



Research Article

Received: June 9, 2023

Accepted: July 7, 2023

Published: July 24, 2023

ISSN 2304-6295

# Analytical calculation of the fundamental oscillation frequency of a multi-dome roof

Kirsanov, Mikhail Nikolaevich<sup>1</sup> <sup>1</sup> Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russian Federation; c216@ya.ru (K.M.N.)Correspondence: \* email [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru); contact phone +74953627314

## Keywords:

Spatial truss; Natural vibrations; Lower frequency estimate; Dunkerley method; Induction; Frequency spectrum

## Abstract:

**The object** of the study is a spatial model of a statically determinate truss of a regular type, consisting of separate domed hexagonal trusses connected in a row. Truss eigenfrequencies are investigated. **Method.** The lower bound of the first natural frequency is sought in analytical form. The Dunkerley partial frequency method is used. The stiffness of the structure is calculated using the Maxwell – Mohr formula, assuming that the stiffnesses of the elements are the same. The partial frequencies of the masses concentrated in the truss nodes are calculated from separate oscillation equations. Each mass is assumed to have three degrees of freedom. Several solutions for trusses with a successively increasing number of panels are generalized by induction to an arbitrary number of panels. For analytical transformations and calculation of common members of sequences of coefficients of the desired formula, operators of the Maple computer mathematics system are used. In numerical form, the natural frequency spectra of a family of regular trusses are searched for and analyzed. **Result.** The obtained dependence of the fundamental frequency on the number of panels has coefficients in the form of polynomials of order not higher than the fourth. Comparison of the analytical result with the first frequency of the entire frequency spectrum obtained numerically shows the high accuracy of the found formula. As the number of panels increases, the accuracy of the proposed solution increases. In the frequency spectrum, it is found that the highest frequency of natural vibrations does not depend on the order of the truss.

## 1 Введение / Introduction

Для расчета деформаций и собственных частот сооружений в инженерной практике, как правило, используется метод конечных элементов, реализуемый в различных специальных пакетах [1], [2]. В [3] при расчете пространственной модели антенны для космической связи использовались метод конечных элементов и балочная аналогия. Для расчета простых статически определимых регулярных ферм возможен и аналитический метод. При нахождении прогибов некоторых плоских ферм он реализован в [4], [5]. Нижняя граница основной собственной частоты колебаний плоских ферм в аналитической форме с помощью метода Донкерлея найдена в [6], [7]. Формула для нижней оценки собственных колебаний плоской регулярной фермы с прямолинейным верхним поясом и произвольным числом панелей получена в [8] с помощью системы компьютерной математики Maple. Аналитические решения для пространственных ферм встречаются реже. В [9] получена формула для прогибов пространственного контурного покрытия, треугольного в плане, при действии на него равномерно распределенной по узлам нагрузки. Аналитические оценки первой собственной частоты методом Донкерлея снизу и методом Рэлея сверху получены для шестигранного покрытия купольного типа в [10].

Kirsanov, M.

Analytical calculation of the fundamental oscillation frequency of a multi-dome roof

2023; Construction of Unique Buildings and Structures; 109 Article No 10906. doi: 10.4123/CUBS.109.6



В [11] для нахождения аналитического решения задачи о деформации элементов строительных конструкций используется система компьютерной математики Maple и метод суперпозиции, основанный на разложении по начальным функциям. В [12] для этих же целей применяется метод начальных функций и система Maple.

В справочнике [13] приведены формулы для аналитического решения задач о прогибе различных схем плоских статически определимых регулярных ферм балочного, арочного и рамного типа с произвольным числом панелей. Формулы для расчета прогиба плоских регулярных ферм в системе Maple получены в [14]–[16]. Нижняя оценка основной собственной частоты методом индукции выведена для плоских ферм [17]–[19]. Впервые вопрос существования схем регулярных статически определимых ферм поставили Hutchinson R.G. и Fleck N.A. [20], [21].

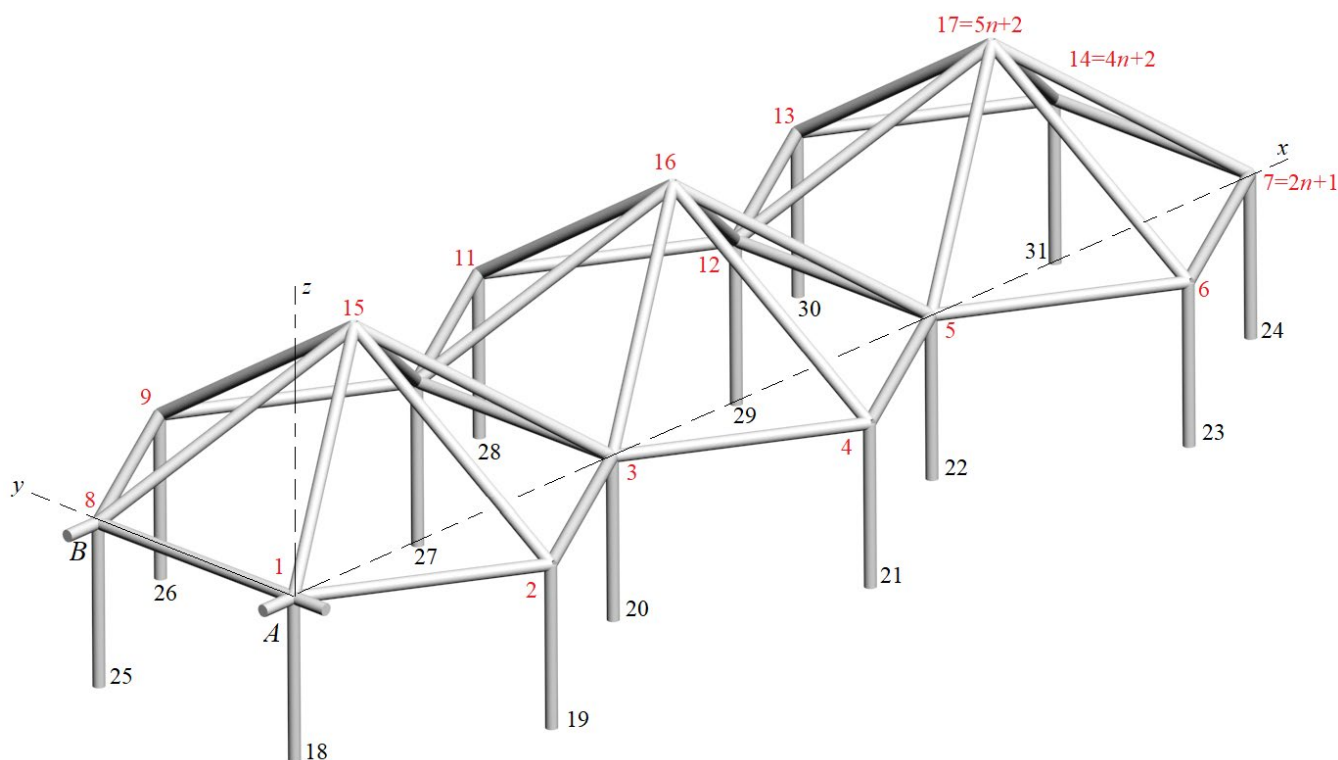
В работах Kaveh A. [22]–[24] применительно к задачам оптимизации рассмотрены некоторые общие вопросы анализа регулярных стержневых конструкций. Zok F.W., Lature R.M. и Begley M.R. в [25] используют теорию кристаллографии для классификации периодических стержневых систем. Расчет пространственной периодической стержневой антенной конструкции с заменой фермы на эквивалентную пластину выполнен в [26]. Эта же задача с помощью принципа энергетической эквивалентности и метода конечных элементов решается в [27].

В настоящей работе рассматривается пространственная схема статически определимой конструкции, состоящей из соединенных между собой ферм с шестигранными пирамидальными куполами. Ставится задача вывести формулы для зависимости нижней границы первой собственной частоты от числа панелей. В решении учитываются три степени свободы масс, сосредоточенных в узлах фермы. Численно анализируется спектр собственных частот системы.

## 2 Материалы и методы / Materials and Methods

### 2.1 Схема фермы

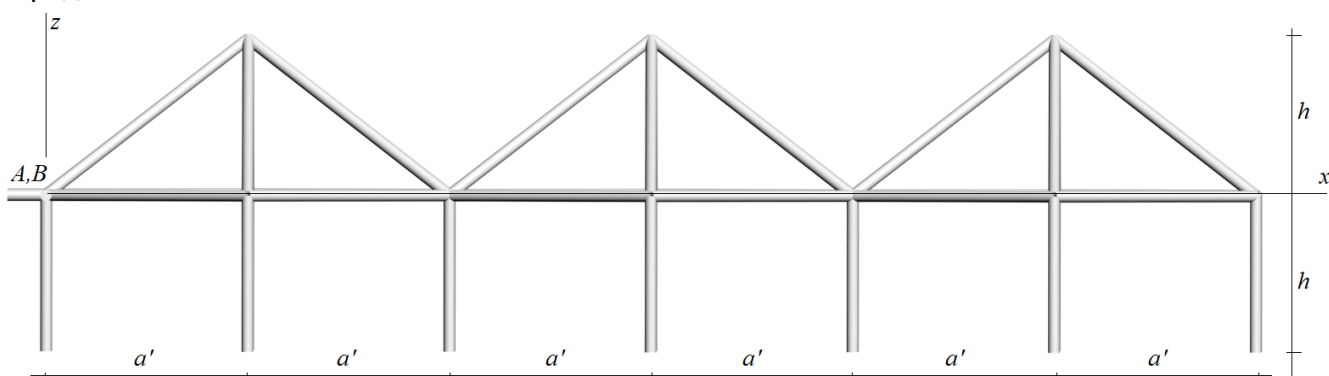
Исследуемая конструкция покрытия состоит из  $n$  отдельных ферм купольного типа с шестигранным основанием, соединенных между собой в ряд (рис. 1). Ферма регулярная, каждый элемент периодической структуры (панель) состоит из шести стержней купола, шести стержней контура длиной  $a$  и шести опорных стоек высотой  $h$ . Купол имеет высоту  $h$  (рис. 2). Опора  $A$ , составленная из стойки и двух горизонтальных связей, эквивалентна сферическому шарниру, опора  $B$  представляет собой цилиндрический шарнир. Ферма содержит  $\eta = 15n + 6$  стержней, включая  $4n + 2$  вертикальных опорных стоек.





**Рис. 1. – Схема фермы,  $n=3$**   
**Fig. 1. – Truss scheme,  $n=3$**

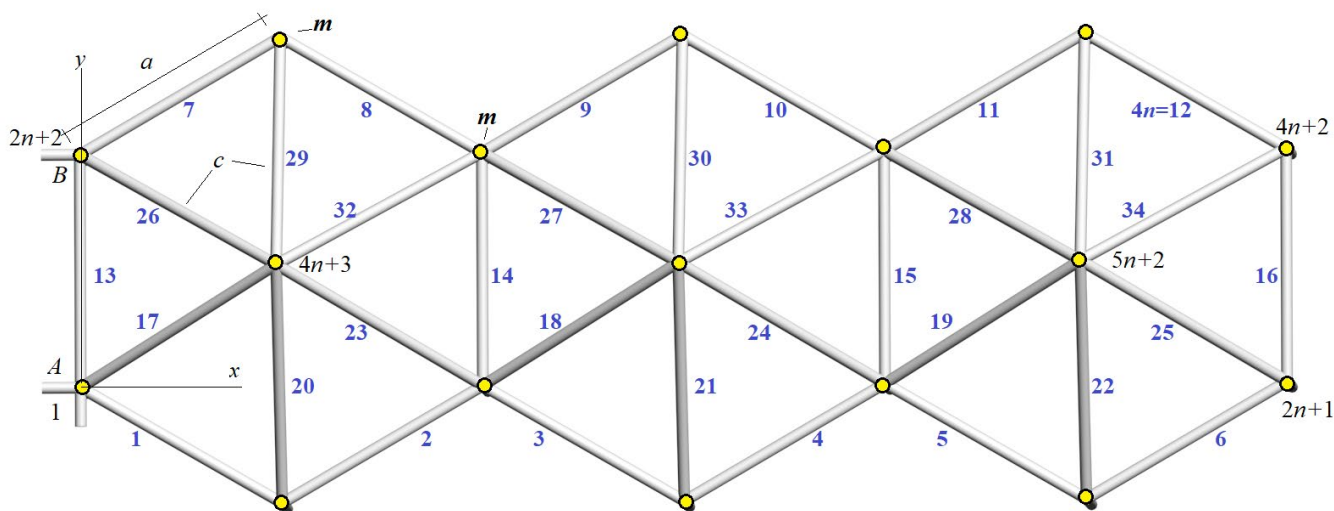
Раскосы купола имеют длину  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ . Общая длина покрытия из  $n$  панелей  $na\sqrt{3}$ . Все стержни конструкции соединены между собой шарнирно. Конструкция статически определимая.



**Рис. 2. – Размеры фермы,  $a' = a\sqrt{3} / 2, n=3$**

**Fig. 2. – Truss dimensions,  $a' = a\sqrt{3} / 2, n=3$**

Расчет усилий в стержнях производится методом вырезания узлов в программе на языке символьной математики Maple [28]. Стержни и узлы нумеруются. В текст программы вводятся координаты шарнирных узлов. Начало координат выбрано в узле  $A$ .



**Рис. 3. – Расположение масс и номера стержней,  $n=3$**   
**Fig. 3. – Location of the masses and numbers of elements,  $n=3$**

Координаты узлов по контуру конструкции имеют вид:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i+2n+1} = a(i-1)\sqrt{3} / 2, \\ y_i &= -((-1)^i + 1)a / 2, \quad z_i = z_{i+2n+1} = 0, \\ y_{i+2n+1} &= ((-1)^i + 1)a / 2 + a, \quad i = 1, \dots, 2n + 1. \end{aligned}$$

Координаты вершин:

$$x_{i+4n+2} = a(2i-1)\sqrt{3} / 2, \quad y_{i+4n+2} = a / 2, \quad z_{i+4n+2} = h, \quad i = 1, \dots, n.$$

Координаты оснований боковых стоек:

$$x_{i+5n+2} = x_i, \quad y_{i+5n+2} = y_i, \quad z_{i+5n+2} = -h, \quad i = 1, \dots, 4n + 2.$$



Порядок соединения стержней в узлы вводится в программу при помощи списков номеров концов соответствующих стержней, по аналогии с заданием графов в дискретной математике. Стержни контура, например, имеют следующие номера концов (рис. 3):

$$\Phi_i = [i, i + 1], \quad \Phi_{i+2n} = [i + 2n + 1, i + 2n + 2], \quad i = 1, \dots, 2n.$$

Списки концов стержней не имеют ориентацию, выбор начала и конца стержня не влияет на решение. Стержни шестигранных пирамид кодируются в двойных циклах:

$$\begin{aligned} \Phi_{i+(4+j)n+1} &= [2i - 2 + j, i + 4n + 2], \\ \Phi_{i+(7+j)n+1} &= [2i - 1 + 2n + j, i + 4n + 2], \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, 3. \end{aligned}$$

## 2.2 Расчет усилий в стержнях

Расчет жесткости конструкции, необходимый для определения собственных частот, выполняется по формуле Максвелла – Мора. Необходимые для этой формулы усилия в стержнях определяются из уравнений равновесия узлов в проекции на оси координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Система уравнений равновесия узлов записывается в матричном виде  $\mathbf{GS}=\mathbf{B}$ , где  $\mathbf{G}$ — матрица направляющих косинусов усилий, рассчитанных по координатам узлов и спискам номеров концов стержней  $\Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, \eta$ ,  $\mathbf{S}$  — вектор неизвестных усилий и реакций опор,  $\mathbf{B}$  — вектор нагрузок на узлы. На каждый узел фермы отводится по три строки матрицы  $\mathbf{G}$  и три соответствующих элемента вектора нагрузок. В элементы вектора нагрузок  $\Psi_{3i-2}, \Psi_{3i-1}, \Psi_{3i}$ , где  $i$  — номер узла, записываются нагрузки на этот узел соответственно в проекции на ось  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Проекции единичных векторов усилий в уравнениях равновесия узлов на оси координат вычисляются по данным о координатах узлов и порядку соединений стержней в узлах:

$$l_{x,i} = (x_{\Phi_{i,1}} - x_{\Phi_{i,2}}) / l_i, \quad l_{y,i} = (y_{\Phi_{i,1}} - y_{\Phi_{i,2}}) / l_i, \quad l_{z,i} = (z_{\Phi_{i,1}} - z_{\Phi_{i,2}}) / l_i, \quad i = 1, \dots, \eta,$$

где  $l_i = \sqrt{l_{x,i}^2 + l_{y,i}^2 + l_{z,i}^2}$  — длина стержня  $i$ . В число неизвестных усилий входят усилия в стержнях и реакции опор. Матрица коэффициентов уравнений равновесия заполняется по строкам. Каждые три строки соответствуют одному узлу и уравнениям проекций на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно:

$$\begin{aligned} G_{3\Phi_{i,1}-2,i} &= l_{x,i} / l_i, \quad G_{3\Phi_{i,1}-1,i} = l_{y,i} / l_i, \quad G_{3\Phi_{i,1},i} = l_{z,i} / l_i, \\ G_{3\Phi_{i,2}-2,i} &= -l_{x,i} / l_i, \quad G_{3\Phi_{i,2}-1,i} = -l_{y,i} / l_i, \quad G_{3\Phi_{i,2},i} = -l_{z,i} / l_i. \end{aligned}$$

Проекции усилий, приложенных к разным концам одного стержня, имеют противоположные знаки.

## 2.3 Собственная частота колебаний

Принято, что масса фермы сосредотачивается только в ее узлах равномерно по всей конструкции. Каждая масса имеет три степени свободы. Число степеней свободы рассматриваемой модели фермы  $K = 3(5n + 2)$ .

Система дифференциальных уравнений колебаний масс имеет матричный вид:

$$\mathbf{M}_K \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}_K \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

где  $\mathbf{U}$  – вектор перемещений масс длиной  $K$ ,  $\mathbf{D}_K$  – матрица жесткости системы,  $\mathbf{M}_K$  – матрица инерции,  $\ddot{\mathbf{U}}$  — вектор ускорений. Если массы одинаковые, то матрица инерции пропорциональна единичной матрице  $\mathbf{M}_K = m\mathbf{I}_K$ . Элементы матрицы податливости  $\mathbf{B}_K$ , обратной к матрице жесткости  $\mathbf{D}_K$ , в случае одинаковых жесткостей стержней вычисляются по формуле Максвелла-Мора:



$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{\eta} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF) \quad (2)$$

где  $S_{\alpha}^{(i)}$  — усилие в стержне  $\alpha$  от действия единичной силы в узле  $i$ , приложенной по направлению перемещения. Умножением уравнения (1) слева на матрицу податливости  $\mathbf{B}_K$  задачу можно свести к проблеме собственных чисел матрицы  $\mathbf{B}_K$ :  $\mathbf{B}_K \mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}$ , где  $\lambda = 1 / (m\omega^2)$  — собственное число матрицы  $\mathbf{B}_K$ ,  $\omega$  — собственная частота колебаний. Здесь использовано тождество  $\ddot{\mathbf{U}} = -\omega^2 \mathbf{U}$ , справедливое для гармонических колебаний.

Формула для вычисления частоты колебаний имеет вид:  $\omega = \sqrt{1 / (m\lambda)}$ .

Получить значения частот собственных колебаний для фермы с произвольным числом панелей в общем случае можно только в численной форме. Для этого можно использовать оператор Eigenvalues системы Maple.

Нижнюю границу первой частоты дает формула Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^K \omega_i^{-2} \quad (3)$$

где  $\omega_i$  — парциальная частота колебания массы  $m$ , расположенной в узле  $i$ . Известны другие варианты этой формулы [29,30]. При вычислении парциальных частот  $\omega_i$  уравнение (1) имеет скалярную форму:

$$m\ddot{u}_i + d_i u_i = 0,$$

где  $u_i$  — перемещение массы,  $\ddot{u}_i$  — вектор ускорений,  $d_i$  — скалярный коэффициент жесткости ( $i$  — номер массы). Частота колебаний груза  $\omega_i = \sqrt{d_i / m}$ . Коэффициент жесткости, обратный коэффициенту податливости, определяется по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_i = 1 / d_i = \sum_{\alpha=1}^{n_x} (\tilde{S}_{\alpha}^{(i)})^2 l_{\alpha} / (EF_{\alpha}) \quad (4)$$

Здесь обозначено  $\tilde{S}_{\alpha}^{(i)}$  — усилия в стержне с номером  $\alpha$  от действия единичной силы, приложенной к узлу  $i$ . Из (3) и (4) следует:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{i=1}^K \frac{1}{d_i} = m \sum_{i=1}^K \delta_i = m \sum_{i=1}^K \sum_{\alpha=1}^{\eta} (\tilde{S}_{\alpha}^{(i)})^2 l_{\alpha} / (EF_{\alpha}) = m(\Sigma_x + \Sigma_y + \Sigma_z).$$

Для удобства вычисляются три отдельные суммы, соответствующие колебаниям по оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Величина  $\Sigma_x$ , например, состоит из суммы отдельных прогибов по направлению оси  $x$  в узлах фермы от действия единичных сил, направленных по оси  $x$ . Аналогичный смысл имеют и два других слагаемых. Последовательный расчет  $\Sigma_x$  в аналитической форме в системе Maple при различных  $n$  дает следующие значения:

$$\begin{aligned} n = 1 : \Sigma_x &= (503a^3 + 152c^3 + 152h^3) / (36a^2 EF), \\ n = 2 : \Sigma_x &= (1751a^3 + 846c^3 + 1066h^3) / (54a^2 EF), \\ n = 3 : \Sigma_x &= (2065a^3 + 1236c^3 + 1676h^3) / (36a^2 EF), \\ n = 4 : \Sigma_x &= (799a^3 + 542c^3 + 762h^3) / (9a^2 EF), \dots \end{aligned}$$





В общем случае:  $\Sigma_x = (C_{1x}a^3 + C_{2x}c^3 + C_{3x}h^3) / (a^2EF)$ , где общие члены последовательностей коэффициентов в этих выражениях получаются обработкой решений для  $n=1,2,\dots,10$  операторами системы:

$$\begin{aligned}C_{1x} &= (350n^2 + 943n + 216) / 108, \\C_{2x} &= n(11 + 65) / 18, \\C_{3x} &= n(305n - 77) / 54.\end{aligned}$$

Аналогично обобщение сумм  $\Sigma_y$  для колебаний по оси  $y$ , рассчитанных для ферм различного порядка, дает решение  $\Sigma_y = (C_{1y}a^3 + C_{2y}c^3 + C_{3y}h^3) / (a^2EF)$ , где:

$$\begin{aligned}C_{1y} &= (20n^4 + 136n^3 + 64n^2 + 87n + 36) / 12, \\C_{2y} &= n(15n^3 + 12n^2 + 54n + 31) / 6, \\C_{3y} &= n(25n^3 + 38n + 49) / 6.\end{aligned}$$

Обобщение сумм  $\Sigma_z$  (колебания по вертикали) дает решение  $\Sigma_z = (C_{1z}a^3 + C_{2z}c^3 + C_{3z}h^3) / (h^2EF)$  с коэффициентами  $C_{1z} = C_{2z} = n / 6$ ,  $C_{3z} = 25n / 6 + 2$ .

В результате нижняя оценка для первой собственной частоты свободных колебаний фермы по методу Донкерлея принимает вид:

$$\omega_D = \sqrt{\frac{EF}{m((C_{1xy}a^3 + C_{2xy}c^3 + C_{3xy}h^3) / a^2 + (C_{1z}a^3 + C_{2z}c^3 + C_{3z}h^3) / h^2)}}, \quad (5)$$

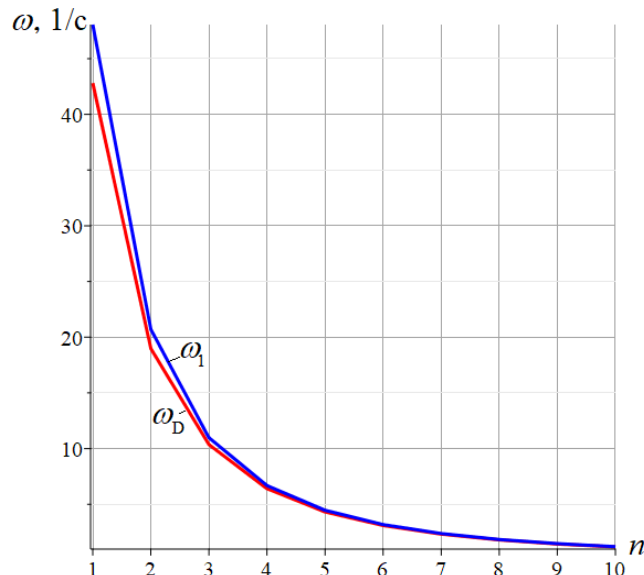
где

$$\begin{aligned}C_{1xy} &= C_{1x} + C_{1y} = (90n^4 + 612n^3 + 463n^2 + 863n + 270) / 54, \\C_{2xy} &= C_{2x} + C_{2y} = n(45n^3 + 36n^2 + 227n + 104) / 18, \\C_{3xy} &= C_{3x} + C_{3y} = n(225n^3 + 647n + 364) / 54.\end{aligned}$$

### 3 Результаты и обсуждения / Results and Discussion

#### 3.1 Пример

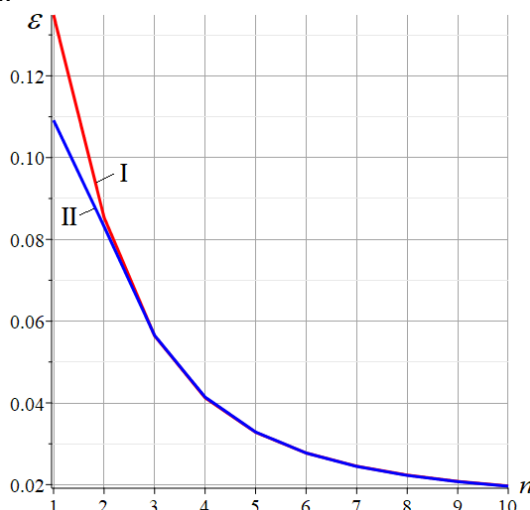
Погрешность найденного приближенного аналитического решения можно оценить на примере. Зависимости частоты  $\omega_D$  от числа панелей, вычисленной по формуле (5) и частоты  $\omega_1$ , полученной численно, как минимальная частота всего спектра собственных частот конструкции при  $a = 3\text{ м}$ ,  $h = 5\text{ м}$ , представлены на рисунке 4. Масса грузов в узлах равна 400 кг. Модуль упругости стержней конструкции принят равным  $E = 2,1 \cdot 10^5\text{ МПа}$ , площадь поперечных сечений  $F = 36\text{ см}^2$ . С увеличением числа панелей первая частота  $\omega_1$  собственных колебаний фермы, полученная численно, и оценка  $\omega_D$  Донкерлея (5) сближаются. Зависимость относительной погрешности  $\varepsilon_D = |\omega_D - \omega_1| / \omega_1$  от числа панелей приведена на рисунке 5.



**Рис. 4. – Первая частота колебаний, полученная двумя способами в зависимости от числа панелей**

**Fig. 4. – The first oscillation frequency obtained in two ways depending on the number of panels**

В зависимости от числа панелей погрешность приближенного решения меняется от 13%, при  $n = 1$ , до 2%. Степень приближения решения по Донкерлею несколько увеличивается при увеличении высоты конструкции.



**Рис. 5. – Относительная погрешность полученной оценки (5). I —  $h=3$  м; II —  $h=5$  м;**

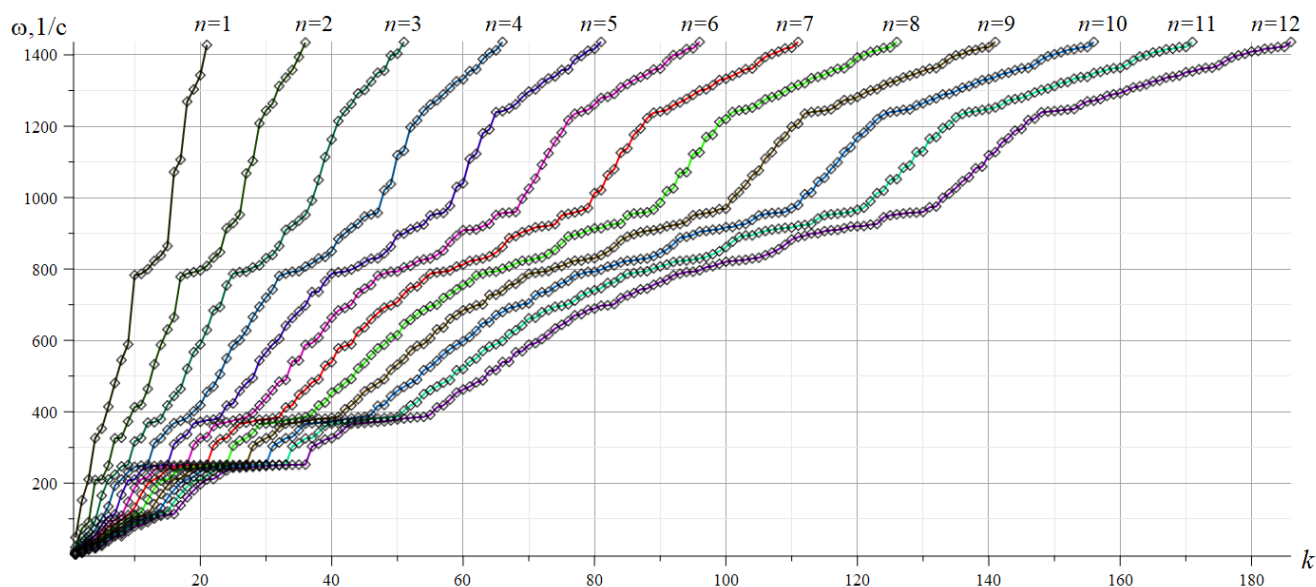
**Fig. 5. – Relative error of the obtained estimate (5). I —  $h=3$  m; II —  $h=5$  m**

По сравнению с известными решениями для оценки первой частоты колебаний стержневых конструкций, полученными по методу Донкерлея [7, 19], решение (5) значительно более точное и сопоставимо по точности с верхней оценкой по методу Рэля [31]. При большом числе панелей ( $n > 2$ ) точность найденного решения практически не зависит от высоты конструкции.

### 3.2 Спектр частот регулярных ферм

На практике в динамических расчетах сооружений чаще всего используется первая собственная частота спектра, однако при анализе резонансных явлений в расчет берутся и более высокие частоты. Аналитический расчет этих величин в общем случае затруднителен. Анализ же распределения частот в спектрах семейства регулярных частот различного порядка выявляет некоторые характерные его особенности, позволяющие в некоторых случаях упростить расчет ферм высокого порядка [6].

На рисунке 6 приведены спектры собственных частот двенадцати ферм различного порядка, полученные численно.



**Рис. 6. – Спектры частот регулярных ферм,  $h=5$  m**  
**Fig. 6. – Frequency spectra of regular trusses,  $h=5$  m**

Частоты спектров отдельных ферм объединены условными кривыми. Ординаты точек на этих кривых — частоты, абсциссы — номера частот в соответствующем спектре. Например, спектр фермы с одной панелью ( $n=1$ ) содержит  $K = 3(5n + 2) = 21$  частот, в спектре фермы порядка  $n = 12$  содержится 186 частот.

Распределение частот показывает, что независимо от порядка конструкции высшая частота колебаний  $\omega_{\max}$  остается почти постоянной:  $\omega_{\max} = 1427.619, 1434.525, \dots, 1436.412, 1436.412$  1/с. Эта закономерность позволяет оценивать высшие частоты регулярной фермы с большим числом панелей. Расчеты собственных частот ферм большого порядка трудоемки и здесь наиболее вероятно накопление ошибок округления. Поэтому для верхней границы частот таких ферм с высокой степенью точности можно использовать значение высшей частоты, полученное для фермы первого порядка, величина которой следует из сравнительно простого расчета.

## 4 Заключение / Conclusions

Основные результаты работы:

1. Предложена схема пространственной статически определимой регулярной фермы.
2. Найдена аналитическая зависимость нижней границы первой частоты собственных колебаний от размеров фермы и числа панелей.
3. В семействе спектров собственных частот ферм различного порядка обнаружено, что высшая частота колебаний не зависит от порядка конструкции.

## 5 Fundings / Финансирование

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

## References

1. Ignatyev, A. V. and Ignatyev, V.A. (2016) On the Efficiency of the Finite Element Method in the Form of the Classical Mixed Method. *Procedia Engineering*, Elsevier Ltd, **150**, 1760–1765. <https://doi.org/10.1016/J.PROENG.2016.07.167>.
2. Liu, G.R. and Quek, S.S. (2014) FEM for Trusses. *The Finite Element Method*, Butterworth-Heinemann, 81–110. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-098356-1.00004-7>.
3. Liu, M., Cao, D. and Zhu, D. (2021) Coupled Vibration Analysis for Equivalent Dynamic Model of the Space Antenna Truss. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, **89**, 285–298. <https://doi.org/10.1016/J.APM.2020.07.013>.

Kirsanov, M.

Analytical calculation of the fundamental oscillation frequency of a multi-dome roof

2023; Construction of Unique Buildings and Structures; **109** Article No 10906. doi: 10.4123/CUBS.109.6





- 4 Ivanitskii, A.D. (2022) Formulas for Calculating Deformations of a Planar Frame. *Structural mechanics and structures*, Voronezh State Technical University, **34**, 90–98. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2022.34.3.007>.
- 5 Kirsanov, M.N., Khromatov, V.Y. (2017) Modeling of Deformations of Flat Truss with Triangular Shape. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, 24–28. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30638551>
- 6 Komerzan, E. V., Maslov, A.N. (2023) Analytical Evaluation of a Regular Truss Natural Oscillations Fundamental Frequency. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 17–26. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.002>.
- 7 Manukalo, A.S. (2023) Analysis of a Planar Sprengel Truss First Frequency Natural Oscillations Value. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 54–60. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.006>.
- 8 Shchigol, E.D. (2023) The Formula for the Lower Estimate of the Natural Oscillations of a Flat Regular Girder Truss with a Rectilinear Upper Belt. *Structural Mechanics and Structures*, **37**, 46–53. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2023.37.2.005>.
- 9 Kirsanov, M. (2021) Model and Analytical Calculation of a Spatial Truss. *Lecture Notes in Civil Engineering*, Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, **150 LNCE**, 496–503. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-72404-7\\_48/COVER](https://doi.org/10.1007/978-3-030-72404-7_48/COVER).
- 10 Kirsanov, M.N. (2023) Hexagonal Rod Pyramid: Deformations and Natural Oscillation Frequency. *Magazine of Civil Engineering*, **119**. <https://doi.org/10.34910/MCE.119.3>.
- 11 Goloskokov, D.P. and Matrosov, A. V. (2018) Approximate Analytical Solutions in the Analysis of Thin Elastic Plates. AIP Conference Proceedings, American Institute of Physics Inc. <https://doi.org/10.1063/1.5034687>.
- 12 Matrosov, A. V. (2022) An Exact Analytical Solution for a Free-Supported Micropolar Rectangle by the Method of Initial Functions. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, Birkhauser, **73**. <https://doi.org/10.1007/S00033-022-01714-Y>.
- 13 Kirsanov, M. (2020) Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, GB <https://cambridgescholars.com/product/978-1-5275-5976-9>.
- 14 Ovsyannikova, V.M. (2020) Dependence of Deformations of a Trapezous Truss Beam on the Number of Panels. *Structural Mechanics and Structures*, **26**, 13–20. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44110286>
- 15 Ilyushin, A.S. (2019) The Formula for Calculating the Deflection of a Compound Externally Statically Indeterminate Frame. *Structural mechanics and structures*, **22**, 29–38. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41201106>
- 16 Dai, Q. (2021) Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*, **17**, 1701. <https://doi.org/10.34910/ALF.17.1>.
- 17 Sviridenko, O. V and Komerzan, E. V. (2022) The Dependence of the Natural Oscillation Frequency of the Console Truss on the Number of Panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **101**, 10101. <https://doi.org/10.4123/CUBS.101.1>.
- 18 Kirsanov, M.N. and Tinkov, D. V. (2019) Analysis of the Natural Frequencies of Oscillations of a Planar Truss with an Arbitrary Number of Panels. *Vestnik MGSU, Moscow State University of Civil Engineering*, 284–292. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2019.3.284-292>.
- 19 Petrenko, V.F. (2021) The Natural Frequency of a Two-Span Truss. *AlfaBuild*, 2001. <https://doi.org/10.34910/ALF.20.1>.
- 20 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2005) Microarchitected Cellular Solids - The Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses. *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, **85**, 607–617. <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>.
- 21 Hutchinson, R.G. and Fleck, N.A. (2006) The Structural Performance of the Periodic Truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Pergamon, **54**, 756–782. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>.
- 22 Kaveh, A., Rahami, H. and Shojaei, I. (2020) Swift Analysis of Civil Engineering Structures Using Graph Theory Methods. Springer International Publishing, Cham, **290**. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-45549-1>.
- 23 Kaveh, A., Hosseini, S.M. and Zaerreza, A. (2020) Size, Layout, and Topology Optimization of Skeletal Structures Using Plasma Generation Optimization. *Iranian Journal of Science and*



- Technology, Transactions of Civil Engineering* 2020 45:2, Springer, **45**, 513–543. <https://doi.org/10.1007/S40996-020-00527-1>.
- 24 Kaveh, A. and Zolghadr, A. (2018, October 1) Meta-Heuristic Methods for Optimization of Truss Structures with Vibration Frequency Constraints. *Acta Mechanica*, Springer-Verlag Wien, 3971–3992. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2234-z>.
- 25 Zok, F.W., Latture, R.M. and Begley, M.R. (2016) Periodic Truss Structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier, **96**, 184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>.
- 26 Sun, J., Sun, J., Zhu, D. and Yan, X. (2023) Equivalent Plate Dynamic Modeling of Space Periodic Truss Structures. *Aerospace Science and Technology*, Elsevier Masson s.r.l., **138**. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2023.108315>.
- 27 Zhu, D., Yan, X., Sun, J., Liu, F. and Cao, D. (2023) An Improved Equivalent Beam Model of Large Periodic Beam-like Space Truss Structures. *Chinese Journal of Aeronautics*. <https://doi.org/10.1016/J.CJA.2023.06.034>.
- 28 Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N. and Serdjuks, D.O. (2020) Calculation of Deformations of a Cantilever-Frame Planar Truss Model with an Arbitrary Number of Panels. *Vestnik MGSU*, **4**, 510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>.
- 29 Low, K.H. (2000) Modified Dunkerley Formula for Eigenfrequencies of Beams Carrying Concentrated Masses. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier Science Ltd, **42**, 1287–1305. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(99\)00049-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(99)00049-1).
- 30 Kirsanov, M.N. (2023) Simplified Dunkerley Method for Estimating the First Oscillation Frequency of a Regular Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **108**, 10801. <https://doi.org/10.4123/CUBS.108.1>.