



Research Article




Received: November 11, 2023

Accepted: December 12, 2023

Published: December 29, 2023

ISSN 2304-6295

Strengthening of concrete beams by CFRP considering initial state

Mirsayapov, Ilshat Talgatovich¹ 
Apkhadze, Georgiy Tateozovich¹ 
Nuguzhinov, Zhmagul Smagulovich² 

¹ Kazan State University Of Architecture And Engineering, Kazan, Russian Federation;
mirsayapovit@mail.ru (M.I.T.); georgevt@yandex.ru (A.G.T.)

³ Kazakhstan Multidisciplinary Institute of Reconstruction and Development Republican State
Enterprise, Karaganda, Kazakhstan, kazmirr@mail.ru (N.Z.S.)

Correspondence:* email georgevt@yandex.ru; contact phone [+79053195019](tel:+79053195019)

Keywords:

Structures of buildings; Reinforced concrete; Concrete; Beams; Composite materials; Reinforcement; Carbon fiber-reinforced plastic; CFRP; Fiberglass; Strengthening of structures

Abstract:

The object of research is the bearing capacity of normal sections of bendable reinforced concrete structures, reinforced in the tensile zone with high-strength carbon fiber-reinforced plastic materials. The purpose of research is to analytically obtain the most universal and accurate dependence for determining the limiting bending moment of elements reinforced in a tensile zone with carbon fiber-reinforced plastic materials, taking into account their initial state before strengthening during failure of the concrete compressed zone. The objectives of research are: analytically obtaining the dependence for the height of the compressed zone of concrete in the section in the limit state after strengthening, taking into account the initial stress state; comparison of the load-bearing capacity obtained taking into account the presented dependencies, according to the dependencies adopted in the current regulatory documents, as well as according to the nonlinear deformation model. **Method.** The work adopted the basic techniques used in the modern theory of strength of concrete and reinforced concrete, as well as in the mechanics of anisotropic deformable solids. **Results.** The obtained analytical expressions for determining the limiting bending moment perceived by normal sections of reinforced concrete elements reinforced with carbon fiber-reinforced plastic materials in the tensile zone make it possible to consider the initial stress-strain state and the degree of its influence on the strength of such elements. A reasonable refinement of the analytical dependencies of the normative approach makes it possible to achieve good convergence with the results of calculations using a nonlinear deformation model. The proposed analytical dependencies make it possible to determine the actual strength of normal sections of reinforced bending elements, considering the initial stress-strain state without the need for complex iterative calculations.

1 Introduction

В связи со значительным физическим износом существующего жилищного фонда все большее внимание уделяется методам и способам усиления существующих конструкций, в том числе имеющих значительные повреждения [1]-[3]. Необходимость в усилении существующих конструкций также возникает при реконструкции или техническом перевооружении существующих зданий и сооружений в связи с необходимостью увеличения действующих эксплуатационных или технологических нагрузок.

Для изгибаемых железобетонных конструкций, в том числе балок, одним из наиболее передовых и экономически эффективных способов повышения несущей способности является метод усиления путем устройства внешнего армирования в растянутой зоне из композитных полимерных материалов. При этом методе усиления чаще всего применяют углепластиковые

Mirsayapov I.; Apkhadze G.; Nuguzhinov Zh.

Strengthening of concrete beams by CFRP considering initial state;

2023; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **109** Article No 10929. doi: 10.4123/CUBS.109.29



(Carbon) или арамидные (Kevlar) одно- или разнонаправленные холсты («мокрый» способ) и ламинаты («сухой» способ) на полимерном, чаще всего эпоксидном связующем [4]-[6]. При этом известно, что, в связи с особенностями композиционных полимерных материалов (достаточно низкий модуль упругости в сравнении со сталью), разрушение усиленных элементов в большинстве случаев происходит от раздробления бетона в сжатой зоне. Таким образом, в случаях, когда невозможно осуществить полную разгрузку существующих конструкций, необходимо учитывать начальное напряженно-деформированное состояние таких элементов.

Первым подходом по учету уровня разгрузки усиленных железобетонных элементов является упрощенная методика метода предельных усилий с введением условных коэффициентов к несущей способности или коэффициентов к расчетным сопротивлениям материалов. Применение данного подхода к решению поставленной задачи является в значительной степени приближенным учетом неполной разгрузки существующих конструкций, подлежащих усилению. В связи со значительной погрешностью в получаемых результатах с начала 2000-х годов он был полностью заменен иными более точными методами решения.

Второй подход, отраженный в действующей нормативной базе [7] в части расчета таких конструкций по нормальному сечению с учетом начального напряженного состояния, имеет ряд существенных недостатков, к которым можно отнести: использование в основе подхода метода предельных усилий с ограничением высоты сжатой зоны бетона граничной величиной, что приводит к значительному занижению фактической несущей способности, а также упрощенного учета начального напряженно-деформированного состояния с использованием условных коэффициентов.

К третьему подходу в решении задачи по возможному учету влияния начального напряженно-деформированного состояния на прочность нормальных сечений усиленных железобетонных элементов можно отнести использование методики нелинейной деформационной модели, описанной в работах [8]-[11]. Данная методика является в основе своей итерационным методом решения физически-нелинейных задач, однако, для целей учета начального состояния расчет производят в два последовательных шага с использованием параметров напряженно-деформированного состояния (деформаций, напряжений, кривизны и жесткости сечения), полученных на первом расчетном шаге, в качестве исходных начальных данных для итерационного расчета на втором расчетном шаге уже с учетом наличия элементов внешнего усиления.

Четвертым известным методом для получения достаточно точного решения поставленной задачи является применение метода конечных элементов с учетом «рождения» («монтажа») новых элементов внешнего усиления на определенном шаге физически нелинейного расчета [12], [13]. Данный подход, однако, в некоторых случаях усложняется значительной степенью трудоемкости вычислений и ограничениями в возможностях конкретных программных комплексов конечно-элементного анализа.

Нередко значения, получаемые по всем описанным методикам, дают значительно расходящиеся результаты. При этом наиболее точное решение, очевидно, получается при использовании подхода нелинейной деформационной модели и метода конечных элементов, которые, однако, в свою очередь требуют автоматизированного (шагово-итерационного) подхода к решению задачи.

Множественные экспериментальные исследования усиленных композитными материалами балок, представленные в работах [14]-[17], показали значительное увеличение несущей способности полностью разгруженных элементов и хорошую сходимость методики нелинейной деформационной модели нормального сечения в итерационной постановке решения задачи с опытными данными. Стоит отметить, что включение элементов усиления в работу происходит только при обеспечении требуемого уровня сцепления между бетоном и композитом, что хорошо продемонстрировано в работах [18]-[20].

Множественные теоретические исследования прочности и трещиностойкости усиленных композитными материалами элементов с учетом истории нагружения предпринимались E. Nafed [21], N. Plevris [22], O. Rabinovich [23], [24], Picard A. [25]. Проблематикой анализа длительной прочности и деформативности усиленных изгибаемых элементов занимались такие ученые, как K.N. Tan [26] и G. Al Chami [27].

Однако, упрощенной и при этом достаточно точной зависимости для определения прочности усиленных элементов с учетом их начального состояния в аналитической форме исследователями получено не было.



Таким образом, целью авторов ставится получение аналитической и наиболее упрощенной методики для определения несущей способности нормальных сечений изгибаемых железобетонных элементов, усиленных композитными полимерными материалами в растянутой зоне, с учетом предыстории нагружения, основываясь на подходах нелинейной деформационной модели. Задачами исследования являются: получение точного значения коэффициента полноты эпюры в сжатой зоне бетона на основании кривых деформирования; получение аналитической зависимости для высоты сжатой зоны бетона в нормальном сечении в предельном состоянии после усиления с учетом начального напряженно-деформированного состояния элемента.

2 Materials and Methods

Основным преимуществом принятой в данной работе для дальнейшего исследования зависимости для определения коэффициента полноты эпюры в сжатой зоне бетона (т.е. соотношения высоты прямоугольной эпюры и более сложной), является хорошее совпадение с опытными кривыми деформирования, что может быть хорошо оценено сравнением площадей, ограничиваемых рассматриваемой трехлинейной диаграммой (рис. 1) и осью, по которой откладываются относительные деформации сжатия в бетоне (табл. 1).

Таблица 1. Сравнение значений коэффициента полноты эпюры в сжатой зоне бетона ω
Table 1. Comparison of plot completeness coefficient values in the compressed concrete zone ω

Метод / Method	Коэффициент полноты эпюры сжатой зоны при классе бетона / Coefficient values in the compressed concrete zone								
	B10	B15	B20	B25	B30	B35	B40	B50	B60
1	0.845	0.843	0.841	0.838	0.836	0.834	0.832	0.828	0.824
2	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
3	0.786	0.786	0.786	0.786	0.786	0.786	0.786	0.786	0.786
4	0.859	0.855	0.850	0.844	0.841	0.837	0.833	0.824	0.814
5	0.873	0.866	0.857	0.849	0.844	0.839	0.834	0.824	0.814

1 – экспериментальная зависимость [28];
 2 – значения, приведенные в действующем нормативе [29];
 3 – двухлинейная диаграмма деформирования бетона [29];
 4 – трехлинейная диаграмма деформирования бетона (рис. 1);
 5 – криволинейная диаграмма деформирования бетона [30].

Для двухлинейной диаграммы деформирования коэффициент полноты эпюры не зависит от класса бетона (при классе бетона до B60 - $\varepsilon_{b1,red} = 1.5$ мм/м) и принимается равным:

$$\omega = 1 - 0.5 \frac{\varepsilon_{b1,red}}{\varepsilon_{b2}} = 0.786, \quad (1)$$

Для принятой трехлинейной диаграммы (рис. 1) коэффициент полноты эпюры определяется из следующего выражения:

$$\omega = 1 - 0.2 \frac{\varepsilon_{b0}}{\varepsilon_{b2}} - 0.5 \frac{\varepsilon_{b1}}{\varepsilon_{b2}}, \quad (2)$$

где: $\varepsilon_{b1} = 0.6R_b / E_b$, $\varepsilon_{b0} = 0.002$, $\varepsilon_{b2} = 0.0035$ – фиксированные для данного класса бетона параметрические точки диаграммы деформирования сжатого бетона.

После введения значений параметрических точек трехлинейной диаграммы в формулу (2) коэффициент полноты эпюры в сжатой зоне ω с достаточной точностью окончательно будет равен:

Mirsayapov I.; Apkhadze G.; Nuguzhinov Zh.

Strengthening of concrete beams by CFRP considering initial state;

2023; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **109** Article No 10929. doi: 10.4123/CUBS.109.29

$$\omega = 0.885 - 85 \frac{R_b}{E_b}. \quad (3)$$

Как видно из табл. 1 и рис. 2 среднее расхождение коэффициента полноты эпюры, принятого далее в расчетной методике (рис. 4) относительно экспериментальных данных, принятых в [18], составляет менее 0.5 %. При этом расхождение между значениями, вычисленными по более сложной и совершенной криволинейной диаграмме деформирования и опытными значениями составляет 1.0 %.

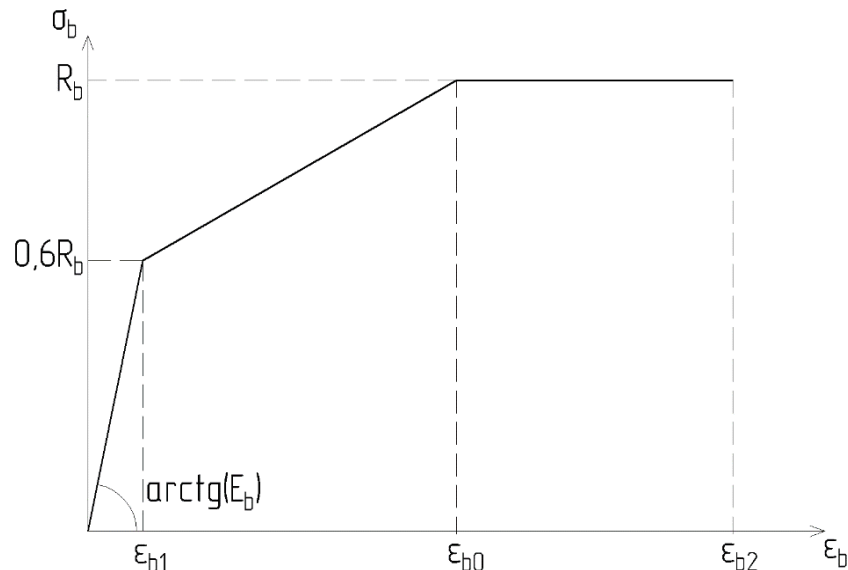


Рис. 1 - Трехлинейная диаграмма деформирования сжатого бетона
Fig. 1 - Three-line diagram of compressed concrete deformation

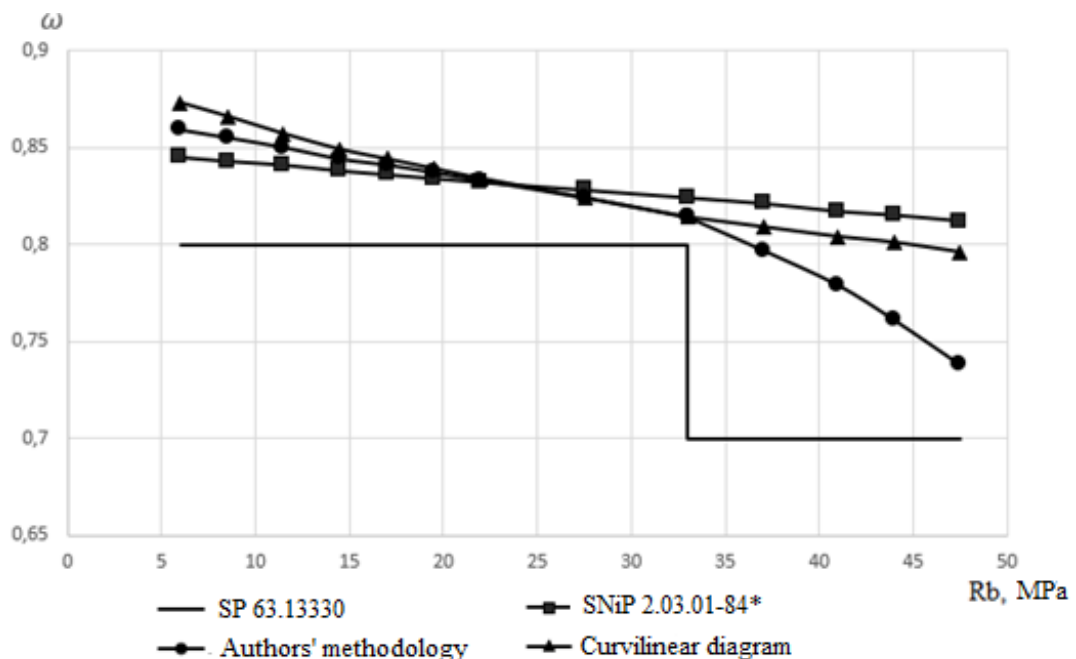


Рис. 2 - График изменения ω в зависимости от прочности бетона R_b

Fig. 2 - Graph of changes in ω depending on concrete compressive strength R_b

Граница переармированности изгибаемых конструкций, усиленных внешним армированием, как и для железобетонных элементов, определяется граничной высотой сжатой зоны ξ_{Rf} , вычисляемой по следующему выражению, получаемому из соответствующих соотношений при сохранении плоского поворота нормальных сечений:

Mirsayarov I.; Apkhadze G.; Nuguzhinov Zh.

Strengthening of concrete beams by CFRP considering initial state;

2023; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **109** Article No 10929. doi: 10.4123/CUBS.109.29

$$\xi_{Rf} = \frac{x_{Rf}}{h_0} = \frac{\omega}{1 + \frac{\varepsilon_{fu} + \varepsilon_b^0}{\varepsilon_{b2}}}, \quad (4)$$

где ε_b^0 – начальные деформации на сжатой грани бетона до усиления (рис. 3), определяемые по следующей формуле:

$$\varepsilon_b^0 = \frac{M^0}{(EI)_{red}} \cdot x_m^0, \quad (5)$$

здесь:

M^0 – фактический максимальный изгибающий момент, воспринимаемый нормальным сечением после возможной разгрузки до устройства внешнего усиления;

x_m^0 – усредненная высота сжатой зоны в сечении элемента на участке с трещинами или без трещин после возможной разгрузки до устройства внешнего усиления;

$(EI)_{red}$ – фактическая жесткость железобетонного сечения после возможной разгрузки до устройства внешнего усиления, определяемая в зависимости от наличия или отсутствия трещин по упрощенной методике при треугольной эпюре в сжатой зоне бетона или на основании нелинейной деформационной модели.

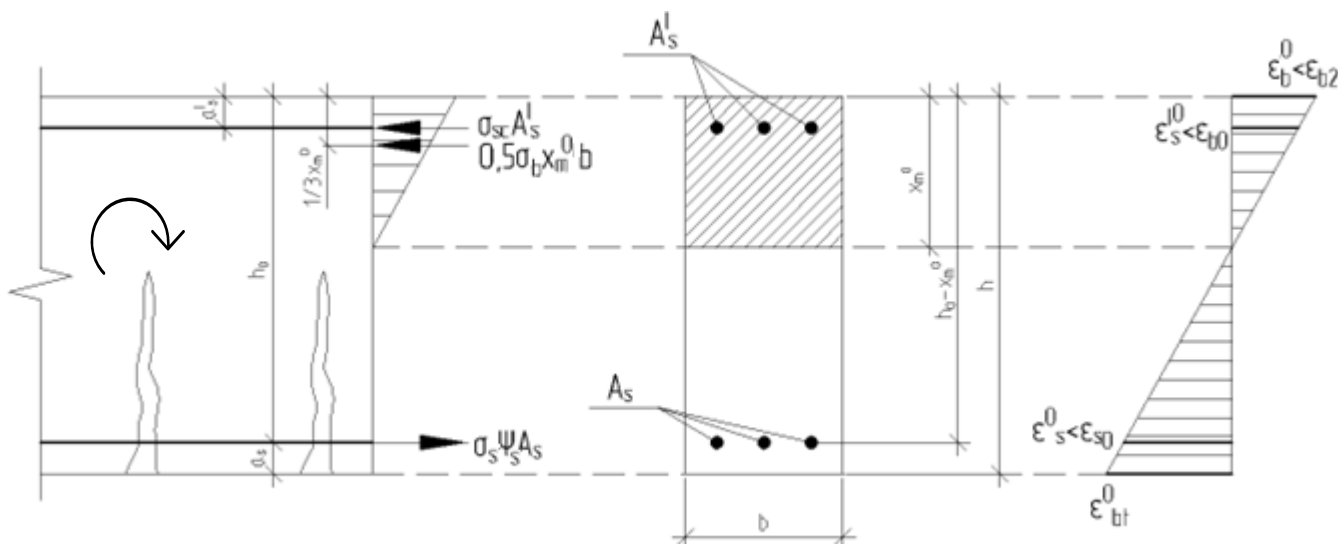


Рис. 3 - Расчетная схема нормального сечения изгибаемого элемента до усиления
Fig. 3 - Design diagram in the normal section before strengthening

В случае разрушения усиленного внешним армированием железобетонного элемента по нормальному сечению по растянутой зоне сечения (первый случай нормального сечения) влияние начального состояния элемента на его несущую способность после усиления невелико и может не учитываться, однако, данный случай, как уже было сказано выше, в реальной практике проектирования и реконструкции встречается нечасто в связи с низким модулем упругости композитных материалов, используемых для внешнего усиления в растянутой зоне.

Таким образом, для случаев при $\xi < \xi_{Rf}$ выражение для определения предельного изгибающего момента, воспринимаемого нормальным сечением усиленного железобетонного элемента прямоугольного сечения, не учитывает начальное деформированное состояние элемента и в наиболее простом и достаточно точном виде метода предельных усилий выглядит следующим образом:

$$M_{ult} = R_b \cdot b \cdot x \cdot (h_0 - 0.5x) + R_{sc} \cdot A'_s (h_0 - a'_s) + R_f \cdot A_f \cdot a_s, \quad (6)$$

где x – высота сжатой зоны в предельном состоянии, определяемая по формуле:

$$x = \frac{R_s \cdot A_s - R_{sc} \cdot A'_s + R_f \cdot A_f}{R_b \cdot b}, \quad (7)$$

Для случаев при $\xi > \xi_{Rf}$ очевидно, что напряженное состояние (деформации) в бетоне в сжатой зоне элемента до усиления при неполной разгрузке будет оказывать существенное влияние на прочность нормального сечения после усиления.

Приведем расчетную схему для определения напряженно-деформированного состояния нормального сечения элемента с неполной разгрузкой в момент усиления внешним армированием в растянутой зоне однонаправленными холстами (ламелями) на полимерном вяжущем до (рис. 3) и после усиления (рис. 4) соответственно. Параметры напряженно-деформированного состояния до усиления приняты с верхним индексом «0», после усиления – без верхнего индексного обозначения.

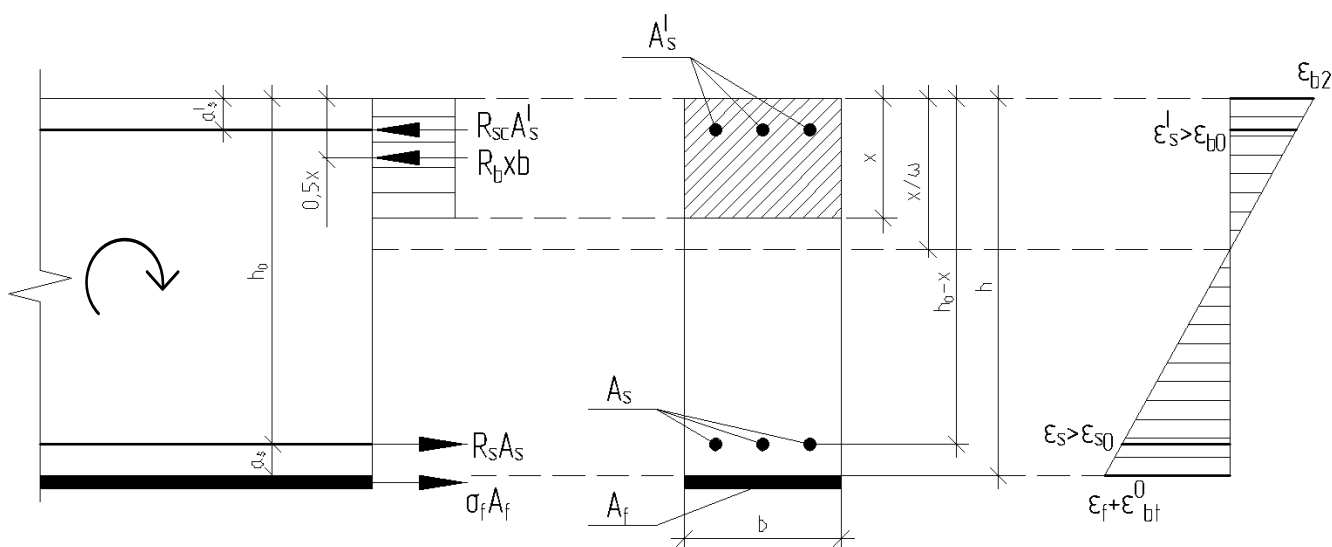


Рис. 4 - Расчетная схема нормального сечения усиленного изгибаемого элемента
Fig. 4. Design diagram in the normal section of a strengthening bending element

Запишем в общем случае равенство внутренних продольных усилий в нормальном сечении элемента после усиления при принятой расчетной схеме (рис. 4):

$$R_b \cdot b \cdot x + R_{sc} \cdot A'_s = R_s \cdot A_s + \sigma_f \cdot A_f, \quad (8)$$

Неизвестную величину σ_f в уравнении (8) выразим через предельные деформации в бетоне сжатой зоны из гипотезы плоских сечений в соответствии с рис. 4:

$$\sigma_f = \varepsilon_f \cdot E_f = \left(\frac{h - x/\omega}{x/\omega} \right) \cdot \varepsilon_{b2} \cdot E_f, \quad (9)$$

С учетом того, что железобетонный изгибаемый элемент в момент перед усилением имел начальные относительные деформации на уровне растянутой грани бетона равные ε_{bt}^0 , то

напряжения в материале внешнего усиления уменьшаются до величины, определяемой по следующему выражению:

$$\sigma_f = (\varepsilon_f - \varepsilon_{bt}^0) \cdot E_f = \left(\frac{h - x/\omega}{x/\omega} \right) \cdot \varepsilon_{b2} \cdot E_f - \varepsilon_{bt}^0 \cdot E_f, \quad (10)$$

При этом величина начальных деформаций в бетоне на растянутой грани ε_{bt}^0 определяется в зависимости от наличия или отсутствия трещин в растянутой зоне бетона до усиления (рис. 3):

$$\varepsilon_{bt}^0 = \frac{M^0}{(EI)_{red}} \cdot (h - x_m^0), \quad (11)$$

Подставляя выражение (10) с учетом величин, определяемых по (3), (11), в уравнение (8), получаем окончательную форму квадратичного уравнения относительно высоты сжатой зоны бетона при принятой прямоугольной эпюре в предельном состоянии усиленного элемента, имеющую следующий вид:

$$R_b \cdot b \cdot x^2 - (R_s \cdot A_s - R_{sc} \cdot A'_s - E_f \cdot A_f \cdot (\varepsilon_{b2} + \varepsilon_{bt}^0)) \cdot x - E_f \cdot A_f \cdot \varepsilon_{b2} \cdot h \cdot \omega = 0, \quad (12)$$

Окончательная форма выражения для определения высоты сжатой зоны бетона в предельном состоянии усиленного внешним композитным армированием изгибаемого элемента с учетом начального состояния нормального сечения до усиления будет иметь следующий вид:

$$x = \frac{R_s A_s - R_{sc} A'_s - E_f A_f (\varepsilon_{b2} + \varepsilon_{bt}^0) + \sqrt{(R_s A_s - R_{sc} A'_s - E_f A_f (\varepsilon_{b2} + \varepsilon_{bt}^0))^2 + 4 \cdot R_b E_f A_f \varepsilon_{b2} h b \omega}}{2 \cdot R_b b}, \quad (13)$$

Для вычисления предельного изгибающего момента в рассматриваемом сечении (рис. 4) в предельном состоянии при $\xi > \xi_{Rf}$ с учетом высоты сжатой зоны, определенной по выражению (13), наиболее рациональным является его определение относительно оси, проходящей по растянутой грани элемента. В этом случае окончательное выражение для определения предельного изгибающего момента будет иметь вид:

$$M_{ult} = R_b \cdot b \cdot x \cdot (h - 0.5x) + R_{sc} \cdot A'_s \cdot (h - a'_s) - R_s \cdot A_s \cdot a_s. \quad (14)$$

3 Results and Discussion

Произведем сравнение результатов, получаемых по результатам итерационных расчетов в рамках нелинейной деформационной модели в два расчетных шага (до усиления и после усиления) с результатами, получаемыми по предлагаемой аналитической авторской методике.

В качестве сравнения примем условное прямоугольное железобетонное сечение 200x500 мм с арматурой в растянутой (3Ø20 мм А500) и сжатой зоне (3Ø12 мм А500). Бетон балки принят класса В25. Усиление производится в растянутой зоне углеродным холстом на эпоксидном связующем с расчетным сопротивлением композита $R_f = 1100$ МПа, модулем упругости композита $E_f = 75000$ МПа и расчетной площадью сечения $A_f = 400$ мм² (нанесение композита в два слоя). За начальную стадию до усиления принимаем 80 % от предельного изгибающего

момента, воспринимаемого нормальным сечением железобетонного элемента до усиления, то есть разгрузка конструкции при усилении практически не производится.

Результаты расчетов согласно нелинейной деформационной модели представлены на рис. 5 и рис. 6 в виде мозаик, полученных автоматизированным способом с применением свободного программного обеспечения на сетке элементарных площадок размерами 10x10 мм.

Как видно из рис. 5 (а) при 80 % от первоначального предельного изгибающего момента ($M_{ult}^0 = 175.0 \text{ кН*м}$) относительные деформации на наиболее сжатой грани бетона составили $\varepsilon_b^0 = 0.98 \text{ мм/м}$, на наиболее растянутой грани элемента - $\varepsilon_{bt}^0 = 1.87 \text{ мм/м}$ (в сечении с трещиной). Согласно рис. 5 (б) растягивающие напряжения в нижней арматуре составляют $\sigma_s^0 = 362.8 \text{ МПа}$, сжимающие напряжения в верхней арматуре составляют $\sigma_{sc}^0 = 182.9 \text{ МПа}$.

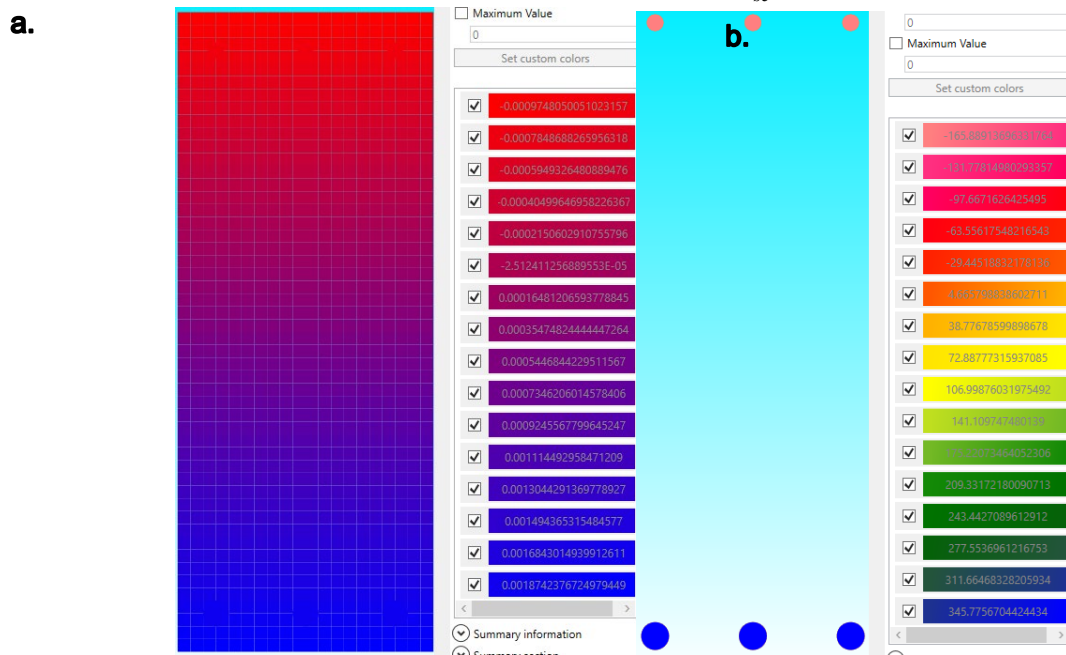


Рис. 5 - Начальное состояние элемента до усиления (а – распределение деформаций в бетоне, б – распределение напряжений в арматуре)
Fig. 5 - Initial state of the element before strengthening (a – distribution of deformations in concrete, b – distribution of stresses in reinforcement)

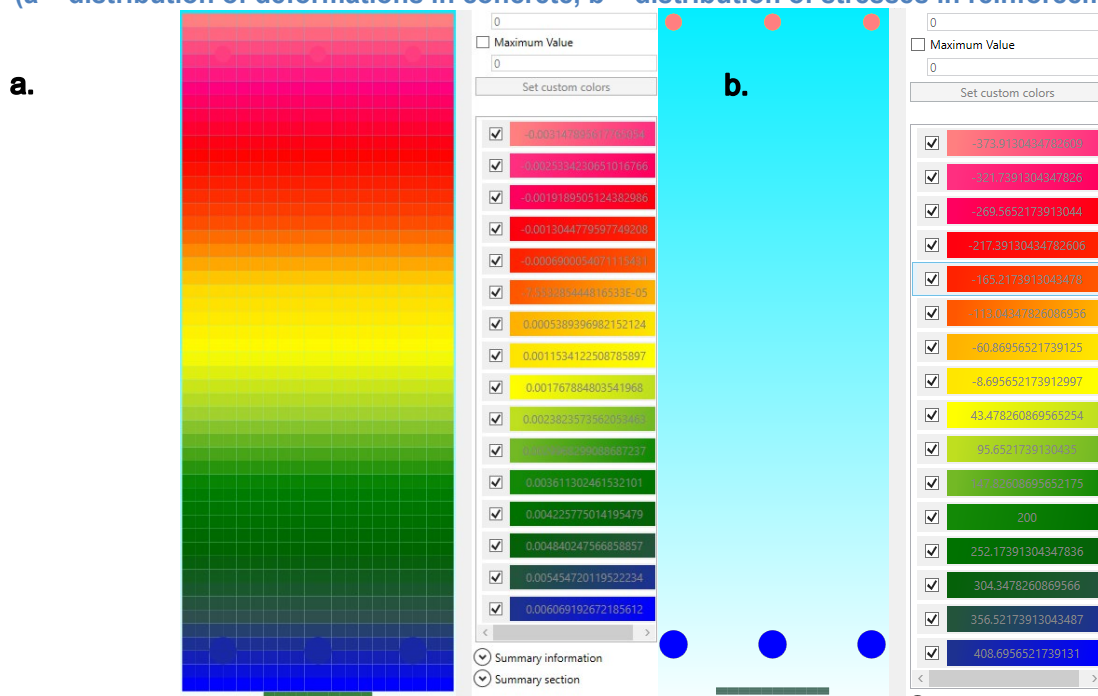


Рис. 6 - Состояние элемента в предельном состоянии после усиления

(a – распределение деформаций в бетоне, b – распределение напряжений в арматуре)
 Fig. 6 - Initial state of the element in the limiting state after strengthening
 (a – distribution of deformations in concrete, b – distribution of stresses in reinforcement)

В предельном состоянии несущая способность нормального сечения рассматриваемого усиленного внешним армированием изгибаемого элемента, согласно нелинейной деформационной модели, составила величину $M_{ult,НДМ} = 224.0 \text{ кН*м}$, что соответствует увеличению несущей способности элемента на 28 %. При этом разрушение в нормальном сечении произошло от раздробления бетона в сжатой зоне. Из рис. 6 в предельном состоянии усиленного элемента: относительные деформации на наиболее сжатой грани бетона составили $\varepsilon_b = \varepsilon_{b2} = 3.45 \text{ мм/м}$; деформации в растянутой арматуре - $\varepsilon_s = 5.87 \text{ мм/м} > \varepsilon_{s0} = R_s / E_s$, но при этом не достигают временного сопротивления разрыву арматурных стержней; напряжения в растянутой арматуре равны расчетному сопротивлению стали $\sigma_s = R_s = 435 \text{ МПа}$. При этом растягивающие напряжения в композитном материале внешнего продольного усиления составили всего $\sigma_f = 337.6 \text{ МПа}$ (в сравнении с $\sigma_f = 442 \text{ МПа}$ – при полной разгрузке конструкции), что значительно меньше его расчетного сопротивления ($R_f = 1100 \text{ МПа}$). Величина высоты сжатой зоны бетона в предельном состоянии составила 170 мм, что больше его граничной величины x_{Rf} .

Значение высоты сжатой зоны усиленного сечения в предельном состоянии, вычисленное по предложенному выражению (13) составило величину $x/\omega = 171.3 \text{ мм}$, что хорошо соответствует величине 170 мм, полученному согласно нелинейной деформационной модели.

Предельный изгибающий момент, воспринимаемый рассмотренным нормальным сечением в предельном состоянии по формуле (14) составил $M_{ult} = 230.8 \text{ кН*м}$, что достаточно точно согласуется с полученным значением в рамках расчета по нелинейной деформационной модели ($M_{ult,НДМ} = 225.0 \text{ кН*м}$). Расхождение в полученных результатах определения несущей способности усиленного внешним армированием элемента с учетом начального напряженно-деформированного состояния по авторской методике относительно нелинейной деформационной модели составило менее 3.0 %.

4 Conclusions

Полученные выражения (13) и (14) применимы для определения предельного изгибающего момента усиленных изгибаемых элементов как прямоугольного, так и таврового сечения при высоте сжатой зоны, располагаемой полностью в полке элемента.

Предлагаемая методика для определения предельного изгибающего момента элементов, усиленных в растянутой зоне внешним армированием из композитных полимерных материалов на углеродном или арамидном волокне, позволяет:

1. Учесть начальное напряженно-деформированное состояние усиливаемых изгибаемых элементов при их неполной разгрузке;
2. Определять долю снижения несущей способности частично разгруженных изгибаемых конструкций в сравнении с полностью разгруженными, что подтверждается имеющимися экспериментальными данными (снижение несущей способности до 15 %).
3. Получать хорошую сходимость по определению предельного изгибающего момента в сравнении с результатами, получаемыми по нелинейной деформационной модели или методом конечных элементов, с погрешностью не более 3 % при отсутствии необходимости проведения трудоемких итерационных вычислений.

5 Conflict of Interests

The authors declare that there is no conflict of interest. Authors made equivalent contributions to the publication.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Mirsayapov I.; Apkhadze G.; Nuguzhinov Zh.

Strengthening of concrete beams by CFRP considering initial state;

2023; *Construction of Unique Buildings and Structures*; 109 Article No 10929. doi: 10.4123/CUBS.109.29



References

1. Mirsayapov Ilshat, Yakupov S. and Hassoun M. (2020) About concrete and reinforced concrete corrosion. *STCCE-2020 IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Kazan, Russia, **517**, Vol. **890**, 012061. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/890/1/012061>.
2. Mirsayapov Ilshat, Khorkov E., Minzianov R. (2021) Research of the stress-strain state of a reinforced concrete beamless floor. *2nd International Scientific Conference on Socio-Technical Construction and Civil Engineering (STCCE – 2021)*. France, 2021, Vol. **3031**, 03031. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202127403031>.
3. Rimshin Vladimir I., Truntov Pavel S. (2023) Strengthening of reinforced concrete structures by composite materials taking into consideration the carbonization of concrete. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 19(2), 178-185. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-178-185>.
4. J. G. Teng, J. F. Chen, S. T. Smith, and L. Lam. (2003) Behaviour and strength of FRP-strengthened RC structures: a state-of-the-art review. *ICE Proceedings Structures and Buildings*. Vol. **156** No **1**, 51-62. <https://doi.org/10.1680/stbu.2003.156.1.51>.
5. Ehab Hamed, Rabinovitch O. (2008) Masonry walls strengthened with composite materials- dynamic out-of-plane behavior. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. **27(6)**, 1037-1059. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.01.003>.
6. Rizkalla S., Hassan T., Hassan N. (2003) Design recommendations for the use of FRP for reinforcement and strengthening of concrete structures. *Progress in Structural Engineering and Materials*. **5(1)**, 16-28. <https://doi.org/10.1002/pse.139>.
7. SP 164.1325800.2014. Strengthening of reinforced concrete structures by FRP composites Regulation of design. <https://www.minstroyrf.gov.ru/docs/3826/> (date of application: 08.08.2014).
8. Mirsayapov Ilshat and Apkhadze G. (2020) Modified trilinear stress-strain diagram of concrete designed for calculation of beams with fiberglass rebar. *STCCE-2020 IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Kazan. Russia, **517**, Vol. **890**, 012079. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/890/1/012079>
9. Bentz E.C. Sectional Analysis of Reinforced Concrete Members. Department of Civil Engineering, University of Toronto. Toronto, ON, Canada, 2000. 86 p. <https://tspace.library.utoronto.ca/bitstream/1807/13811/1/NQ49840.pdf>
10. Lazouski D., Gluhau D., Lazouski Y. (2022) Modeling of the behavior of reinforced concrete elements, strengthened in the tensioned zone, under the action of a long-term load. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta*, **8**, 75-80. <https://doi.org/10.52928/2070-1683-2022-31-8-75-80>.
11. Radaykin O. (2021) Theoretical foundations of the diagram method for calculating rod elements made of reinforced. *E3S Web of Conferences*. **281**, 01015. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202128101015>.
12. Mirsayapov Ilshat., Apkhadze G., Simakov V. (2023) Numerical analysis of nonlinear behavior of reinforced concrete structures on solid models. Monograph. *Kazan State University of Architecture and Engineering*, 211 p. URL: <https://elibrary.ru/fwgpig>
13. Fialko S. Yu., Perelmuter A.V. (2019). Inelastic analysis of reinforced concrete structures in SCAD. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. **15(1)**, 54-60. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2019-15-1-54-60>.
14. Frolov Kirill E (2019) Experimental studies of reinforced concrete structures of hydraulic structures strengthened with composite materials. *Structural mechanics of engineering constructions and buildings*. **15(3)**, 237-242. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-3-237-242>.
15. Akbarzadeh, H., Maghsoudi, A.A. (2010). Experimental and analytical investigation of reinforced high strength concrete continuous beams strengthened with fiber reinforced polymer. *Materials & Design*. **31**, 1130-1147. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.09.041>.
16. Ghernouti Y., Rabehi B., Benhamna A. and Hadj Mostefa. (2014). Strengthening of concrete beams by CFRP: Experimental study and finite element analysis. *J. Build. Mater. Struct.* **1**, 47-57. <https://doi.org/10.5281/ZENODO.241942>.
17. Jian-he Xie, Ruo-Lin Hu (2013). Experimental study on rehabilitation of corrosion-damaged reinforced concrete beams with carbon fiber reinforced polymer. *Construction and Building Materials*. **38**, 708-716. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2012.09.023>.



18. Kotynia Renata (2012). Bond between FRP and concrete in reinforced concrete beams strengthened with near surface mounted and externally bonded reinforcement. *Construction and Building Materials*. **32**, 41-54. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2010.11.104>.
19. Sena-Cruz JM, Barros JAO, Azevedo AFM, Gettu R. (2006) Bond behavior of near-surface mounted CFRP laminate strips under monotonic and cyclic loading. *Journal of Composites for Construction*. Vol. **10** No **4**, 295-303. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0268\(2006\)10:4\(29\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0268(2006)10:4(29)).
20. Mirsayapov Ilshat and Minzianov R. (2020) Rebar movement in seals under static loading. *STCCE-2020 IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Kazan. Russia, **517**, Vol. **890**, 0120731. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/890/1/012073>.
21. Ehab Hamed, Bradford, M.A. (2012) Flexural time-dependent cracking and post-cracking behaviour of FRP strengthened concrete beams. *International journal of Solid and Structures*. **49**, 1595-1607. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.03.001>.
22. Plevris N., Triantafillou T.C. (1994) Time-Dependent Behavior of RC Members Strengthened with FRP Laminates. *Journal of Structural Engineering*, Vol. **120**. No. **3**. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1994\)120:3\(1016\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1994)120:3(1016)).
23. Rabinovitch O., Frostig Y. (2000) Closed-Form High-Order Analysis of RC Beams Strengthened with FRP Strips. *Journal of Composites for Construction*. Vol. **4**. No. **2**, 65-74. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0268\(2000\)4:2\(65\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0268(2000)4:2(65)).
24. Rabinovitch O., Frostig Y. (2001) Nonlinear High-Order Analysis of Cracked RC Beams Strengthened with FRP Strips. *Journal of Structural Engineering*, Vol. **127**. No. **4**, 381-389. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2001\)127:4\(381\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2001)127:4(381)).
25. Picard A., Massicotte B., Boucher E. (1995) Strengthening of reinforced concrete beams with composite materials: theoretical study. *Composite Structures*. **33(2)**, 63-75. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(95\)00106-9](https://doi.org/10.1016/0263-8223(95)00106-9).
26. Tan K.H., Saha M.K. (2006) Long-term deflections of reinforced concrete beams externally bonded with FRP system. *Journal of Composites for Construction*. **10(6)**, 474-482. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0268\(2006\)10:6\(47\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0268(2006)10:6(47)).
27. Chami G. Al., Thériault M., Neale K.W. (2009) Creep behaviour of CFRP-strengthened reinforced concrete beams. *Construction and Building Materials*. **23(4)**, 1640-1652. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2007.09.006>.
28. SNiP 2.03.01-84*. Concrete and reinforced concrete structures. Building codes and regulations. 1989. 80 p. URL: <https://docs.cntd.ru/document/871001190>.
29. SP 63.13330.2018. Concrete and reinforced concrete structures. General provisions. Code of practice. 2019. 137 p. URL: <https://minstroyrf.gov.ru/docs/18227/>
30. Karpenko N.I., Radaykin O.V (2017) About construction of concrete deformation diagrams at uniaxial short-time tension/compression with the use of the damage deformation criterion. *Bulletin of Civil Engineers*, **6**, 71-78. <https://doi.org/10.23968/1999-5571-2017-14-6-71-78>.