаточных деформаций, что позволило уменьшить массу ворот на 50% и на 49% снизить пиковые нагрузки на несущую раму ворот.

1.2. Основные направления исследований в мировой науке

По результатам рассмотрения современного состояния исследований по данной проблеме можно выделить основные направления исследования.

Экспериментальные исследования динамического воздействия на ауксетические метаматериалы включают в себя ударные воздействия твердых тел (в том числе высокоскоростные воздействия) и взрывные воздействия, в том числе в виде ударной волны, эквивалентной взрывам газовой или пылегазовой объемной среды в воздухе, соответствующие решаемой научной проблеме. Доля исследования с последним видом воздействия мала.

Рассматриваются различные формы защитных покрытий из ауксетических метаматериалов (полусферическая, цилиндрическая, плоская).

Объекты и предметы исследования характеризуются многопараметричностью, что объясняет недостаточность накопления эмпирических данных и стимулирует новые исследования.

И теоретические, и численные подходы к моделированию взрывного воздействия на ауксетические метаматериалы не завершились созданием общепризнанных теорий, методик моделирования и расчета. Такие исследования продолжаются.

Предлагаемые варианты оптимизации параметров изделий из ауксетических метаматериалов и самих метаматериалов не завершились созданием их полного цифрового двойника, более того, задача создания цифрового двойника пока не ставилась.

1.3. Ведущие научно-исследовательские организации по этой тематике

За последние 2021–2023 три неполных года более половины, а именно 147 журнальных статей из 259, индексированных в Scopus, опубликовано авторами из Китайской Народной Республики или имеют соавторов из этой страны, и только три статьи имеют авторов или соавторов из Российской Федерации. При поиске использовался запрос TITLE-ABS-KEY ((auxetic* OR "negative Poisson* ratio") AND (explosion OR blast OR impact)) AND (EXCLUDE (SRCTYPE, "p") OR EXCLUDE (SRCTYPE, "k") OR EXCLUDE (SRCTYPE, "d") OR EXCLUDE (SRCTYPE, "b")) AND (LIMIT-TO (PUBYEAR, 2023) OR LIMIT-TO (PUBYEAR, 2022) OR LIMIT-TO (PUBYEAR, 2021)). Остальные страны имеют четырех, пятикратное и большее отставание от Китая. Ведущими научно-исследовательскими организациями по этой тематике являются университеты:

Nanjing University of Science and Technology
Beijing Institute of Technology
Wuhan University of Technology
Huazhong University of Science and Technology
Jilin University
Shanghai Jiao Tong University
China University of Mining Technology, Beijing
Dalian University of Technology



1.4. Постановка задачи

Ауксетические метаматериалы в подавляющем большинстве случаев представляют собой сотовые многослойные структуры, состоящие из большого числа тонких пластин. Пластины имеют в общем случае переменную толщину и положительный коэффициент Пуассона. Изделия и конструкции из ауксетического метаматериала могут иметь разную форму, но наиболее распространены пластины постоянной толщины.

Таким образом задача исследования свободных колебаний пластин из ауксетического метаматериала разбивается на две подзадачи:

- исследование свободного колебания тонких пластин постоянной толщины с положительным коэффициентом Пуассона;
- исследование свободного колебания пластины постоянной толщины из ауксетического метаматериала с отрицательным коэффициентом Пуассона.

В последнее время увеличиваются и теоретические, и экспериментальные исследования по изготовлению и применению материалов и конструкций с отрицательным коэффициентом Пуассона [33], [34], [35], [36], [37], [38], [39]. Как известно, в механике долгое время принималось, что у реальных изотропных упругих материалов коэффициент Пуассона ν не бывает отрицательным. Отрицательный коэффициент Пуассона встречается, в основном, в специально синтезируемых искусственных материалах, таких как полимеры, полиэтилен, керамика, композиционные материалы, слоистые структуры. Для новых материалов, демонстрирующих аномальное поведение, коэффициент Пуассона принимает отрицательные значения и может по модулю в два раза превосходить принятые положительные значения [40].

Хотя к настоящему времени известно много примеров проявления данной особенности деформирования, исследования, посвященные влиянию отрицательного значения коэффициента Пуассона на динамическое поведение вязкоупругих тонкостенных элементов конструкций, в литературе не встречаются. Поэтому целью данной статьи является попытка проведения исследований по влиянию отрицательного коэффициента Пуассона на свободное колебание вязкоупругой пластины с точки зрения возможных технических приложений.

2 Materials and Methods

В случае однородного изотропного тела модули упругости одинаковы по всем направлениям. Существуют две независимые упругие константы. Обычно используются четыре постоянные величины: модуль Юнга E , модуль сдвига G , объёмный модуль упругости K и коэффициент Пуассона ν . Они связаны между собой двумя соотношениями:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (1)$$

Следовательно, только две из них являются независимыми величинами и упругие свойства изотропного тела определяются двумя упругими постоянными, в частности модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Для естественных изотропных материалов значения коэффициентов Пуассона находятся в пределах $0 \leq \nu \leq 0.5$. Для большинства металлов и сплавов диапазон его изменения составляет 0,25–0,35 [41]. На сегодняшний день все расчеты основаны на положительном коэффициенте Пуассона, обычно находящемся в диапазоне $1/4 \leq \nu \leq 1/3$, причем значение, соответствующее $\nu = 0.3$, является наиболее широко вычисляемым. Как видно из вышеприведенных соотношений диапазон коэффициента Пуассона для изотропных твердых тел составляет от -1 до 0,5, поэтому большой интерес представляет исследования динамики вязкоупругой пластины для отрицательных значений коэффициента Пуассона.

Рассмотрим вязкоупругую прямоугольную пластину толщиной h , со сторонами a и b , изготовленную из однородного изотропного материала.

При составлении уравнения движения можно использовать уравнение изгиба упругой пластины при действии распределенной статической нагрузки $q(x, y)$ [42]:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q(x, y), \quad (2)$$

где $w = w(x, y)$ это прогиб пластины в точке с координатами x и y ; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ это цилиндрическая жесткость пластины при изгибе; E это модуль упругости, ν это коэффициент Пуассона.

Заменяя в (2) в соответствии с принципом Д'Аламбера статическую нагрузку силой инерции $\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ получим уравнение колебаний упругой пластины:

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (3)$$

где $\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$; ρ это плотность материала пластины.

Линейные модели теории вязкоупругости элементов тонкостенных конструкций в геометрически и физически линейной постановке можно получить из уравнений теории упругости, по принципу Вольтерра [43]. Пользуясь принципом Вольтерра, из соответствующих уравнений колебания упругих стержней, балок, пластин и оболочек, путем замены D на $D(1-\Gamma^*)$ можно легко получить соответствующие им уравнения колебаний в вязкоупругой постановке, где Γ^* это интегральный оператор с ядром релаксации $\Gamma(t)$: $\Gamma^* \phi = \int_0^t \Gamma(t-\tau) \phi(\tau) d\tau$.

Исходя из вышесказанного, уравнение движения вязкоупругой пластины имеет вид:

$$D(1-\Gamma^*) \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q. \quad (4)$$

Таким образом, математическая модель задачи о колебаниях вязкоупругих пластин описывается системой интегрально-дифференциальных уравнений в частных производных вида (4) при соответствующих граничных и начальных условиях.

В общем случае граничные условия могут быть заданы различным образом. В частности:

1. Все края шарнирно оперты:

$$\text{при } x=0, a: w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0; \text{ при } y=0, b: w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$$

2. Две противоположные стороны шарнирно-оперты, а остальные две стороны жестко защемлены:

$$\text{при } x=0, a: w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0; \text{ при } y=0, b: w=0, \frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

3. Все края жестко защемлены:

$$\text{при } x=0, a: w=0, \frac{\partial w}{\partial x}=0; \text{ при } y=0, b: w=0, \frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Начальные условия для этих задач имеют следующий вид:

$$w(x, y, 0) = f(x, y), \quad \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial t} = F(x, y). \quad (5)$$

Решение уравнения (4), удовлетворяющие граничным условиям задачи, по методу Бубнова-Галеркина искомое в виде



$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \psi_{nm}(x, y), \quad (6)$$

где $w_{nm} = w_{nm}(t)$ это искомые функции времени; $\psi_{nm}(x, y)$, $n = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots, M$ это координатные функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям задачи.

Поставив (6) в (4), применив процедуру метода Бубунова-Галеркина, введя при этом следующие безразмерные величины

$$\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{w}{h}, \frac{q}{E} \left(\frac{b}{h} \right)^4, \omega t, \frac{\Gamma(t)}{\omega}, \lambda = \frac{a}{b}, \delta = \frac{b}{h} \quad (7)$$

и сохраняя прежние обозначения получена следующая система интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{\eta} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klmn} \ddot{w}_{nm} + (1 - \Gamma^*) \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{klmn} w_{nm} = 12(1 - \mu^2) \lambda^4 q_{kl}. \quad (8)$$

$$\text{Здесь } \eta = \frac{1}{4\pi^4 \lambda^4};$$

$$a_{klmn} = h \int_0^1 \int_0^1 \psi_{nm} \psi_{kl} dx dy; \quad b_{klmn} = h^3 \int_0^1 \int_0^1 (\psi_{nm,xxxx}^{IV} + 2\lambda^2 \psi_{nm,xyxy}^{IV} + \lambda^4 \psi_{nm,yyyy}^{IV}) \psi_{kl} dx dy;$$

$$q_{kl} = q \int_0^1 \int_0^1 \psi_{kl} dx dy.$$

Интегрирование системы (8) проводилось с помощью численного метода, основанного на использовании квадратурных формул [44], [45], [46], [47], [48]. Интегрируя полученную систему (8) два раза по t , можно записать ее в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klmn} w_{nm} &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klmn} (w_{0nm} + \dot{w}_{0nm} t) - \\ &- \eta \int_0^t \int_0^t \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (1 - \Gamma^*) b_{klmn} w_{nm} - 12(1 - \mu^2) \lambda^4 q_{kl} \right\} d\tau d\tau, \\ w_{mn}(0) &= w_{0mn}, \quad \dot{w}_{mn}(0) = \dot{w}_{0mn}; \quad k = 1, 2, \dots, M; \quad l = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (9)$$

Заменяя двойной интеграл одинарным, систему (9) можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klmn} w_{nm} &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klmn} (w_{0nm} + \dot{w}_{0nm} t) - \\ &- \eta \int_0^t (t - \tau) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (1 - \Gamma^*) b_{klmn} w_{nm} - 12(1 - \mu^2) \lambda^4 q_{kl} \right\} d\tau. \\ w_{mn}(0) &= w_{0mn}, \quad \dot{w}_{mn}(0) = \dot{w}_{0mn}; \quad k = 1, 2, \dots, M; \quad l = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (10)$$

Следующим этапом численного метода является регуляризация системы интегро-дифференциальных уравнений (10) с сингулярным ядром Колтунова-Ржаницына [49]

$$\Gamma(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad A > 0, \beta > 0, (0 < \alpha < 1). \quad (11)$$

С помощью замены переменных $t - \tau = z^{\frac{1}{\alpha}}, 0 \leq z \leq t^{\alpha}, (0 < \alpha < 1)$ интеграл при ядре Колтунова-Ржаницына с особенностью следующего вида

$$A \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \exp[-\beta(t - \tau)] w(\tau) d\tau \quad (12)$$

принимает вид

$$\frac{A}{\alpha} \int_0^{t^\alpha} \exp\left(-\beta z^{1/\alpha}\right) w\left(t - z^{1/\alpha}\right) dz. \quad (13)$$

Следовательно, систему (10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klmn} w_{nm} &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klmn} (w_{0nm} + \dot{w}_{0nm} t) - \\ &- \eta \int_0^t (t-\tau) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{klmn} \left(w_{nm} - \frac{A}{\alpha} \int_0^{t^\alpha} \exp\left(-\beta z^{1/\alpha}\right) w\left(t - z^{1/\alpha}\right) dz \right) - 12(1-\mu^2) \lambda^4 q_{kl} \right\} d\tau, \\ w_{mn}(0) &= w_{0mn}, \quad \dot{w}_{mn}(0) = \dot{w}_{0mn}; \quad k=1,2,\dots,M; \quad l=1,2,\dots,N. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что после замены переменных подынтегральная функция относительно z становится регулярной.

Полагая затем $t = t_i, t_i = i\Delta t, i=1,2,\dots$ (где $\Delta t = \text{const}$ это шаг интерполяции) и заменяя интегралы квадратурными формулами, для вычисления $w_{imn} = w_{mn}(t_i)$ получена следующая система:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klmn} w_{nm} &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klmn} (w_{0nm} + \dot{w}_{0nm} t) - \\ &- \eta \sum_{j=0}^{i-1} A_j (t_i - t_j) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{klmn} \left(w_{jnm} - \frac{A}{\alpha} \sum_{p=0}^j B_p e^{-\beta t_p} w_{j-p,nm} \right) - 12(1-\mu^2) \lambda^4 q_{kl} \right\}, \\ w_{mn}(0) &= w_{0mn}, \quad \dot{w}_{mn}(0) = \dot{w}_{0mn}; \quad k=1,2,\dots,M; \quad l=1,2,\dots,N, \end{aligned} \quad (15)$$

которая решается методом Гаусса.

$$\begin{aligned} \text{Здесь } A_0 &= \frac{\Delta t}{2}; \quad A_j = \Delta t, \quad j=1,2,\dots,i-1; \quad A_i = \frac{\Delta t}{2}; \quad B_0 = \frac{\Delta t^\alpha}{2}; \quad B_j = \frac{\Delta t^\alpha (j^\alpha - (j-1)^\alpha)}{2}; \\ B_p &= \frac{\Delta t^\alpha ((p+1)^\alpha - (p-1)^\alpha)}{2}, \quad p=1,2,\dots,j-1. \end{aligned}$$

Таким образом, благодаря двукратному интегрированию исходного уравнения (8) по времени t и использованию квадратурной формулы, получена система (15) для нахождения прогибов $w_{imn} = w_{mn}(t_i)$.

3 Results and Discussion

Здесь были рассчитаны и представлены в виде графиков на рисунках 1-5 изменения амплитудно-частотных характеристик упругой и вязкоупругих пластин с особым акцентом по влиянию отрицательного коэффициента Пуассона на механическую характеристику.

На основе вышеприведенного метода и алгоритма была разработана программа на языке Delphi.

На рисунках 1 и 2 соответственно для упругой и вязкоупругой квадратной пластины приведены изменения амплитудно-частотных характеристик при положительных значениях коэффициента Пуассона. Как видно из рисунков, в обоих случаях, частота колебаний незначительно зависят от коэффициента Пуассона, для упругой пластины (рис. 1) с течением времени значения амплитуды колебаний остаётся неизменной, а для вязкоупругой пластины (рис.2) уменьшается.

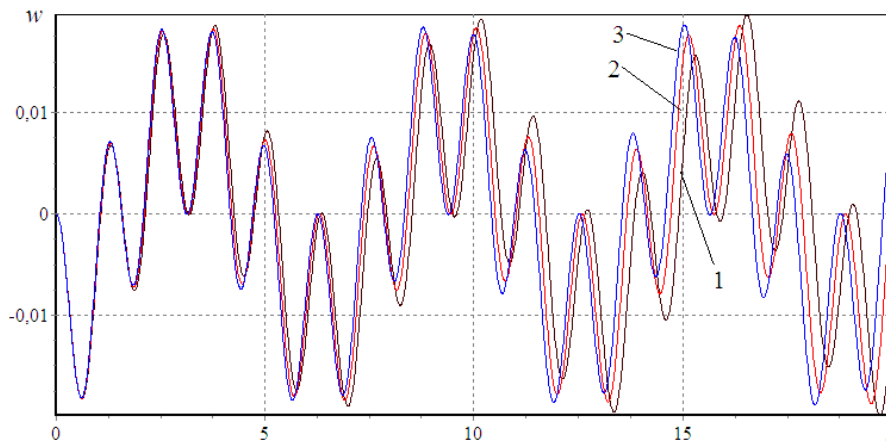


Рис.1. Зависимость прогиба от времени

Fig.1. Deflection versus time

$A = 0.0$; $q = 0$; $\lambda = 1$; $\delta = 25$

$\mu = 0.1$ (1); 0.25 (2); 0.4 (3)

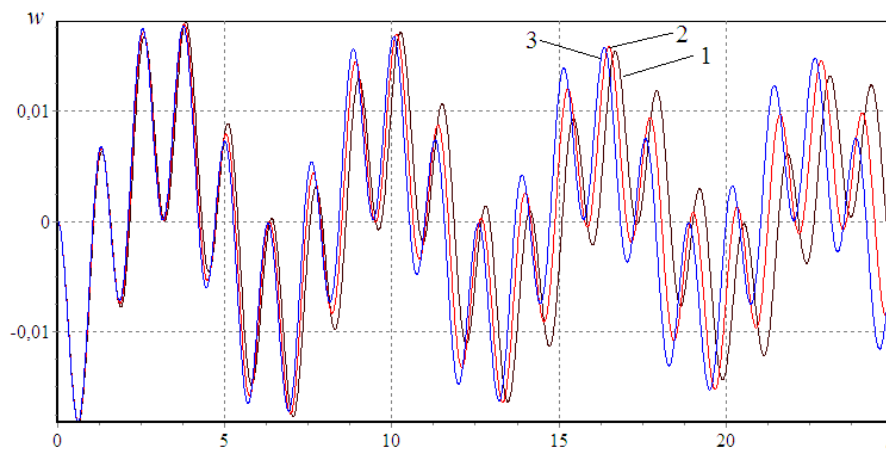


Рис.2. Зависимость прогиба от времени

Fig.2. Deflection versus time

$A = 0.05$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $q = 0$; $\lambda = 1$; $\delta = 25$

$\mu = 0.1$ (1); 0.25 (2); 0.4 (3)

На рисунках 3 и 4 соответственно для упругой и вязкоупругой квадратной пластины приведены изменения амплитудно-частотных характеристик при отрицательных значениях коэффициента Пуассона.

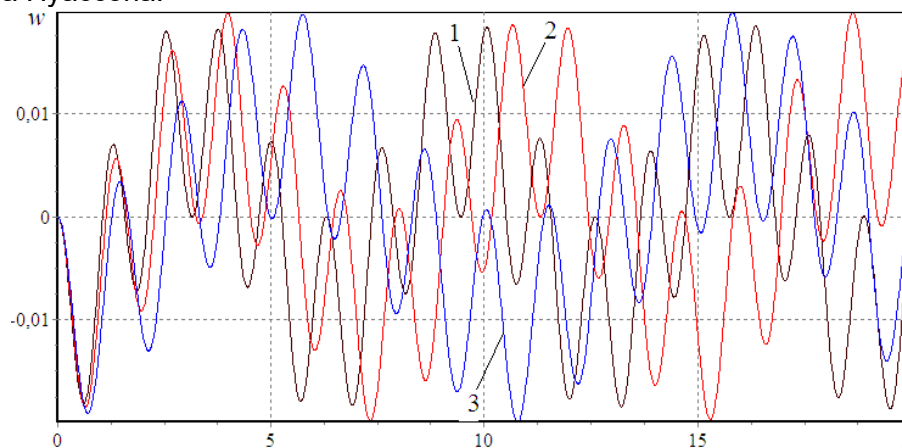


Рис.3. Зависимость прогиба от времени

Fig.3. Deflection versus time

$$A = 0.0; q = 0; \lambda = 1; \delta = 25$$

$$\mu = 0.25 \text{ (1); } -0.3 \text{ (2); } -0.7 \text{ (3)}$$

Для упругой пластины (рис. 3) с течением времени значения амплитуды колебаний оставаясь неизменной, частота колебаний уменьшается, а для вязкоупругой пластины (рис.4) и частота и амплитуда колебаний с течением времени уменьшается.

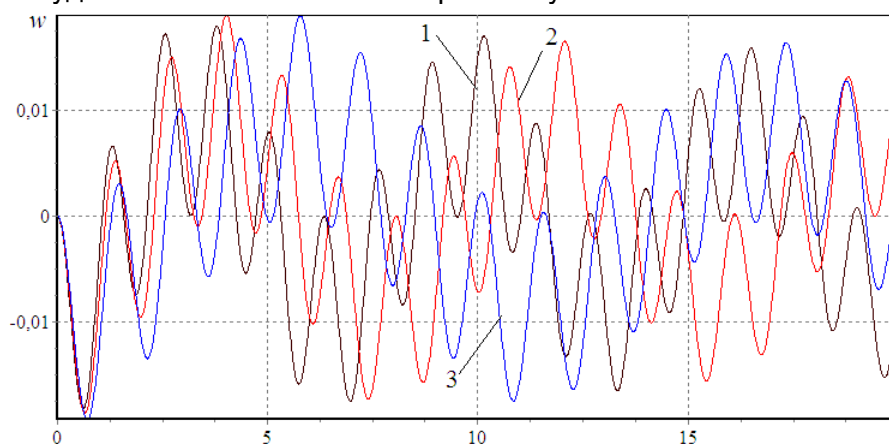


Рис.4. Зависимость прогиба от времени

Fig.4. Deflection versus time

$$A = 0.05; \alpha = 0.25; \beta = 0.05; q = 0; \lambda = 1; \delta = 25$$

$$\mu = 0.25 \text{ (1); } -0.3 \text{ (2); } -0.7 \text{ (3)}$$

На рис. 5 для вязкоупругой прямоугольной пластины приведены изменения амплитудно-частотных характеристик при отрицательных значениях коэффициента Пуассона. Здесь мы видим значительное влияние обоих параметров на амплитудно-частотные характеристики, т.е. с течением времени и амплитуда и частота колебаний уменьшаются.

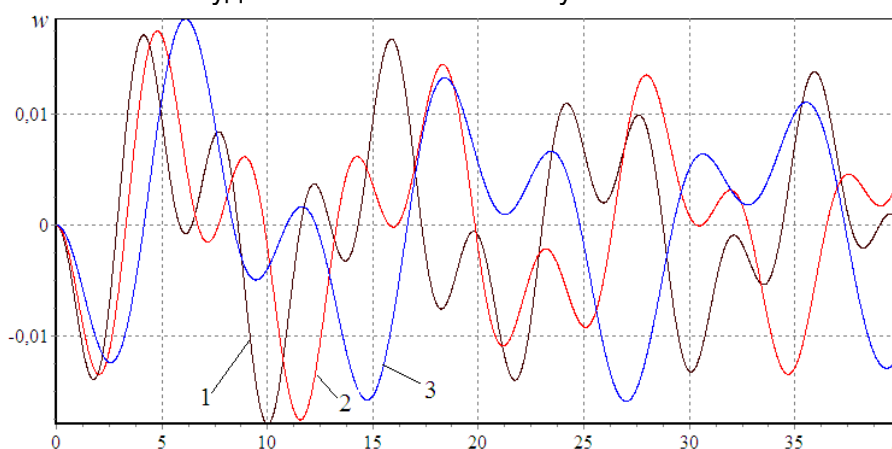


Рис.5. Зависимость прогиба от времени

Fig.5. Deflection versus time

$$A = 0.05; \alpha = 0.25; \beta = 0.05; q = 0; \lambda = 2; \delta = 25$$

$$\mu = 0.25 \text{ (1); } -0.3 \text{ (2); } -0.7 \text{ (3)}$$

Аналогичные результаты получены и для пластины, у которой две противоположные стороны шарнирно-оперты, а две другие жестко защемлены, а также для пластины у которой все стороны жестко защемлены.

Амплитудно-частотные характеристики незначительно зависят от коэффициента Пуассона пластины только тогда, когда кромки полностью защемлены. В других граничных условиях частота уменьшается по мере того, как коэффициент Пуассона пластины становится отрицательным. Это особенно четко проявляется по мере того, как значения коэффициента Пуассона становится сильно отрицательным.



Полученные результаты свидетельствуют о том, что коэффициент Пуассона пластины может быть выбран в качестве способа получения определенных желаемых механических свойств, таких как подавление частоты вибрации пластины.

4 Conclusions

В результате исследования разработана математическая модель, метод и компьютерная программа для оценки свободных колебаний изотропной вязкоупругой прямоугольной пластины метаматериала постоянной толщины с положительным и отрицательным коэффициентом Пуассона.

Оценено влияние на амплитудно-временные характеристики изменения отрицательного коэффициента Пуассона материала пластины.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Свободное колебание изотропной вязкоупругой прямоугольной пластины постоянной толщины в геометрически линейности постановке описывалась линейным интегродифференциальным уравнением.

2. Применение метода Бубнова–Галеркина, основанного на многочленной аппроксимации прогиба, с последующей дискретизацией пространственных переменных в каждый момент времени, сводит задачу о свободном колебании изотропной вязкоупругой прямоугольной пластины постоянной толщины к решению обыкновенного линейного интегродифференциального уравнения с постоянными коэффициентами со слабосингулярными ядрами.

3. Предлагаемый численный метод решения нераспадающегося линейного интегродифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, с использованием алгоритма устранения особенностей интегродифференциальных уравнений с сингулярным ядром типа Колтунова–Ржаницына, основанный на использовании квадратурных формул эффективен для решения задач о свободном колебании изотропной вязкоупругой пластины.

4. Установлено, что увеличение значения реологического параметра α ядра Колтунова–Ржаницына приводит к увеличению амплитуды колебаний. При этом α играет существенную роль по сравнению с параметром β . Параметр β не оказывает существенного влияния на изменение амплитуды колебаний.

5. Было установлено, что результаты вязкоупругой задачи, полученные с использованием экспоненциального ядра релаксации, практически совпадают с результатами упругой задачи. При использовании ядра Колтунова–Ржаницына различия между задачами упругости и вязкоупругости оказываются весьма существенными и составляют более 40%.

6. Метод, предложенный в работе, может быть использован для различных тонкостенных конструкций, типа пластины, панели и оболочки постоянной и переменной толщины с положительным и отрицательным коэффициентом Пуассона в геометрически линейной и нелинейной постановке.

7. Амплитудно-частотные характеристики не зависят от коэффициента Пуассона пластины только тогда, когда кромки полностью защемлены. В других граничных условиях частота уменьшаются по мере того, как коэффициент Пуассона пластины становится более отрицательным. Это особенно четко проявляется по мере того, как значения коэффициента Пуассона становится сильно отрицательным.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что в связи с бурным развитием технологий создания новых материалов с заданными свойствами, можно ожидать появления материалов, где коэффициент Пуассона пластины может быть выбран в качестве способа получения определенных желаемых механических свойств, таких как подавление частоты вибрации пластины.

5 Fundings

This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state assignment No. 075-03-2022-010 from 14 January 2022 (Additional agreement 075-03-2022-010/10 from 09 November 2022).



References

1. Bohara, R.P., Linforth, S., Nguyen, T., Ghazlan, A., Ngo, T. Anti-blast and -impact performances of auxetic structures: A review of structures, materials, methods, and fabrications. *Engineering Structures*. 2023. 276. DOI:10.1016/j.engstruct.2022.115377. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85143774800&doi=10.1016%2Fj.engstruct.2022.115377&partnerID=40&md5=c95bf5726db7642e752633455fce9ca4>.
2. Skripnyak, V. V., Chirkov, M.O., Skripnyak, V.A. Modeling the Mechanical Response of Auxetic Metamaterials to Dynamic Effects. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2021. (2). Pp. 144–152. DOI:10.15593/perm.mech/2021.2.13. URL: <https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/article/view/1786> (date of application: 22.03.2023).
3. Qi, C., Jiang, F., Yang, S. Advanced honeycomb designs for improving mechanical properties: A review. *Composites Part B: Engineering*. 2021. 227. Pp. 109393. DOI:10.1016/j.compositesb.2021.109393. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1359836821007642>.
4. Wei, L., Zhao, X., Yu, Q., Zhang, W., Zhu, G. In-plane compression behaviors of the auxetic star honeycomb: Experimental and numerical simulation. *Aerospace Science and Technology*. 2021. 115. DOI:10.1016/j.ast.2021.106797. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85106310029&doi=10.1016%2Fj.ast.2021.106797&partnerID=40&md5=454bbcacb7b5c2ef56ee343d5a7e5ff1>.
5. Sun, N., Wang, S., Zhou, K., Ma, W., Xu, B. FEA and Quasi-static Test on Energy Absorption Characteristic of Space Orthogonal Concave Honeycomb Structure with Negative Poisson's Ratio. *Journal of Physics: Conference Series*. 2022. 2160(1). DOI:10.1088/1742-6596/2160/1/012064. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85124232544&doi=10.1088%2F1742-6596%2F2160%2F1%2F012064&partnerID=40&md5=1708e8da496e5960d927fd90268486e9>.
6. Wei, Y.-C., Tian, M.-J., Huang, C.-Y., Wang, S.-W., Li, X., Hu, Q.-R., Yuan, M.-Q. Topological study about failure behavior and energy absorption of honeycomb structures under various strain rates. *Defence Technology*. 2022. DOI:10.1016/j.dt.2022.03.011.
7. Wang, Y., He, Q., Chen, Y., Gu, H., Zhou, H. In-plane dynamic crushing of a novel bio-inspired re-entrant honeycomb with negative Poisson's ratio. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2021. 43(10). DOI:10.1007/s40430-021-03169-0.
8. Michalski, J., Streck, T. Blast resistance of sandwich plate with auxetic anti-tetrachiral core. *Vibrations in Physical Systems*. 2020. 31(3). Pp. 1–8. DOI:10.21008/j.0860-6897.2020.3.16. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85098241564&doi=10.21008%2Fj.0860-6897.2020.3.16&partnerID=40&md5=57d64c22f2629538c2b64b50a35749ab>.
9. Luo, F., Zhang, S., Yang, D. Anti-explosion performance of composite blastwall with an auxetic re-entrant honeycomb core for offshore platforms. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2020. 8(3). DOI:10.3390/jmse8030182.
10. Sun, X., Tao, X., Wang, X., Li, J., Wang, L. Research on explosion-proof characteristics and optimization design of negative Poisson's ratio honeycomb material [负泊松比蜂窝材料抗爆炸特性及优化设计研究]. *Baozha Yu Chongji/Explosion and Shock Waves*. 2020. 40(9). DOI:10.11883/bzycj-2020-0011.
11. Lv, W., Li, D., Dong, L. Study on blast resistance of a composite sandwich panel with isotropic foam core with negative Poisson's ratio. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2021. 191. DOI:10.1016/j.ijmecsci.2020.106105.
12. Kalubadanage, D., Remennikov, A., Ngo, T., Qi, C. Close-in blast resistance of large-scale auxetic re-entrant honeycomb sandwich panels. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2021. 23(8). Pp. 4016–4053. DOI:10.1177/1099636220975450.
13. Luo, F., Yang, D. Protection performance analysis of auxetic structures under continuous explosive impact [连续爆炸冲击下负泊松比超材料防护结构性能研究]. *Zhendong yu*



- Chongji/Journal of Vibration and Shock. 2022. 41(2). Pp. 74–78 and 112. DOI:10.13465/j.cnki.jvs.2022.02.009. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85124479328&doi=10.13465%2Fj.cnki.jvs.2022.02.009&partnerID=40&md5=5ddf6aaf16b7c84200250cb6ef58d7cc>.
14. Lakes, R. Foam Structures with a Negative Poisson's Ratio. *Science*. 1987. 235(4792). Pp. 1038–1040. DOI:10.1126/science.235.4792.1038. URL: <https://www.science.org/doi/10.1126/science.235.4792.1038>.
 15. Meena, K., Singamneni, S. A new auxetic structure with significantly reduced stress concentration effects. *Materials & Design*. 2019. 173. Pp. 107779. DOI:10.1016/j.matdes.2019.107779. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0264127519302163>.
 16. Wu, W., Hu, W., Qian, G., Liao, H., Xu, X., Berto, F. Mechanical design and multifunctional applications of chiral mechanical metamaterials: A review. *Materials & Design*. 2019. 180. Pp. 107950. DOI:10.1016/j.matdes.2019.107950.
 17. Harris, J.A., McShane, G.J. Metallic stacked origami cellular materials: Additive manufacturing, properties, and modelling. *International Journal of Solids and Structures*. 2020. 185–186. Pp. 448–466. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2019.09.007. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85072613283&doi=10.1016%2Fj.ijsolstr.2019.09.007&partnerID=40&md5=6fa36b17886b7be20e3de93ebc877d77>.
 18. Chen, G., Zhang, P., Deng, N., Cai, S., Cheng, Y., Liu, J. Paper tube-guided blast response of sandwich panels with auxetic re-entrant and regular hexagonal honeycomb cores – An experimental study. *Engineering Structures*. 2022. 253. DOI:10.1016/j.engstruct.2021.113790. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85121917237&doi=10.1016%2Fj.engstruct.2021.113790&partnerID=40&md5=5063fe8b398a5c79d54c304b62ee4777>.
 19. Jiang, F., Yang, S., Qi, C., Liu, H.-T., Remennikov, A., Pei, L.-Z. Blast response and multi-objective optimization of graded re-entrant circular auxetic cored sandwich panels. *Composite Structures*. 2023. 305. DOI:10.1016/j.compstruct.2022.116494.
 20. Skripnyak, V. V, Chirkov, M.O., Skripnyak, V.A. Modeling the Mechanical Response of Auxetic Metamaterials to Dynamic Effects. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2021. (2). Pp. 144–152. DOI:10.15593/perm.mech/2021.2.13. URL: <https://ered.pstu.ru/index.php/mechanics/article/view/1786>.
 21. Wu, Q., Chen, Z., Xiong, J., Wang, Z., Yang, C. Computational Studies of Porous Head Protection Structures for Human Cranium under Impact Loading. *Acta Mechanica Solida Sinica*. 2021. 34(4). Pp. 477–493. DOI:10.1007/s10338-021-00222-2. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85102583088&doi=10.1007%2Fs10338-021-00222-2&partnerID=40&md5=f693283a055f361fa3adea5cdc95864a>.
 22. Zhou, G., Yan, P., Dai, S., Wang, Q., Li, X., Hao, Y., Wang, Y. Design optimization for protective shell of hydrogen cylinder for vehicle based on NPR structure. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2021. 64(1). Pp. 369–388. DOI:10.1007/s00158-021-02878-3. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85103345609&doi=10.1007%2Fs00158-021-02878-3&partnerID=40&md5=dea841b147f2dd1fbbbbb96c6a11fb1a3>.
 23. Lan, X.-K., Huang, Q., Zhou, T., Feng, S.-S. Optimal design of a novel cylindrical sandwich panel with double arrow auxetic core under air blast loading. *Defence Technology*. 2020. 16(3). Pp. 617–626. DOI:10.1016/j.dt.2019.09.010. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85078334323&doi=10.1016%2Fj.dt.2019.09.010&partnerID=40&md5=6b5a5525183393a69b25d3abccf3d15c>.
 24. Bohara, R.P., Linforth, S., Ghazlan, A., Nguyen, T., Remennikov, A., Ngo, T. Performance of an auxetic honeycomb-core sandwich panel under close-in and far-field detonations of high explosive. *Composite Structures*. 2022. 280. DOI:10.1016/j.compstruct.2021.114907. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0->



- 85118496784&doi=10.1016%2Fj.compstruct.2021.114907&partnerID=40&md5=7e76da90aa53c6de59834c689d4a5f98.
25. Thuy Anh, V.T., Quang, V.D., Duc, N.D., Thinh, P.N. Impact of blast and mechanical loads on the shear deformable stiffened sandwich plate with an auxetic core layer in thermal environment. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2022. 24(1). Pp. 663–695. DOI:10.1177/10996362211021912. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85107562693&doi=10.1177%2F10996362211021912&partnerID=40&md5=4d7b448d8bdb188a891c9b8e4922b313>.
 26. Arifurrahman, F., Critchley, R., Horsfall, I. Experimental and numerical study of auxetic sandwich panels on 160 grams of PE4 blast loading. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2021. 23(8). Pp. 3902–3931. DOI:10.1177/1099636220961756. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85091774355&doi=10.1177%2F1099636220961756&partnerID=40&md5=23165d0e461afcd3769756423be50d01>.
 27. Chen, G., Cheng, Y., Zhang, P., Liu, J., Chen, C., Cai, S. Design and modelling of auxetic double arrowhead honeycomb core sandwich panels for performance improvement under air blast loading. *Journal of Sandwich Structures and Materials*. 2021. 23(8). Pp. 3574–3605. DOI:10.1177/1099636220935563. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85087073533&doi=10.1177%2F1099636220935563&partnerID=40&md5=fa06134ab889352c22b3a20772441ea6>.
 28. Tarlochan, F. Sandwich structures for energy absorption applications: A review. *Materials*. 2021. 14(16). DOI:10.3390/ma14164731. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85113589172&doi=10.3390%2Fma14164731&partnerID=40&md5=a8dc22e294d980f755bfc71efe96399a>.
 29. Cong, P.H., Duc, N.D. Nonlinear dynamic analysis of porous eccentrically stiffened double curved shallow auxetic shells in thermal environments. *Thin-Walled Structures*. 2021. 163. DOI:10.1016/j.tws.2021.107748. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85103975469&doi=10.1016%2Fj.tws.2021.107748&partnerID=40&md5=74c250e788a6c2b11fc3ea468858f5ee>.
 30. Van Quyen, N., Van Thanh, N., Quan, T.Q., Duc, N.D. Nonlinear forced vibration of sandwich cylindrical panel with negative Poisson's ratio auxetic honeycombs core and CNTRC face sheets. *Thin-Walled Structures*. 2021. 162. DOI:10.1016/j.tws.2021.107571. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85101339248&doi=10.1016%2Fj.tws.2021.107571&partnerID=40&md5=bc730ff861c12d6ebac433a3e77be9c0>.
 31. Harris, J.A., McShane, G.J. Impact response of metallic stacked origami cellular materials. *International Journal of Impact Engineering*. 2021. 147. DOI:10.1016/j.ijimpeng.2020.103730. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85092235774&doi=10.1016%2Fj.ijimpeng.2020.103730&partnerID=40&md5=10beb217043909e52792562415da46bc>.
 32. Al-Rifaie, H., Sumelka, W. Improving the blast resistance of large steel gates-Numerical study. *Materials*. 2020. 13(9). DOI:10.3390/ma13092121. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85085495660&doi=10.3390%2Fma13092121&partnerID=40&md5=aa50be85502f61d56857ab8ffa046007>.
 33. Lim, T.C. *Auxetic Materials and Structures*. Springer Singapore, 2015. 587 p. ISBN:9789812872746.
 34. Koniok, D.A., Voitsekhovskiy, K.V., Pleskachevsky, Y.M., Shilko, S.V. Materials with negative Poisson's ratio. (The review). *Journal "Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii."* 2004. 10(1). Pp. 35–69.
 35. Prawoto, Y. Seeing auxetic materials from the mechanics point of view: A structural review on the negative Poisson's ratio. *Computational Materials Science*. 2012. 58. Pp. 140–153. DOI:10.1016/j.commatsci.2012.02.012.



36. Carneiro, V.H., Meireles, J., Puga, H. Auxetic materials — A review. *Materials Science-Poland*. 2013. 31(4). Pp. 561–571. DOI:10.2478/s13536-013-0140-6.
37. Saxena, K.K., Das, R., Calius, E.P. Three Decades of Auxetics Research – Materials with Negative Poisson's Ratio: A Review. *Advanced Engineering Materials*. 2016. 18(11). Pp. 1847–1870. DOI:<https://doi.org/10.1002/adem.201600053>.
38. Kolken, H.M.A., Zadpoor, A.A. Auxetic mechanical metamaterials. *RSC Adv*. 2017. 7(9). Pp. 5111–5129. DOI:10.1039/C6RA27333E.
39. Ren, X., Das, R., Tran, P., Ngo, T.D., Xie, Y.M. Auxetic metamaterials and structures: a review. *Smart Materials and Structures*. 2018. 27(2). Pp. 23001. DOI:10.1088/1361-665X/aaa61c.
40. Kazhaev, V.V., Semerikova, N.P. LONGITUDINAL WAVES IN THE ROD OF A MATERIAL WITH A NEGATIVE POISSON'S RATIO. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 2011. 4(4). Pp. 1509–1510. URL: http://www.vestnik.unn.ru/en/nomera?anum_eng=7388 (date of application: 22.03.2023).
41. Callister, W.D.J. *Materials Science and Engineering: An Introduction*. 7th ed. Wiley Publishers, 2007. 832 p. ISBN:978-0006970118.
42. Volmir, A.S. *The nonlinear dynamics of plates and shells*. USA, Ohio, Foreign Technology Division Wright-Patterson Air Force, 1974. 543 p.
43. Rabotnov, Y.N. *Elements of hereditary solid mechanics*. Moscow, Mir Publishers, 1980. 387 p.
44. Verlan, A.F., Abdikarimov, R.A., Eshmatov, K. Numerical modeling of nonlinear problems of the dynamics of viscoelastic systems with variable rigidity. *Electronic modeling*. 2010. 32(2). Pp. 3–14.
45. Mirsaidov, M., Abdikarimov, R., Khudainazarov, Sh., Sabirjanov, T. Damping of high-rise structure vibrations with viscoelastic dynamic dampers. *E3S Web Conf*. 2020. 224. Pp. 2020. DOI:10.1051/e3sconf/202022402020.
46. Khodzhaev, D., Abdikarimov, R., Normuminov, B. Dynamic stability of viscoelastic rectangular plates with concentrated masses. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. 896(1). Pp. 012030. DOI:10.1088/1757-899X/896/1/012030.
47. Normuminov, B., Abdikarimov, R., Mirsaidov, M., Khodzhaev, D., Mirzaev, B. Parametric vibrations of viscoelastic orthotropic cylindrical panels of variable thickness. *{IOP} Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. 869. Pp. 52034. DOI:10.1088/1757-899x/869/5/052034.
48. Abdikarimov, R., Usarov, D., Khamidov, S., Koraboshev, O., Nasirov, I., Nosirov, A. Free oscillations of three-layered plates. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. 883(1). Pp. 012058. DOI:10.1088/1757-899X/883/1/012058.
49. Badalov, F.B., Éshmatov, K., Yusupov, M. On certain methods of solving systems of integrodifferential equations encountered in viscoelasticity problems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1987. 51. Pp. 683–686.