



Research Article

Received: March 21, 2023

Accepted: April 18, 2023

Published: May 5, 2023

ISSN 2304-6295

# Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss

Kirsanov, Mikhail Nikolaevich<sup>1</sup>

1 Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; c216@ya.ru (K.M.N.)

## Keywords:

Truss; Induction; Maple; Natural frequency; Dunkerley method; Approximate solution; Lower estimate; Simplified method

## Abstract:

**The object of study** is a planar statically determinate truss with descending braces in the lattice. The task is to obtain a simplified formula for the dependence of the first natural oscillation frequency of the truss on the number of panels. It is assumed that the mass of the truss is concentrated in its nodes. The nodes perform vertical vibrations, the stiffness of all truss rods, including rods that model supports, is the same. **Method.** To determine the forces in the elements, the knot cutting method is used. The rigidity of the structure is calculated using the Maxwell – Mohr formula. The sum included in the Dunkerley method is replaced by an approximate formula, which greatly simplifies the solution. **Results.** A simple formula is obtained for estimating the first vibration frequency of a truss with an arbitrary number of panels. It is shown that the accuracy of the proposed method is higher than the accuracy of the original Dunkerley method and increases with the number of panels.

## 1 Введение / Introduction

На практике для расчета собственных частот колебаний стержневых конструкций применяют метод конечных элементов [1]. Численно-аналитический метод расчета колебаний регулярных структур применен в [2]. В [3] разработана новая эквивалентная динамическая модель для анализа связанных вибраций фермы космической антенны. Эксперименты на вибрацию большой развертываемой в космосе антенны с кольцевой ферменной конструкцией с предварительным анализом уменьшенной ее копии выполнены в [4]. Найдены собственные частоты и соответствующие формы колебаний. Для изучения механизма разрушения стальных арочных ферм, в условиях сильных землетрясений, в [5] была проведена серия испытаний на вибростенде. С помощью метода конечных элементов в работе оценено влияние форм крепления на разрушение конструкции и воздействие повреждений на напряженно-деформированное состояние системы. Результаты сравниваются с экспериментом.

В некоторых случаях при упрощении модели конструкции возможны и аналитические решения в виде оценки первой частоты снизу по методу парциальных частот Донкерлея или сверху по энергетическому методу Рэлея [6]. В статье Воробьева О.В. [7] в аналитической форме найдены обе эти оценки для плоской фермы. В [8] обсуждается использование метода Донкерлея для оценки собственных частот башенных конструкций, включая и асимметричную геометрию фермы. В качестве практического примера рассмотрен анализ колебаний асимметричной высоковольтной опоры ЛЭП. В [9] для расчета собственных частот используется метод Донкерлея в итеративной постановке. В работе [10] показано, что формула Донкерлея дает нижнюю границу основной частоты колебаний упругой системы, которую можно разделить на ряд отдельных компонентов с различной гибкостью. Использование полученной формулы иллюстрируется рассмотрением однородной консоли и трехслойной балки. Новое выражение для нижней границы основной собственной частоты конструкции приводится в [11] и исследуется его связь с формулой Донкерлея. Получена улучшенная оценка основной частоты,

Kirsanov, M.

Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss

2023; Construction of Unique Buildings and Structures; 108 Article No 10801. doi: 10.4123/CUBS.108.1.



которая применяется для приближенного выражения основной частоты системы грунт - конструкция, включающей структуру с одной степенью свободы, плоское жесткое основание и упругий грунт. Полученное приближение сравнивается с известными решениями.

Наибольший практический интерес представляют решения для регулярных ферм, содержащие порядок фермы (число периодических структур) в качестве параметра. Регулярными статически определимыми фермами занимались Hutchinson R.G. и Fleck N.A. [12], [13]. Большой вклад в теорию регулярных ферм и их классификацию внес Kaveh A. [14]. Объектом исследования [15] является пространственно-консольная статически определимая ферма, состоящая из трех плоских ферм с поперечной решетчатой системой, соединенных по длинным сторонам. В аналитическом виде методом Донкерлея находится зависимость первой собственной частоты колебаний фермы от количества панелей, размеров, веса, конструкции и свойств материала. В [16] исследуется статически определимая ферма с двумя пролетами и ромбовидной решеткой. Зависимость первой собственной частоты колебаний фермы от ее размеров, массы, а также количества панелей находится в аналитическом виде. Жесткость конструкции с массами, сосредоточенными в ее узлах, определяется по формуле Максвелла-Мора. Нижняя аналитическая оценка первой частоты вычисляется по формуле Донкерлея. Обобщение ряда частных решений для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей выполнено методом индукции.

Другой аналитический подход к анализу строительных конструкций — метод начальных функций. Формула зависимости первой частоты плоской фермы Финка от числа панелей выведена в [17]. В [18] представлены два подхода к построению приближенных аналитических решений изгиба прямоугольной тонкой пластины: метод суперпозиции, основанный на методе начальных функций, и метод, построенный с использованием функции Грина, в виде ортогонального ряда. Этот же метод с использованием системы компьютерной математики Maple применен и в [19]. Расчет ферм в нелинейной постановке выполнен в [20], [21]. Сравнительный анализ некоторых точных решений задачи о прогибе плоских регулярных ферм, полученных в системе Maple, выполнен в [22]. В [23] приведено аналитическое решение для первой частоты собственных колебаний пространственной конструкции по методу Донкерлея.

## 2 Материалы и методы / Materials and Methods

### 2.1 Конструкция фермы

Предлагаемый метод применяется к плоской регулярной ферме балочного типа с нисходящими раскосами (рис. 1). Ферма симметричная, число панелей равно  $2n$ .

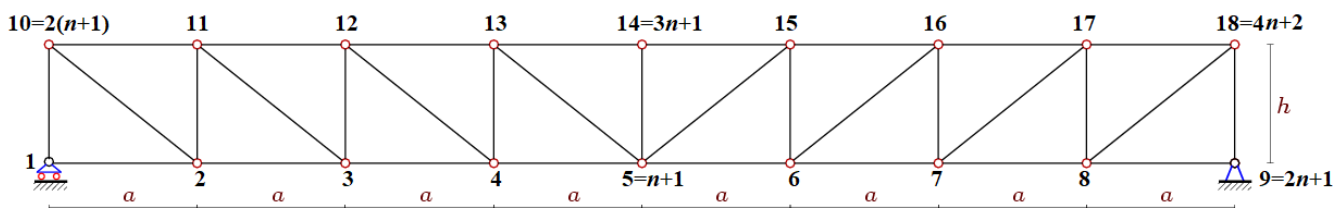


Рис. 1 – Схема фермы,  $n=4$   
Fig. 1 – The truss scheme,  $n=4$

Высота фермы  $h$ , длина пролета  $2na$ . Вся конструкция состоит из  $N = 8n + 4$  стержней, включая три стержня, моделирующие опоры. Число шарниров, наделенных массами  $m$ , равно  $K = 4n + 2$ . Таким образом, число степеней свободы этой системы равно  $K$ . Для расчета усилий в стержнях, которые потребуются для формулы Максвелла – Мора при расчете жесткости конструкции, необходимо пронумеровать узлы и стержни (рис. 1), и ввести в программу [24] координаты узлов. Начало координат выбрано в левой подвижной опоре:

$$x_i = x_{i+2n+1} = a(i-1), y_i = 0, y_{i+2n+1} = h, i = 1, \dots, 2n+1.$$

Порядок соединения стержней задается специальными списками концов стержней. Нижний пояс, например, кодируется следующими списками:  $\Phi_i = [i, i+1], i = 1, \dots, 2n$ .



## 2.2 Численный расчет частот колебаний фермы

В узлах фермы располагаются одинаковые массы  $m$ , совершающие вертикальные колебательные движения. Динамические уравнения системы записываются в матричной форме:

$$mI_K \ddot{Y} + D_K Y = 0. \quad (1)$$

Здесь  $Y$  — вектор вертикальных смещений масс в узлах фермы,  $\ddot{Y}$  — вектор ускорений,  $I_K$  — единичная матрица,  $D_K$  — матрица жесткости. Матрица податливости  $B_K$  является матрицей, обратной к матрице жесткости  $D_K$ , и вычисляется по формуле Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF). \quad (2)$$

Введены стандартные обозначения:  $b_{i,j}$  — перемещение узла  $i$  от действия единичной вертикальной безразмерной силы, приложенной к узлу  $j$ ,  $S_{\alpha}^{(i)}$  — усилия в стержне  $\alpha$  от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу  $i$ , где расположена масса  $m$ ,  $l_{\alpha}$  — длина стержня с номером  $\alpha$ ,  $EF$  — продольная жесткость одинаковая для всех стержней.

Для гармонических колебаний с частотой  $\omega$  очевидна связь  $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$ . Умножением уравнения (1) слева на матрицу  $B_K$ , задача сводится к проблеме собственных значений матрицы  $B_K$ :  $B_K Y = \lambda Y$ , где  $\lambda = 1/(\omega^2 m)$  — собственное число матрицы  $B_K$ ,  $\omega$  — собственная частота колебаний. Собственная частота колебаний выражается через собственные числа матрицы  $B_K$ :  $\omega = \sqrt{1/(m\lambda)}$ .

Аналитическое решение для фермы с произвольным числом панелей в общем случае получить невозможно. Методом Донкерлея можно оценить первую частоту снизу, методом Рэлея — сверху.

## 2.3 Оценка первой частоты по Донкерлею

Нижняя приближенная оценка для первой частоты по методу Донкерлея имеет вид [8]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (3)$$

где  $\omega_p$  — парциальные частоты. Для нахождения парциальных частот составляются уравнения движения отдельных масс:

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (4)$$

Коэффициент жесткости  $D_p$ , обратный к коэффициенту податливости, вычисляется по формуле Максвелла – Мора в предположении, что жесткости всех стержней одинаковы:

$$\delta_p = 1/D_p = \sum_{j=1}^N (S_j^{(p)})^2 l_j / (EF) = u_p / (h^2 EF). \quad (5)$$

Из (3) и (4) при  $y_p = A_p \sin(\omega t + \varphi)$  следует выражение для парциальной частоты  $\omega_p = \sqrt{D_p / m}$ . Отсюда:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \sum_{p=1}^K u_p / (h^2 EF) = m U_n / (h^2 EF). \quad (6)$$



Здесь введено обозначение:  $U_n = \sum_{p=1}^K u_p$ . Расчет серии ферм с разным числом панелей дает следующую последовательность сумм в (6):

$$\begin{aligned} U_1 &= a^3 + c^3 + 9h^3, \quad U_2 = (26a^3 + 10c^3 + 33h^3)/2, \\ U_3 &= (553a^3 + 105c^3 + 241h^3)/9, \quad U_4 = 3(252a^3 + 28c^3 + 53h^3)/4, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ . В общем случае

$$U_n = C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3. \quad (8)$$

Для определения трех коэффициентов в (8) последовательность (7) требуется продлить по крайней мере до 10 элементов, и получить общие члены последовательностей как решение рекуррентных уравнений в системе Maple:

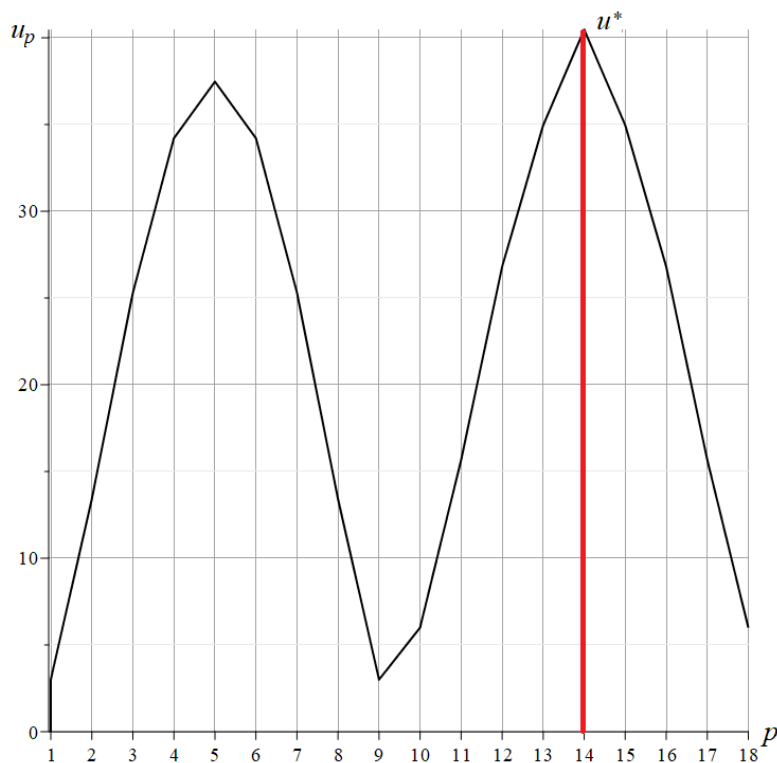
$$C_1 = (4n^2 - 1)(8n^2 + 7)/45, \quad C_2 = (4n^2 - 1)/3, \quad C_3 = (4n^3 + 11n^2 + 11n + 1)/(3n). \quad (9)$$

Оператор `rgf_findrecur` системы Maple, возвращающий рекуррентное уравнение для членов последовательности, требует последовательность четной длины. Выражения (9) получаются как решения этих уравнений с помощью оператора `rsolve`. Таким образом, оценка по Донкерлею первой частоты колебаний рассматриваемой фермы имеет вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)}}. \quad (10)$$

## 2.4 Упрощенный вариант расчета первой частоты

Формула (10) с коэффициентами (9) сравнительно компактна, однако она получена для простейшей фермы. Для более сложных регулярных конструкций коэффициентов в ней может быть больше, а сами выражения для них значительно сложнее. Связано это с тем, что вычисление коэффициентов содержит суммирование  $U_n = \sum_{p=1}^K u_p$ , что в аналитической форме бывает или сложно, или даже невозможно. Упростить преобразования можно, вычислив сумму по среднему значению ее слагаемого. На рисунке 2 показана зависимость  $u_p$  от номера узла, в котором расположена масса при  $a=2\text{м}$ ,  $h=3\text{м}$ . Сумма  $U_n$  ординат в значениях  $p=1,2,\dots,K$  на рисунке 2 пропорциональна площади, ограниченной кривой графика.



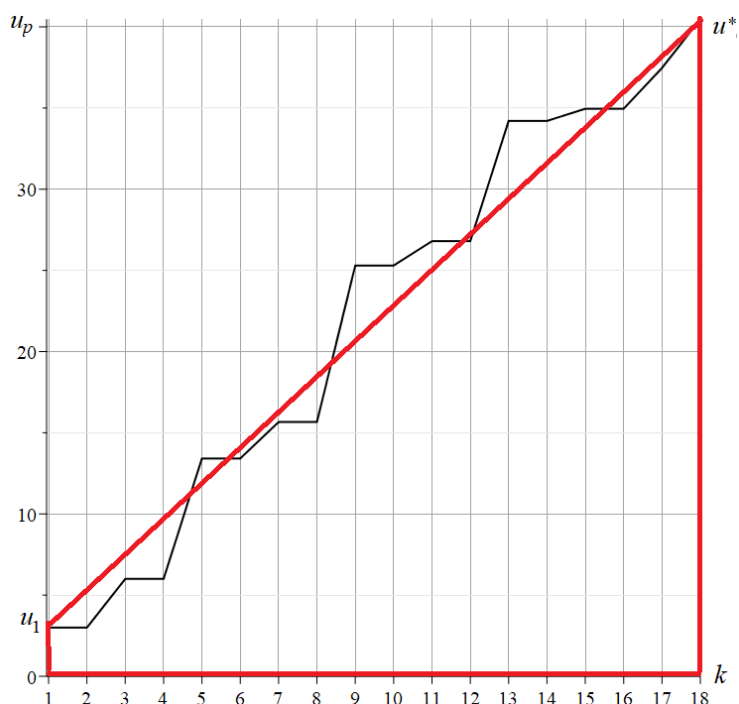
**Рис. 2 – Зависимость коэффициента  $u_p$  от номера узла фермы при  $n=4$**

**Fig. 2 – The dependence of the coefficient  $u_p$  on the number of the truss node for  $n=4$**

Если перестроить этот график, расположив коэффициенты  $u_p$ , соответствующие парциальным частотам, по возрастанию (рис. 3), то площадь фигуры, ограниченной кривой (та же сумма ординат) не изменится. При этом сумму  $U_n$  можно вычислить как площадь трапеции:

$$U_n = \sum_{p=1}^K u_p = K(u_1 + u^*) / 2,$$

где  $u_1, u^*$  — минимальное и максимальное значения коэффициента  $u_p$  (рис. 3).





**Рис. 3 – Коэффициенты  $u_p$  в порядке возрастания при  $n=4$**

**Fig. 3 – Coefficients  $u_p$  in ascending order at  $n=4$**

Трапеция представляет собой вписано-описанную фигуру по отношению к реальной фигуре, площадь которой вычисляется. Поэтому есть уверенность, что предлагаемая оценка будет близка к оценке Донкерлея.

Вычисление (10) при  $n=1,2,\dots$  дает следующую последовательность более простую для анализа, чем (7):

$$U_1 = (a^3 + c^3 + 9h^3)/2, U_2 = (6a^3 + 2c^3 + 7h^3)/2, \\ U_3 = (19a^3 + 3c^3 + 8h^3)/2, U_4 = (44a^3 + 4c^3 + 9h^3)/2, \dots$$

Коэффициенты в (8) находятся обобщением этой последовательности и имеют вид:

$$C_1 = n(2n^2 + 1)/6, C_2 = n/2, C_3 = (n + 5)/2. \quad (11)$$

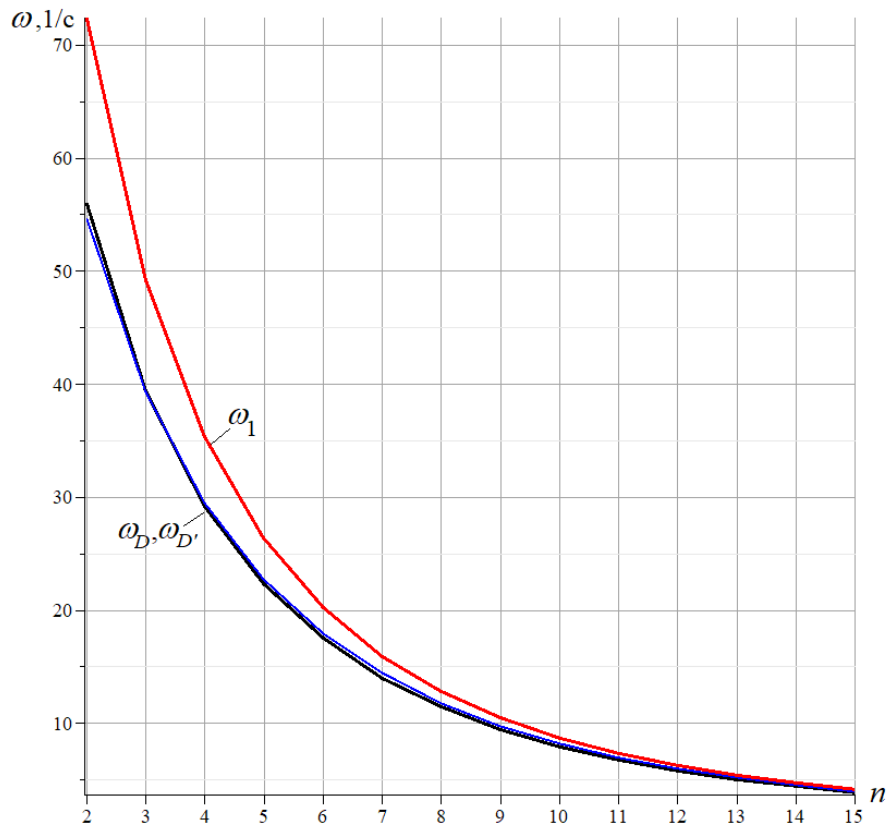
Последовательности коэффициентов при таком подходе получаются сравнительно простыми и не требуют применение системы Maple. В более сложных задачах для обобщения последовательностей можно применять операторы `rsolve` и `rgf_findrecur` или аналогичные операторы системы Mathematica [6], [25].

Таким образом, предлагаемое упрощенное решение по Донкерлею имеет вид:

$$\omega_{D'} = h \sqrt{\frac{6EF}{m(n(2n^2 + 1)a^3 + 3nc^3 + 3(n + 5)h^3)}}. \quad (12)$$

### 3 Результаты и их обсуждение / Results and Discussion

Для сравнения методов аналитических оценок можно использовать решение, полученное численно для всего спектра частот собственных колебаний фермы. Принята длина панели фермы:  $a = 2$  м, высота  $h = 4$  м. Площадь поперечных сечений стержней решетки и опорных стержней принимается одинаковой:  $F = 9$  см<sup>2</sup>. Массы в узлах  $m = 600$  кг, модуль упругости материала стержней  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа (сталь). На рисунке 4 представлены зависимость от числа панелей частоты  $\omega_D$  по стандартной формуле Донкерлея (10) с коэффициентами (9), частоты  $\omega_{D'}$  по упрощенной формуле Донкерлея (12) и найденная численно значение первой частоты  $\omega_1$  спектра системы с  $K$  степенями свободы.



**Рис. 4 – Зависимость от числа панелей первой частоты колебаний по трем методам**  
**Fig. 4 – Dependence on the number of panels of the first oscillation frequency by three methods**

Метод Донкерлея и его упрощенный вариант дают почти одинаковые значения (кривые практически сливаются). При этом на всем диапазоне значений числа панелей, как и ожидалось, оценки Донкерлея меньше первой частоты спектра, полученного численно с учетом всех степеней свободы. Как меняется погрешность приближенных решений при изменении числа панелей видно из рисунка 5. Вводятся величины относительных погрешностей:  $\varepsilon_D = |\omega_D - \omega_1| / \omega_1$  и  $\varepsilon_{D'} = |\omega_{D'} - \omega_1| / \omega_1$ . С увеличением порядка фермы погрешность предлагаемого упрощенного метода падает быстрее, чем погрешность метода Донкерлея, и достигает приемлемой величины в несколько процентов при  $n > 12$ .

Если при  $n=2$  погрешность метода Донкерлея несколько меньше погрешности предлагаемого метода, то при  $n = 15$  ситуация обратная. Точность упрощенного метода Донкерлея в несколько раз выше. Метод лучше всего подходит для оценки в аналитической форме первой частоты колебаний ферм с большим количеством панелей.

Предлагаемый метод предназначен для вывода аналитического решения для регулярных систем произвольного порядка. При фиксированном порядке рассчитываемой конструкции трудностей суммирования коэффициентов  $U_n$  не возникает, и для приближенного расчета первой частоты в символьной форме можно напрямую использовать метод Донкерлея или даже метод Рэлея, который дает значительно более высокую точность. Нет смысла также использовать упрощенный метод Донкерлея и в случае численного расчета первой частоты с применением специализированных пакетов. Современные численные пакеты легко справляются с задачей расчета спектра частот систем с многими степенями свободы.

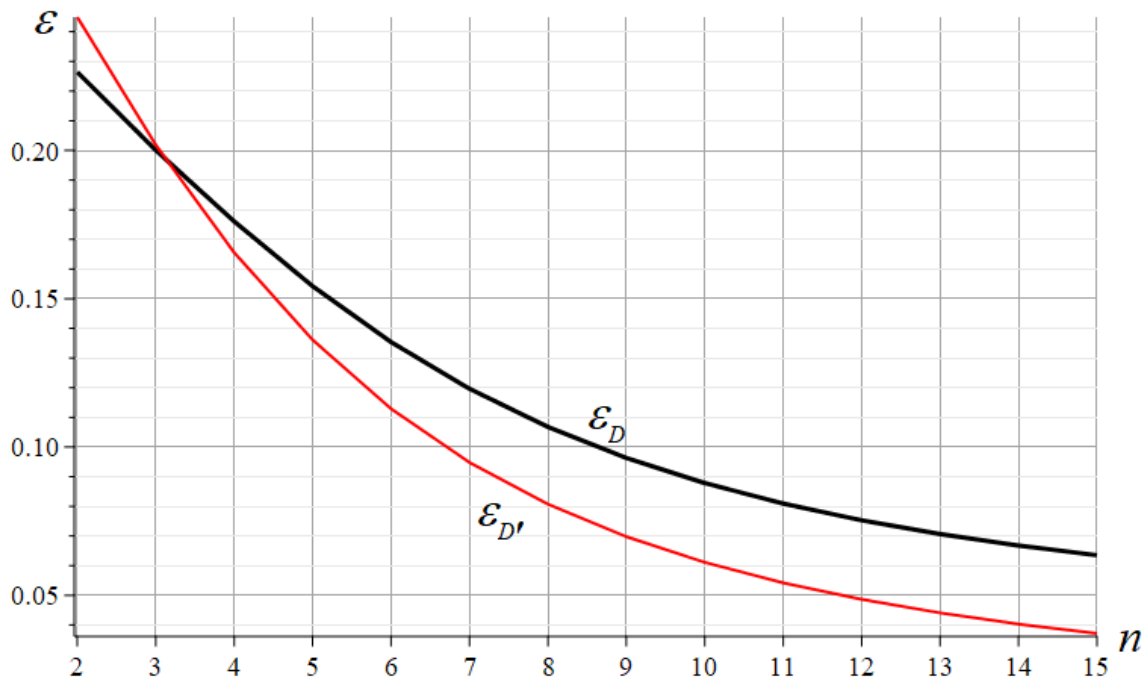


Рис. 5 – Сравнительная погрешность методов  
Fig. 5 – Comparative error of methods

Предлагаемый метод может быть использован для вывода формулы нижней границы первой частоты в зависимости от порядка регулярности, например, применительно к оценке численного решения, полученного для конструкции (не обязательно фермы) с весьма большим числом степеней свободы. Именно в этом случае численные методы начинают давать ошибки, обусловленные как неизбежным накоплением погрешностей округления ("проклятие размерности"), так и просто за счет ошибок моделирования сложной конструкции. Погрешность же предлагаемого метода с увеличением порядка регулярности только уменьшается.

## 4 Выводы/ Conclusions

Основные результаты работы:

1. Предложен метод нахождения первой частоты колебаний регулярной механической системы с многими степенями свободы. Метод позволяет в компактной аналитической форме оценить эту частоту снизу.
2. На примере решения задачи о колебании простой балочной фермы показано, что погрешность предлагаемого метода меньше, чем погрешность метода Донкерлея и уменьшается с увеличением числа панелей.

## 5 Fundings

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

## References

- 1 Ignatiev, V.A., Ignatiev, A.V. (2022) Finite Element Method in the Form of a Classical Mixed Method of Structural Mechanics (Theory, Mathematical Models and Algorithms). Publishing House ASV, Moscow. <https://iasv.ru>.
- 2 Grishanina, T.V. , Shklyarchuk, F.N. (2022) Numerical-Analytical Method for Calculating the Oscillations of Regular Structures. *Mechanics of composite materials and structures*, **28**, 175–186. <https://elibrary.ru/item.asp?id=49026364>.
- 3 Liu, M., Cao, D. and Zhu, D. (2021) Coupled Vibration Analysis for Equivalent Dynamic Model of the Space Antenna Truss. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier Inc., **89**, 285–298. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.07.013>.

Kirsanov, M.

Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss  
2023; Construction of Unique Buildings and Structures; **108** Article No 10801. doi: 10.4123/CUBS.108.1.





- 4 Siriguleng, B., Zhang, W., Liu, T. and Liu, Y.Z. (2020) Vibration Modal Experiments and Modal Interactions of a Large Space Deployable Antenna with Carbon Fiber Material and Ring-Truss Structure. *Engineering Structures*, Elsevier Ltd, **207**, 109932. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109932>.
- 5 Han, Q.H., Xu, Y., Lu, Y., Xu, J. and Zhao, Q.H. (2015) Failure Mechanism of Steel Arch Trusses: Shaking Table Testing and FEM Analysis. *Engineering Structures*, Elsevier Ltd, **82**, 186–198. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.10.013>.
- 6 Kirsanov, M. (2022) Model of a Spatial Dome Cover. Deformations and Oscillation Frequency. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **99**. <https://doi.org/10.4123/CUBS.99.4>.
- 7 Vorobev, O.V. (2020) Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **92**, 9204–9204. <https://doi.org/10.18720/CUBS.92.4>.
- 8 Trainor, P.G.S., Shah, A.H. and Popplewell, N. (1986) Estimating the Fundamental Natural Frequency of Towers by Dunkerley's Method. *Journal of Sound and Vibration*, Academic Press, **109**, 285–292. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(86\)80009-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(86)80009-8).
- 9 Levy, C. (1991) An Iterative Technique Based on the Dunkerley Method for Determining the Natural Frequencies of Vibrating Systems. *Journal of Sound and Vibration*, Academic Press, **150**, 111–118. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90405-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90405-9).
- 10 Rutenberg, A. (1976) A Lower Bound for Dunkerley's Formula in Continuous Elastic Systems. *Journal of Sound and Vibration*, Academic Press, **45**, 249–252. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(76\)90599-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(76)90599-X).
- 11 Enrique Luco, J. (2013) Bounds for Natural Frequencies, Dunkerley's Formula and Application to Soil-Structure Interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **47**, 32–37. <https://doi.org/10.1016/J.SOILDYN.2012.08.007>.
- 12 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2005) Microarchitected Cellular Solids - The Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **85**, 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>.
- 13 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2006) The Structural Performance of the Periodic Truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Pergamon, **54**, 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>.
- 14 Kaveh, A. (2013) Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity. *Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity*, Springer-Verlag Wien, **9783709115**, 1–463. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1565-7>.
- 15 Sviridenko, O. V and Komerzan, E. V. (2022) The Dependence of the Natural Oscillation Frequency of the Console Truss on the Number of Panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **101**, 10101. <https://doi.org/10.4123/CUBS.101.1>.
- 16 Petrenko, V.F. (2021) The Natural Frequency of a Two-Span Truss. *AlfaBuild*, 2001. <https://doi.org/10.34910/ALF.20.1>.
- 17 Petrichenko, E.A. (2020) Lower Bound of the Natural Oscillation Frequency of the Fink Truss. *Structural Mechanics and Structures*, **26**, 21–29. [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_44110287\\_71394021.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_44110287_71394021.pdf).
- 18 Goloskokov, D.P. and Matrosov, A. V. (2018) Approximate Analytical Approach in Analyzing an Orthotropic Rectangular Plate with a Crack. *Materials Physics and Mechanics*, Institute of Problems of Mechanical Engineering, **36**, 137–141. [https://doi.org/10.18720/MPM.3612018\\_15](https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15).
- 19 Goloskokov, D.P. (2014) Analyzing Simply Supported Plates Using Maple System. 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications, ICCTPEA 2014 - Proceedings, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 55–56. <https://doi.org/10.1109/ICCTPEA.2014.6893273>.
- 20 Galishnikova V.V. (2019) Nonlinear Numerical Stability Analysis of Space Trusses. *EG-ICE 2010*

Kirsanov, M.

Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss

2023; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **108** Article No 10801. doi: 10.4123/CUBS.108.1.



- 17th international workshop on intelligent computing in engineering.  
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43274656>.

- 21 Galishnikova, V. V and Pahl, P.J. (2018) Analysis of Frame Buckling without Sidesway Classification. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, **14**, 299–312. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-4-299-312>.
- 22 Tinkov, D. V. (2015) Comparative Analysis of Analytical Solutions to the Problem of Truss Structure Deflection. *Magazine of Civil Engineering*, **57**. <https://doi.org/10.5862/MCE.57.6>.
- 23 Kirsanov, M. (2021) Deformations And Spatial Structure Vibrations Frequency of The Rectangular Contour Type Cover: Analytical Solutions. *AlfaBuild*, **98**, 9805. <https://doi.org/10.4123/CUBS.98.5>.
- 24 Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N. and Serdjuks, D.O. (2020) Calculation of Deformations of a Cantilever-Frame Planar Truss Model with an Arbitrary Number of Panels. *Vestnik MGSU*, **4**, 510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>.
- 25 Zotos, K. (2007) Performance Comparison of Maple and Mathematica. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, **188**, 1426–1429. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.008>.