



Research Article

Received: February 22, 2024

Accepted: March 7, 2024

Published: March 14, 2024

ISSN 2304-6295

# Dynamic response of a linear multiple degrees-of-freedom system

Abaev, Zaurbek<sup>1</sup> Valiev, Azamat<sup>2\*</sup> Kodzaev, Marat<sup>2</sup> Gurbanov, Ramil<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russian Federation; [zaurbek\\_a@yahoo.com](mailto:zaurbek_a@yahoo.com) (A.Z.)

<sup>2</sup> North Caucasian Institute of Mining and Metallurgy (State Technological University), Vladikavkaz, Russian Federation; [azamat99valiev@gmail.com](mailto:azamat99valiev@gmail.com) (V.A.), [m\\_kodzaev@mail.ru](mailto:m_kodzaev@mail.ru) (K.M.), [kafedra-sk@skgmi-gtu.ru](mailto:kafedra-sk@skgmi-gtu.ru) (G.R.)

Correspondence: \* [azamat99valiev@gmail.com](mailto:azamat99valiev@gmail.com)

## Keywords:

Structural dynamics; Dynamic response; Seismic analysis; Multiple degrees of freedom system

## Abstract:

**The object of study** is a 5-story reinforced concrete moment-resisting frame building represented as a linear multiple degrees-of-freedom system (MDOF-system). This work aims to investigate the dynamic response of the MDOF-system using the dynamic analysis and simplified modal spectral procedure. **Method.** Utilizing Mathcad software, a comprehensive set of analyses including Modal Analysis, Uncoupling of the Dynamic Equilibrium Equation, Base Excitation, Modal Spectral Analysis, and Modal Combination (Square Root of the Sum of the Squares - SRSS) method was conducted. The methodology involved a systematic approach to modeling the dynamic behavior of the MDOF system, followed by an application of the aforementioned analyses to evaluate its seismic response. **Results.** Results revealed significant insights into the dynamic characteristics and vulnerabilities of the system, demonstrating variations in response across different modes of vibration and highlighting the efficacy of the SRSS method in predicting seismic response. The study concludes with a comparison of the computational results, underscoring the critical role of advanced simulation in improving the accuracy of seismic design practices.

## 1 Introduction

Динамический анализ систем с многими степенями системы (*multiple degrees-of-freedom, MDOF*) – одна из наиболее частых и сложных задач во многих областях науки и техники. К примеру, в работе [1] исследуется безразмерная математическая модель шарикоподшипников с двумя степенями свободы (*2-DOF*). В работе [2] исследуются динамические характеристики *MDOF*-систем с различными типами трехмерных зазорных соединений. Работа [3] посвящена исследованию динамического отклика *MDOF*-систем с кулоновским фрикционным трением при гармоническом возбуждении. В работе [4] проведены исследования резонанса *MDOF*-системы на основе модального ортогонального базиса. Анализ вынужденных колебаний *MDOF*-систем с помощью расширенного метода Галеркина представлен в работе [5].

Понимание динамического отклика сложных систем с многими степенями свободы имеет решающее значение особенно в сейсмостойком строительстве [6], [7]. Сейсмические события подвергают конструкции сложным динамическим нагрузкам, и точное прогнозирование их реакции имеет первостепенное значение для обеспечения безопасности и уменьшения ущерба [8]. В этом контексте анализ *MDOF* играет жизненно важную роль, поскольку отражает взаимодействие



между различными частями конструкции, обеспечивая более полное понимание ее общего поведения при динамическом воздействии.

Несмотря на развитие быстрых вычислительных средств, программного обеспечения и других достижений, детальный нелинейный динамический анализ *MDOF*-систем [9], [10] все еще остается сложной задачей по нескольким причинам [11], [12]:

1. Необходимо выбрать записи ускорений грунта, совместимые со спектром сейсмического воздействия на строительной площадке.
2. Нелинейное моделирование требует больших вычислительных затрат.
3. Анализ должен быть повторен для нескольких записей.
4. Модель должна быть достаточно сложной, чтобы реалистично отображать здание, особенно деградацию его прочности при больших перемещениях.

Поэтому приближенные методы линейного анализа все еще являются привлекательным вариантом в качестве альтернативы строгой процедуре нелинейного динамического анализа. Точное предсказание и анализ динамического отклика систем с многими степенями свободы имеет решающее значение для оценки их конструктивной целостности, проектирования эффективных систем управления и снижения потенциальных рисков. Кроме того, данное исследование имеет особое значение в контексте совершенствования подходов к сейсмическому проектированию в России. Всесторонний анализ динамического отклика систем с многими степенями свободы позволит внести вклад в разработку более точных и эффективных подходов к сейсмическому проектированию в России, тем самым повысив устойчивость сооружений к сейсмическим воздействиям [13].

Несмотря на наличие большого количества прикладных программ для оценки динамического отклика систем [14], [15], использование программного обеспечения *Mathcad* для подобного анализа обеспечивает надежную платформу для решения сложных дифференциальных уравнений, проведения сложного численного анализа и визуализации динамического отклика конструкций. Программное обеспечение *Mathcad* широко используется в самых разных инженерных приложениях от химии до педагогики [16]–[18] и динамики сооружений [19]. *Mathcad* используется как визуальный инструмент для работы с матрицами позволяет решать сложные задачи, требующие больших вычислительных мощностей. Такой вычислительный подход не только повышает точность анализа, но и позволяет решать задачи, которые в противном случае слишком сложны для традиционных аналитических методов. Гибкость и вычислительная мощь *Mathcad* позволяют детально исследовать динамические характеристики *MDOF*-систем, способствуя более глубокому пониманию их поведения в условиях сейсмической нагрузки.

Несмотря на значительные успехи в области исследования динамического отклика линейных *MDOF*-систем, на сегодняшний день недостаточно подробно исследована точность и применимость упрощенных методов динамического анализа для зданий с простым конструктивно-планировочным решением. Мотивация данного исследования обусловлена также необходимостью совершенствования методологии сейсмического проектирования в России за счет детального понимания поведения конструкций при землетрясении. Цель настоящей работы заключается в исследовании динамического отклика *MDOF*-систем с помощью прямого динамического анализа и упрощенной модальной спектральной процедуры. В качестве объекта исследования принято 5-этажное железобетонное здание рамной конструктивной схемы, представленное в виде *MDOF*-системы. Используя программное обеспечение *Mathcad*, был проведен комплексный анализ, включающий модальный анализ, рассоединение уравнения динамического равновесия, ускорение основания, модальный спектральный анализ и комбинирование модальных откликов (метод квадратного корня из суммы квадратов - *SRSS*). Результаты позволили получить представление о динамических характеристиках и уязвимых местах системы, продемонстрировав вариации отклика в различных формах колебаний и подчеркнув эффективность метода *SRSS* в прогнозировании сейсмического отклика.

## 2 Materials and Methods

В качестве объекта исследования принята 5-этажная 2-пролетная рама, рассмотренная в работе [20] (см. рис. 1а). Высота первого этажа составляет 4.0 м, а остальных – 3.0 м. Демпфирование конструкции  $\xi = 5\%$  от критического. Все балки имеют ширину  $b = 0.40$  м и высоту

$h = 0.50$  м. Все колонны квадратные с размером стороны сечения  $h = 0.40$  м. Модуль упругости бетона  $E = 25000$  МПа. Полная масса здания 42.9 т.

Жесткость рамы определялась с помощью метода Муто. Это один из самых ранних методов оценки жесткости этажа в многоэтажном здании [21]–[23]. В этом методе считается, что все колонны и балки в этаже сопротивляются одинаковой величине сдвигающей силы и вращению (на обоих концах) соответственно. Поэтому количество балок, обрамляющих наружную колонну сверху и снизу, принимается таким же, как и для внутренних колонн. Таким образом, используя эти упрощающие допущения, данный метод определяет жесткость этажа ( $K_s$ ) как сумму сдвиговых жесткостей отдельных колонн, присутствующих в рассматриваемом этаже:

$$K_s = \sum \left[ \left( \frac{12E_c I_c}{H^3} \right) \left( \frac{\sum K_{bt} + \sum K_{bb}}{4K_c + \sum K_{bt} + \sum K_{bb}} \right) \right] \quad (1)$$

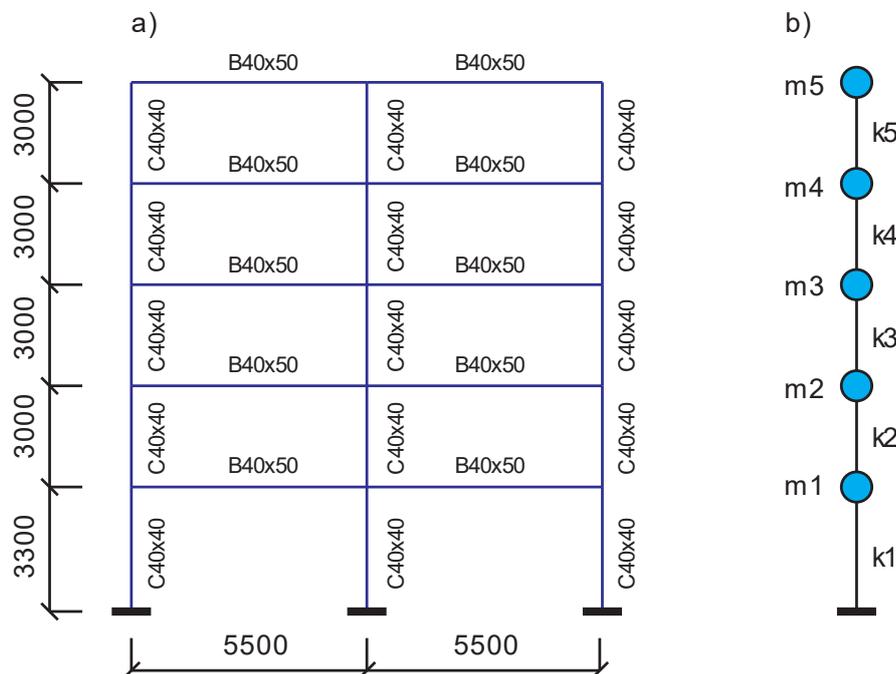
где  $K_{bt} = I_{bt} / L$  и  $K_{bb} = I_{bb} / L$  – изгибная жесткость балок, обрамляющих колонны сверху и снизу этажа, соответственно,

$K_c = I_c / H$  – изгибная жесткость колонны;

$E, I_c, I_{bt}, I_{bb}, L, H$  – модуль упругости бетона, момент инерции колонн, момент инерции балки, обрамляющей колонну сверху, момент инерции балки, обрамляющей колонну снизу, длина балки и высота этажа, соответственно.

Уравнение (1) применимо для всех этажей, кроме первого, где необходимо учитывать эффект закрепления основания. Следовательно, альтернативное уравнение для оценки жесткости этажей рам с фиксированным основанием имеет вид:

$$K_s = \sum \left[ \left( \frac{12E_c I_c}{H^3} \right) \left( \frac{K_c + \sum K_{bt}}{4K_c + \sum K_{bt}} \right) \right] \quad (2)$$



**Рис. 1 – Объект исследования (а) и расчетная схема (б)**  
**Fig. 1 – The object of research (a) and analytical model (b)**

Для исследования динамического отклика системы использовалась запись землетрясения Гектор-Майн (Hector-Mine,  $M_w = 7.1$ ), произошедшего 16 октября 1999 год в Южной Калифорнии, США. На рис. 2 представлена акселерограмма землетрясения, на рис. 3а и 3б представлены спектр ускорений и спектр перемещений, соответственно.

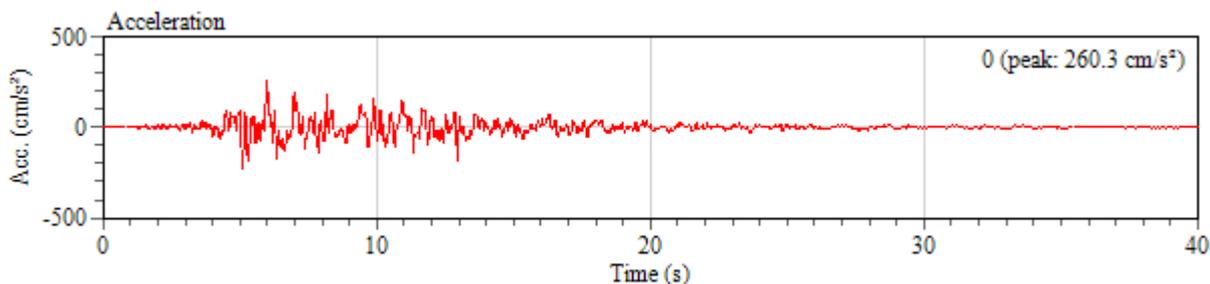


Рис. 2 – Запись ускорения грунта (Hector Mine, 10/16/1999, Hector, 0)  
 Fig. 2 – Ground motion record (Hector Mine, 10/16/1999, Hector, 0)

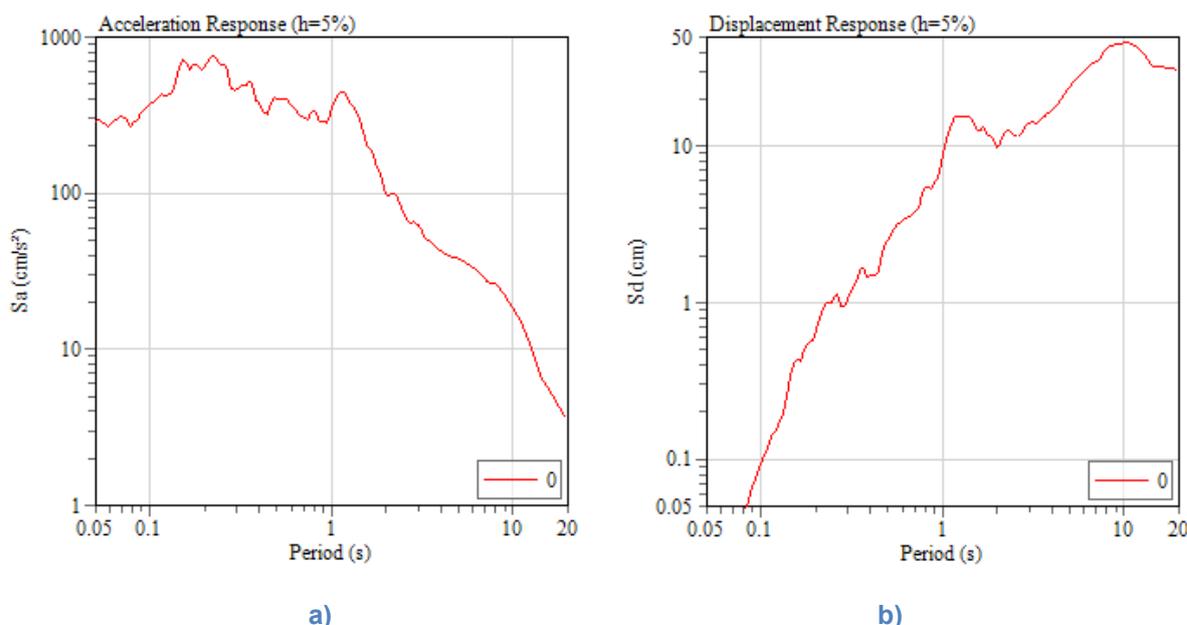


Рис. 3 – Спектры ускорений (a) и перемещений (b)  
 Fig. 3 – Acceleration response (a) and displacement response (b) spectra

### 3 Results and Discussion

#### 3.1 Модальный анализ

Для свободных колебаний имеем следующую систему из  $n$  дифференциальных одновременных уравнений равновесия:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{0\}; \tag{3}$$

где  $[M]$  и  $[K]$  соответствуют матрицам масс и жесткости соответственно.

Решение одновременных дифференциальных уравнений:

$$\{U_i(t)\} = \{\Phi^{(i)}\} f_i(t); \tag{4}$$

Это решение, которое разделяется на вектор амплитуды,  $\{\Phi^{(i)}\}$  и функцию, зависящую от времени,  $f_i(t)$ . Подставляя (4) в (3), получаем:

$$[M]\{\Phi^{(i)}\} \ddot{f}_i(t) + [K]\{\Phi^{(i)}\} f_i(t) = \{0\} \tag{5}$$

Используя классическое решение дифференциальных уравнений с разделением переменных, уравнение (5) можно преобразовать в два уравнения: одно из них зависит от времени, а другое – от  $\{\Phi^{(i)}\}$ ; и оба, в свою очередь, равны постоянной  $\omega^2$  (собственной частоте). Значения, которые может принимать  $\omega_i$ , получены из:



$$[[K] - \omega_i^2 [M]] \{\Phi^{(i)}\} = \{0\} \quad (6)$$

Уравнение (6) решается, приняв определитель матрицы коэффициентов равным нулю.  $n$ -корни являются собственными частотами системы, или собственными значениями, а меньшая частота  $\omega_1$  называется фундаментальной. Теперь, подставляя значения  $\omega_i^2$  в уравнение (4), получим  $n$  систем одновременных уравнений вида:

$$[[K] - \omega_i^2 [M]] \{\Phi^{(r)}\} = \{0\} \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

где  $\{\Phi^{(r)}\}$  - характеристический вектор, форма колебаний или «собственный вектор». Каждый вектор имеет определенную форму, но произвольную амплитуду. Поэтому собственные вектора можно нормировать разными способами, но удобнее всего нормировать формы относительно матрицы масс  $[M]$ , как показано ниже:

$$\{\Phi^{(r)}\}^T [M] \{\Phi^{(r)}\} = 1 \quad (8)$$

Различные формы колебаний собираются в одну матрицу, называемую модальной матрицей,  $[\Phi]$ , имеющую размерность  $n \times n$ , и в которой каждый столбец соответствует форме колебаний.

Для рассматриваемого объекта исследования (рис. 1), матрица жесткости примет вид:

$$k = \begin{pmatrix} k5 & -k5 & 0 & 0 & 0 \\ -k5 & k4+k5 & -k4 & 0 & 0 \\ 0 & -k4 & k3+k5 & -k3 & 0 \\ 0 & 0 & -k3 & k2+k3 & -k2 \\ 0 & 0 & 0 & -k2 & k1+k2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28.70 & -28.70 & 0 & 0 & 0 \\ -28.70 & 57.41 & -28.70 & 0 & 0 \\ 0 & -28.70 & 57.41 & -28.70 & 0 \\ 0 & 0 & -28.70 & 57.41 & -28.70 \\ 0 & 0 & 0 & -28.70 & 71.68 \end{pmatrix} \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{Т}}{\text{М}}$$

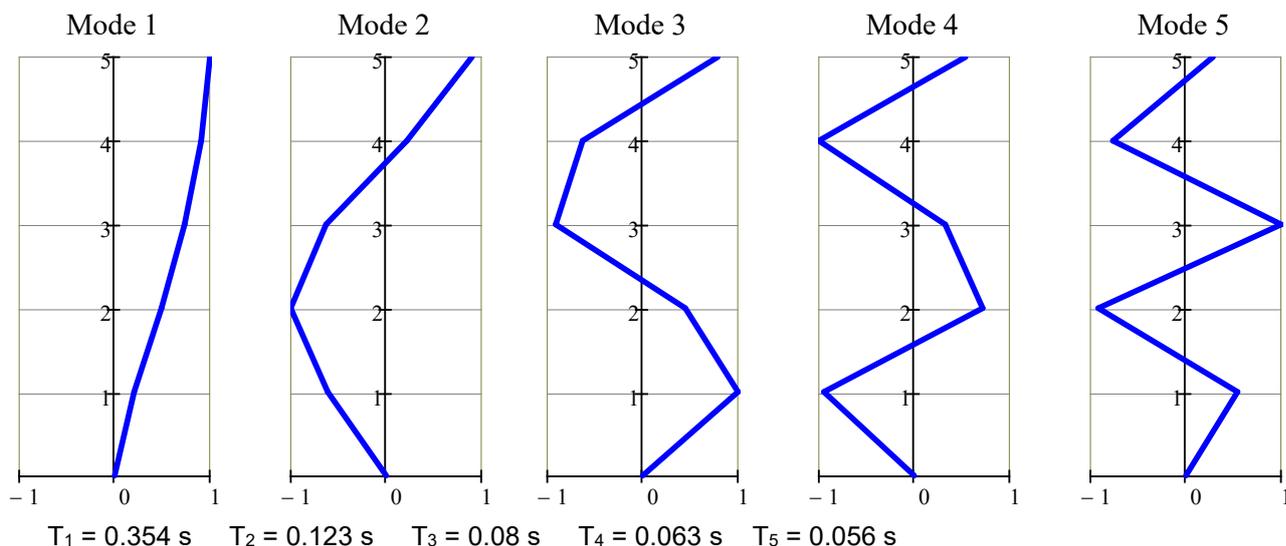
Матрица масс:

$$M = \begin{pmatrix} m5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.352 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.352 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.352 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.352 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.352 \end{pmatrix} \text{Т.}$$

$$\text{Вектор собственных частот: } \omega = \begin{pmatrix} 17.7 \\ 51.0 \\ 78.7 \\ 99.2 \\ 112.5 \end{pmatrix} c^{-1.0}.$$

Нормированная модальная матрица (см. рис. 4):

$$\psi = \begin{pmatrix} 1.000 & -0.900 & 0.786 & -0.537 & 0.285 \\ 0.909 & -0.218 & -0.629 & 1.000 & -0.764 \\ 0.734 & 0.630 & -0.911 & -0.326 & 1.000 \\ 0.492 & 1.000 & 0.448 & -0.719 & -0.917 \\ 0.206 & 0.612 & 1.000 & 0.946 & 0.542 \end{pmatrix}.$$



**Рис. 4 – Формы колебаний**  
**Fig. 4 – Modal Shapes**

### 3.2 Динамический анализ

Для исследования динамической реакции линейной  $MDOF$ -системы используются принцип рассоединения (*uncoupling*) динамической системы [6]. Учитывая свойство ортогональности собственных векторов, нормированных по массе, общий отклик системы может быть описан с помощью набора новых степеней свободы.

$$\{U(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\} \quad (9)$$

где  $\eta(t)$  – обобщенная координата.

С помощью этой процедуры  $MDOF$ -система преобразуется в сумму  $n$  независимых систем с одной степенью свободы ( $SDOF$ ).

$$\{U\} = [\Phi]\{\eta\} = \sum_{i=1}^n \left( \{\Phi^i\} \eta_i(t) \right) = \{\Phi^{(1)}\} \eta_1(t) + \dots + \{\Phi^{(n)}\} \eta_n(t) \quad (10)$$

Возбуждение основания системы с использованием акселерограмм описывается уравнением движения  $MDOF$ -системы с учетом демпфирования [C]:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = -[M][\gamma]\{\ddot{x}_0\} \quad (11)$$

Уравнения для решения этой задачи выводятся с помощью процедуры рассоединения, описанной ранее, тогда получаем:

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = -\{\alpha_i\} \{\ddot{x}_0\} \quad (12)$$

где  $\alpha_i$  – коэффициент модального участия, соответствующий строке  $i$  матрицы  $[\gamma]$ , полученной из:

$$[\alpha] = [\Phi]^T [M][\gamma] \quad (13)$$

В этом случае матрице  $[\gamma]$  соответствует единичный вектор  $\{1\}$ , поскольку все степени свободы конструкции коллинеарны с акселерограммой, действующей на основание конструкции.

Зная, что решение для перемещений  $[U]$  может быть вычислено с помощью уравнения (9), теперь мы можем получить силы, налагаемые движением грунта для каждой формы колебаний, умножая перемещения, вызванные каждой формой, на матрицу жесткости конструкции:

$$\{F^{(i)}\} = [K]\{U^{(i)}\} \quad (14)$$

Аналогично, сила в основании,  $V_i$  и опрокидывающий момент,  $M_i$  для  $i$ -й формы колебаний в момент времени  $t$ :

$$V_i = \{1\}^T \{F^{(i)}\} \quad (15)$$

$$M_i = \{h\}^T \{F^{(i)}\} \quad (16)$$

где:  $\{1\}$  - вектор-столбец с  $n$  строками с единичным значением;

$\{h\}$  - вектор-столбец, содержащий высоту  $n$  этажей, измеренную от основания сооружения.

Для рассматриваемого примера расчетные параметры форм колебаний представлены в таблице 1.

**Таблица 1. Параметры форм колебаний**  
**Table 1. Mode shapes parameters**

Форма колебаний / Mode	Коэффициент модального участия / Modal participation factors $\alpha_i$	$\alpha_i^2$	Эффективная масса / Effective mass %M <sub>tot</sub>	Полная эффективная масса / Total effective mass %M <sub>tot</sub> accumulated
1	188.963	35706.92	0.8321	0.832
2	67.436	4547.592	0.106	0.938
3	42.603	1815	0.0423	0.98
4	26.411	697.544	0.0163	0.997
5	11.956	142.945	0.0033	1

Независимые уравнения движения для системы могут быть записаны как:

$$\begin{aligned}
 \eta''_1 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_1 \cdot \eta'_1 + \omega_1^2 \cdot \eta_1 &= -188.963x'(t) \\
 \eta''_2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_2 \cdot \eta'_2 + \omega_2^2 \cdot \eta_2 &= -67.436x'(t) \\
 \eta''_3 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_3 \cdot \eta'_3 + \omega_3^2 \cdot \eta_3 &= -42.603x'(t) \\
 \eta''_4 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_4 \cdot \eta'_4 + \omega_4^2 \cdot \eta_4 &= -26.411x'(t) \\
 \eta''_5 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_5 \cdot \eta'_5 + \omega_5^2 \cdot \eta_5 &= -11.956x'(t)
 \end{aligned} \quad (17)$$

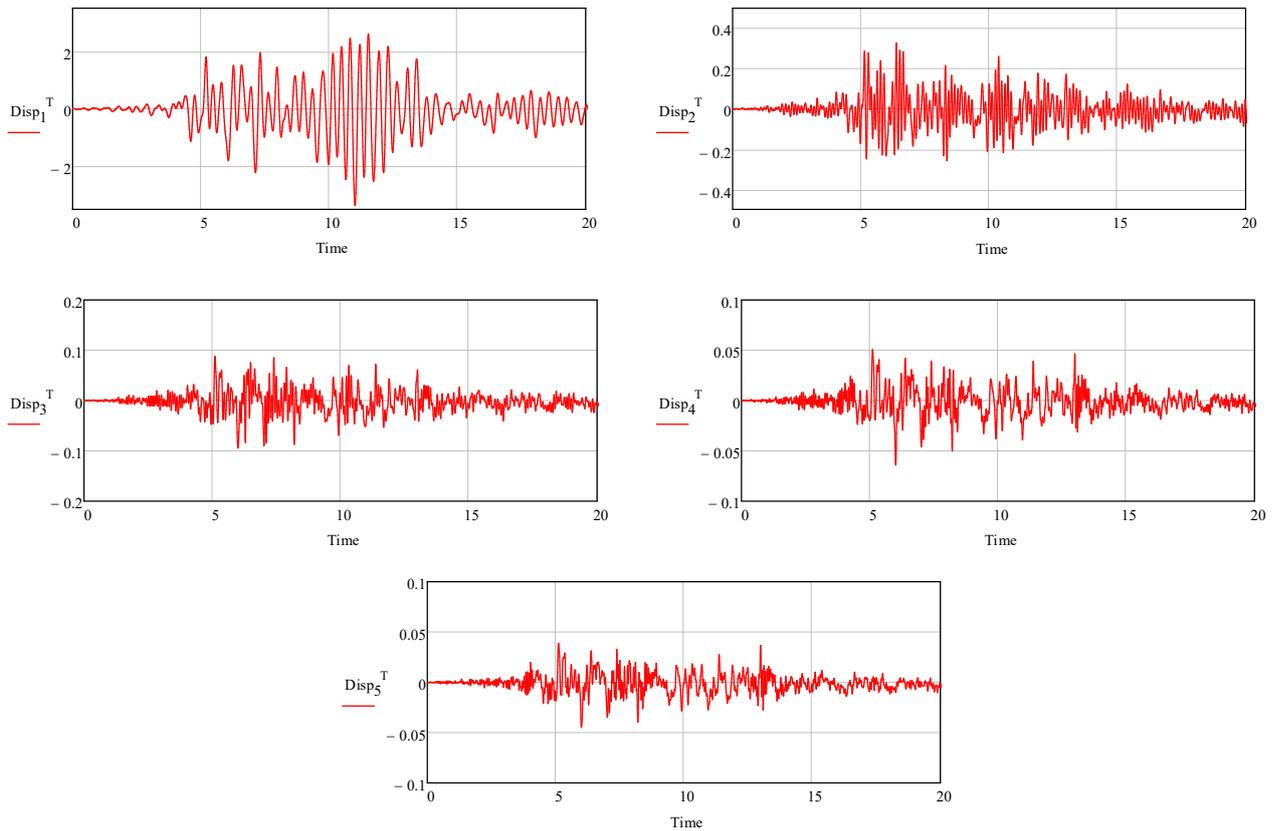
В пяти уравнениях (17), коэффициент демпфирования принят  $\xi = 0.05$  от критического. Отклик каждого из уравнения был получен с помощью Ньюмарка-Бета метода [24].

Первые 20 секунд перемещений независимых координат показаны на рис. 5.

Максимальные значения перемещений независимых координат и соответствующие значения времени представлены в таблице 2.

**Таблица 2. Максимальные и минимальные перемещения независимых координат**  
**Table 2. Maximum and minimum displacement response of the uncouple coordinates**

Значение / Value	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\eta_4$	$\eta_5$
Max (m)	2.649901	0.331156	0.088947	0.051164	0.039307
$t_{\max}$ (s)	11.53	6.39	5.11	5.12	5.12
Min (m)	-3.32792	-0.25348	-0.0934	-0.06359	-0.04426
$t_{\max}$ (s)	11.01	8.36	6.01	6.02	6.01

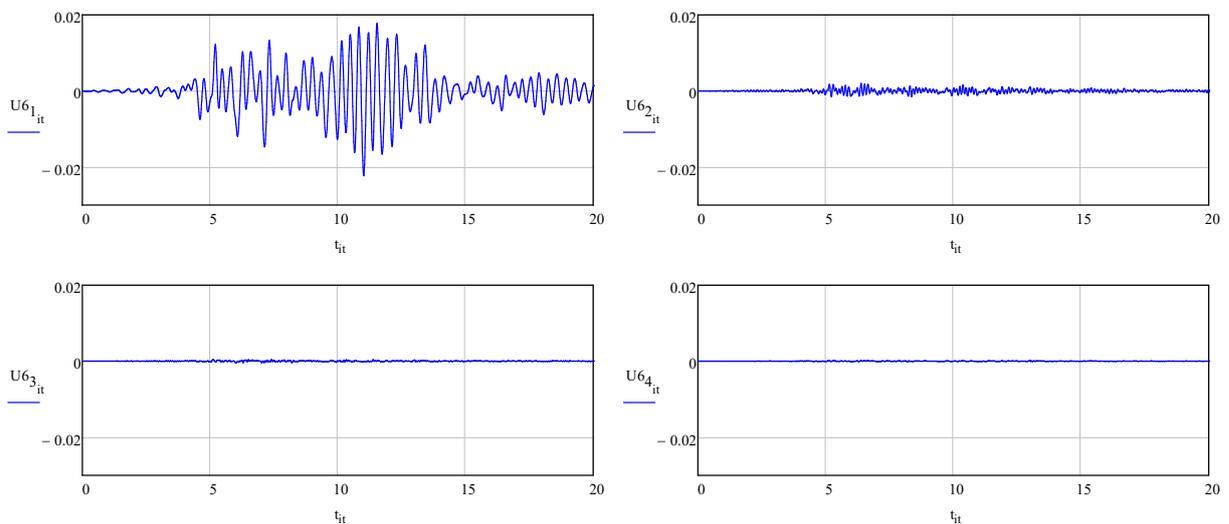


**Рис. 5 – Отклик независимых координат (формы 1–5 слева направо сверху вниз)**

**Fig. 5 – Response of the uncoupled coordinates (modes 1–5 from left to right from top to bottom)**

На рис. 6–7. показан отклик перемещений верха сооружения за первые 20 секунд. Из этого рисунка видно, что значительная часть отклика приходится исключительно на первые две формы колебаний, причем вторая вносит совсем незначительный вклад.

На рис. 8 показана динамика изменения силы в основании сооружения, а на рис. 9 динамика изменения опрокидывающего момента.



**Рис. 6 – Перемещения верха сооружения по формам колебаний (формы 1–4 слева направо сверху вниз)**

**Fig. 6 – Roof displacements for each mode (modes 1–4 from left to right from top to bottom)**

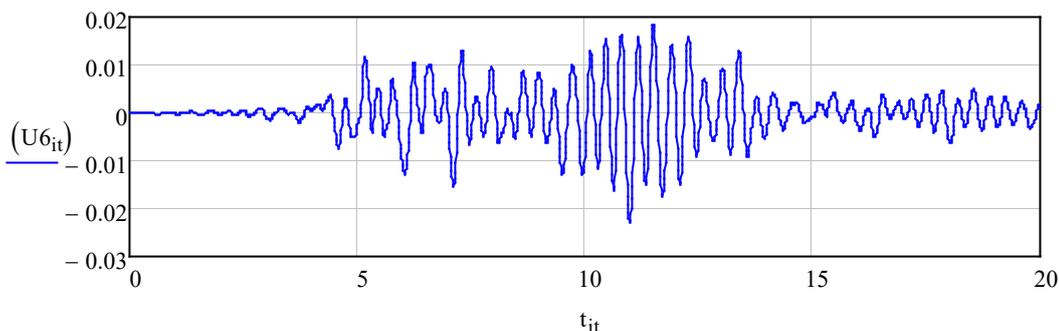


Рис. 7 – Полные перемещения верха сооружения  
Fig. 7 – Roof displacements total response

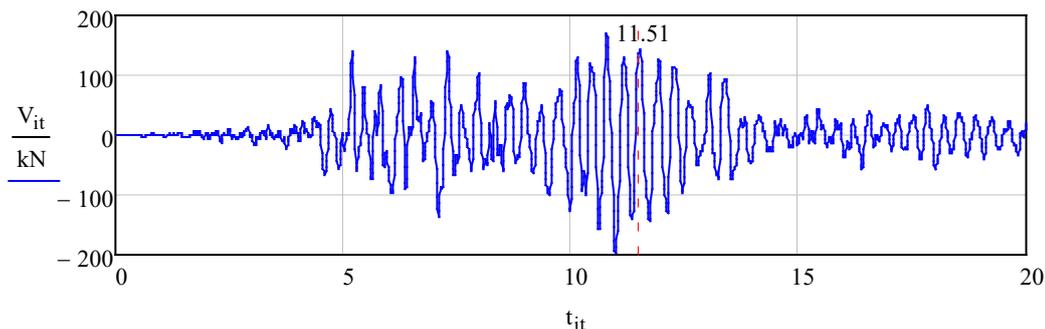


Рис. 8 – Сила в основании сооружения  
Fig. 8 – Base shear of the structure

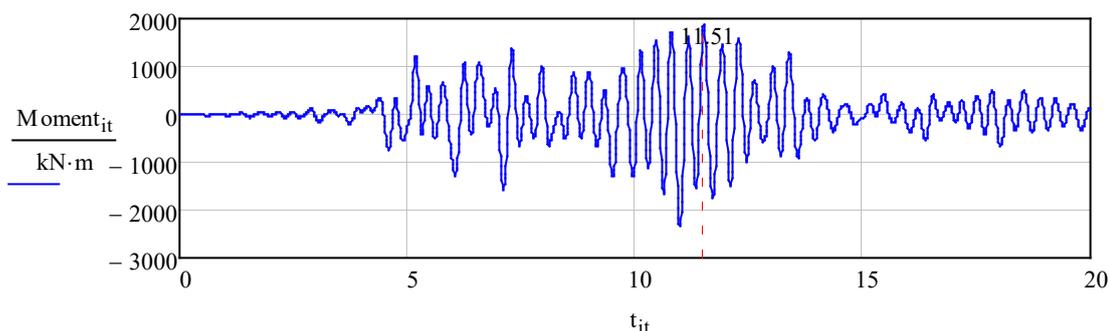


Рис. 9 – Опрокидывающий момент  
Fig. 9 – Overturning moment of the structure

### 3.3 Модальный спектральный анализ

Модальный спектральный анализ [25] может быть использован в качестве эффективной практической альтернативы для получения отклика *MDOF*-систем, подверженных землетрясениям. Для этого необходимо построить спектр отклика перемещений,  $S_d(T, \xi)$ , который представляет собой набор максимальных перемещений, полученных системой с одной степенью свободы с периодом  $T$  и коэффициентом демпфирования  $\xi$ , когда она подвергается воздействию записи движения грунта.

Тогда максимальное перемещение, которое может иметь конструкция с несвязанными степенями свободы, можно получить следующим образом:

$$(\eta_i)_{max} = |\alpha_i \cdot S_d(T_i, \xi_i)| \quad (18)$$

Подставив (18) в (9), получим значения максимальных перемещений, которые может иметь конструкция для каждой отдельной формы колебаний. Аналогично, подставляя (19) в (14), получаем максимальные силы для каждого  $i$ -й формы колебаний.

$$\{U_{mod}^{(i)}\} = \{\Phi^i\} \cdot (\eta_i)_{max} = \{\Phi^{(i)}\} \cdot |\alpha_i \cdot S_d(T_i, \xi_i)| \quad (19)$$

$$\{F_{mod}^{(i)}\} = [K]\{U_{mod}^{(i)}\} = [K]\{\Phi^{(i)}\} \cdot |\alpha_i \cdot S_d(T_i, \xi_i)| \tag{20}$$

Отклик для каждого из несвязанных уравнений получен с помощью спектров отклика перемещений для записи Гектор-Майн (см. рис. 10). В таблице 3 указаны период для каждой формы колебаний и спектральное смещение, определенное из спектра для каждого периода.

Имея эту информацию, можно вычислить максимальное перемещение для несвязанных степеней свободы (см. таблица 4).

Максимальные перемещения для каждой формы колебаний получены из:

$$[U_{mod}] = [\Phi][H_{mod}] = \left[ \{U_{mod}^{(1)}\} \mid \{U_{mod}^{(2)}\} \mid \dots \mid \{U_{mod}^{(n)}\} \right] \tag{21}$$

где  $H_{mod\ j,j} = \eta_{max\ j}$ .

На рис. 11 показаны максимальные перемещения для каждой формы колебаний.

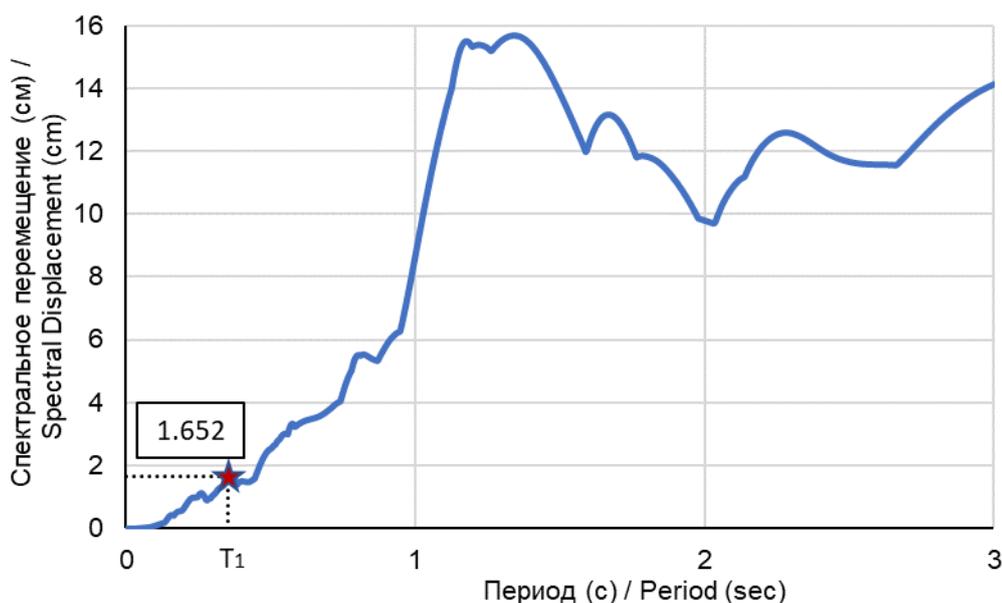


Рис. 10 – Спектральные перемещения  
Fig. 10 – Displacement response spectrum

Таблица 3. Спектральные перемещения  
Table 3. Spectral displacements

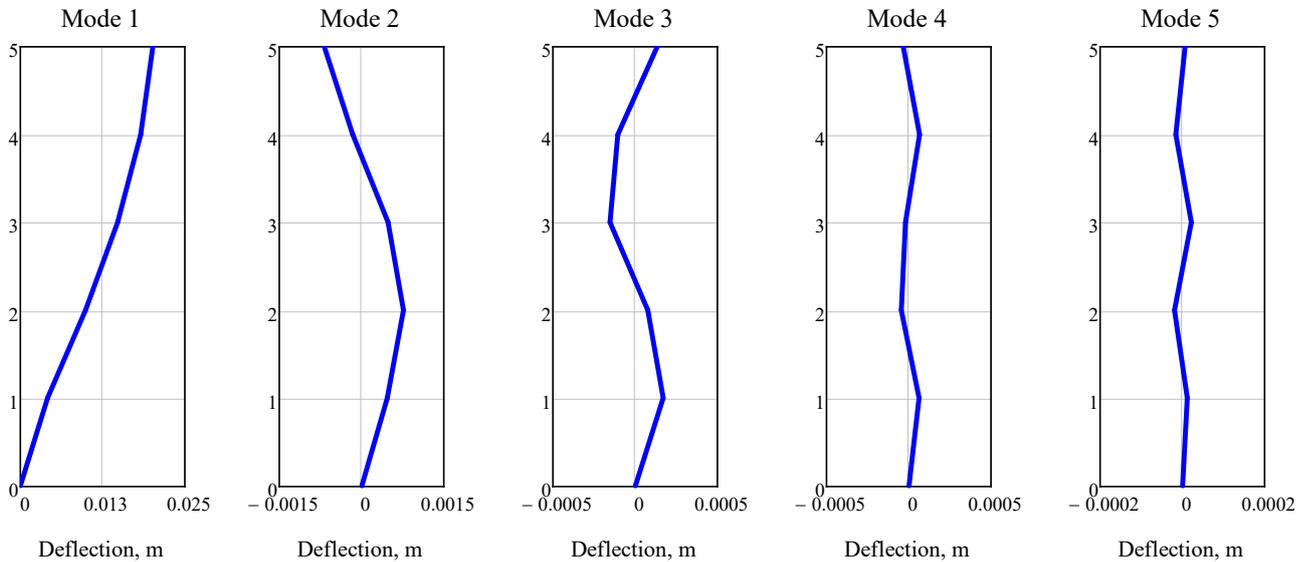
Форма колебаний / Mode	Период / Period, (s)	$S_d(T, \xi)$
1	0.354	0.016518
2	0.123	0.001595
3	0.08	0.000447
4	0.063	0.00029
5	0.056	0.000221

Таблица 4. Максимальные значения перемещений для несвязанных степеней свободы  
Table 4. Maximum displacement values for the uncoupled degrees of freedom

Форма колебаний / Mode	Коэффициент участия / Modal participation factors $\alpha_i$	$S_d(T, \xi)$	$(\eta_i)_{max} = \alpha_i \times S_d(T, \xi)$
1	188.963	0.016518	3.1213
2	67.436	0.001595	0.1075
3	42.603	0.000447	0.019

4	26.411	0.00029	0.0076
5	11.956	0.000221	0.0026

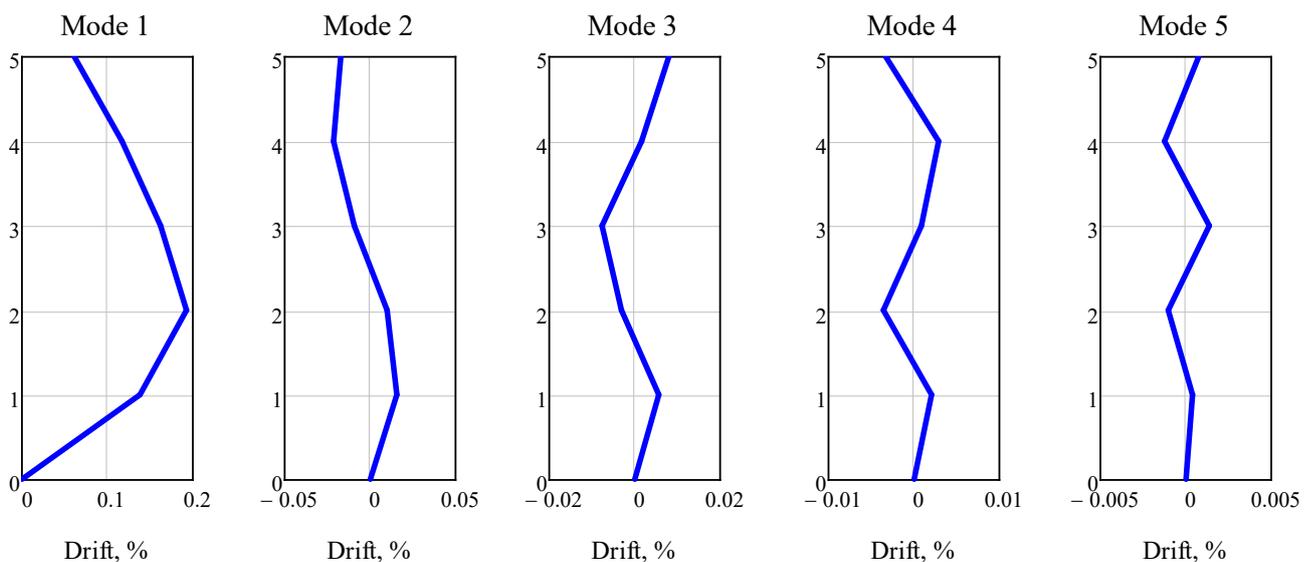
Используя полученные перемещения, можно вычислить относительный перекося этажа для каждого этажа и формы колебаний как алгебраическую разность перемещений двух последовательных этажей. Перекося обычно выражается в процентах от высоты этажа. В таблице 5 и на рисунке 12 показаны смещения этажей для каждой формы.



**Рис. 11 – Максимальное горизонтальное смещение по каждой форме колебаний**  
**Fig. 11 – Maximum lateral displacements for each mode**

**Таблица 5. Максимальный перекося этажа (%) по каждой форме колебаний**  
**Table 5. Maximum story drift (%) for each mode**

Этаж / Story	Форма 1 / Mode 1	Форма 2 / Mode 2	Форма 3 / Mode 3	Форма 4 / Mode 4	Форма 5 / Mode 5
5	0.0639	-0.0164	0.0055	-0.0025	0.0006
4	0.1219	-0.0203	0.0011	0.0022	-0.001
3	0.1688	-0.0089	-0.0053	0.0006	0.0011
2	0.2003	0.0093	-0.0021	-0.0027	-0.0008
1	0.1438	0.0147	0.0039	0.0015	0.0003



**Рис. 12 – Максимальный перекося этажа (%) по каждой форме колебаний**  
**Fig. 12 – Maximum story drift (%) for each mode**

Для получения максимальных модальных сил, действующих на систему при движении грунта (см. рис. 13), матрица жесткости конструкции умножается на модальные перемещения.

$$[F_{mod}] = [K_E] [U_{mod}^{(1)} | U_{mod}^{(2)} | \dots | U_{mod}^{(6)}] = [F_{mod}^{(1)} | F_{mod}^{(2)} | \dots | F_{mod}^{(6)}] \quad (22)$$

Максимальная поперечная сила (см. таблица 6, рис. 14) в этаже определяется как:

$$V_j^{(i)} = \sum_{k=j}^n F_k^{(i)} \quad (23)$$

Максимальный опрокидывающий момент (см. таблица 7, рис. 15) определяется как:

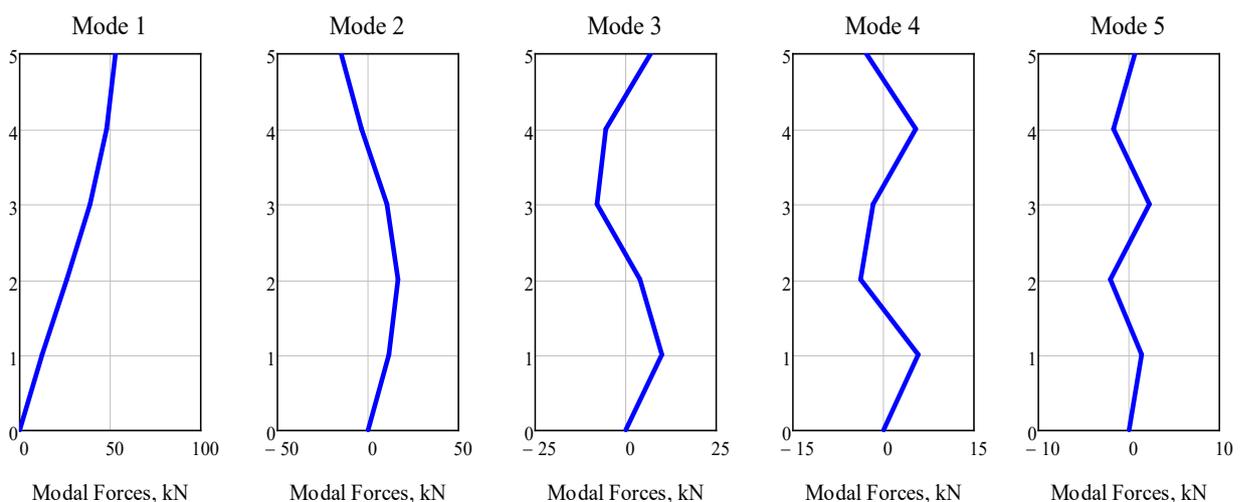
$$M_j^{(i)} = \sum_{k=j+1}^n (h_k - h_j) \cdot F_k^{(i)} \quad (24)$$

**Таблица 6. Максимальные значения поперечной силы в этаже**  
**Table 5. Maximum modal values for story shear**

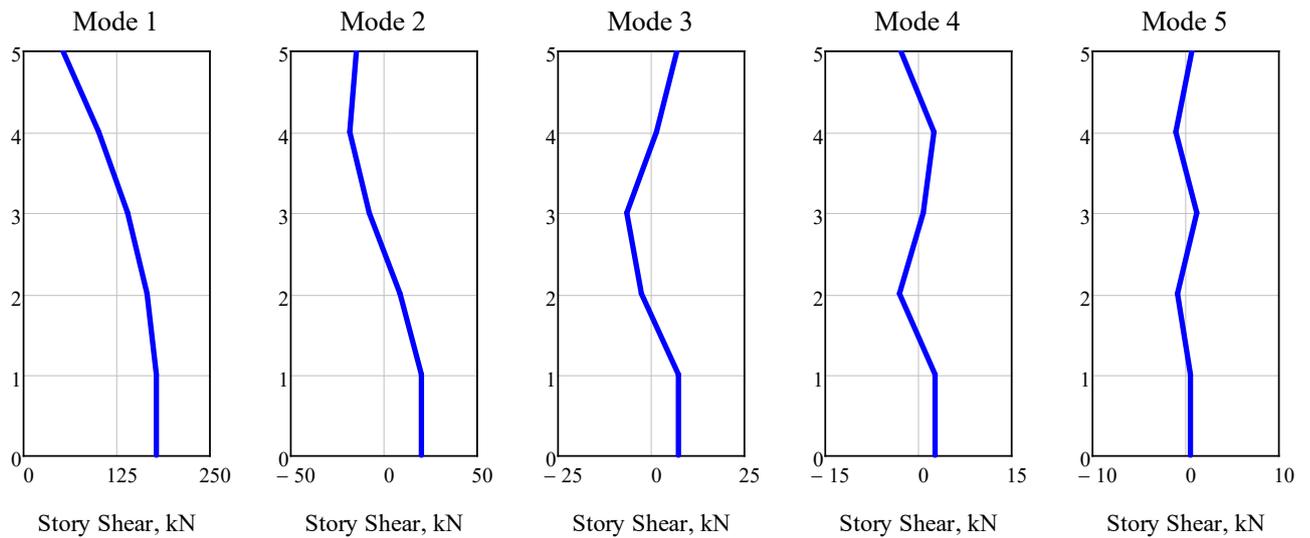
Этаж / Story	$V_{1,mod}$ , (kN)	$V_{2,mod}$ , (kN)	$V_{3,mod}$ , (kN)	$V_{4,mod}$ , (kN)	$V_{5,mod}$ , (kN)
5	55.02	-14.08	4.74	-2.16	0.52
4	105.00	-17.49	0.94	1.86	-0.87
3	145.38	-7.63	-4.56	0.55	0.94
2	172.47	8.01	-1.85	-2.34	-0.72
1	185.35	18.90	5.02	1.99	0.40

**Таблица 7. Максимальные значения модального опрокидывающего момента**  
**Table 7. Maximum story modal overturning moment**

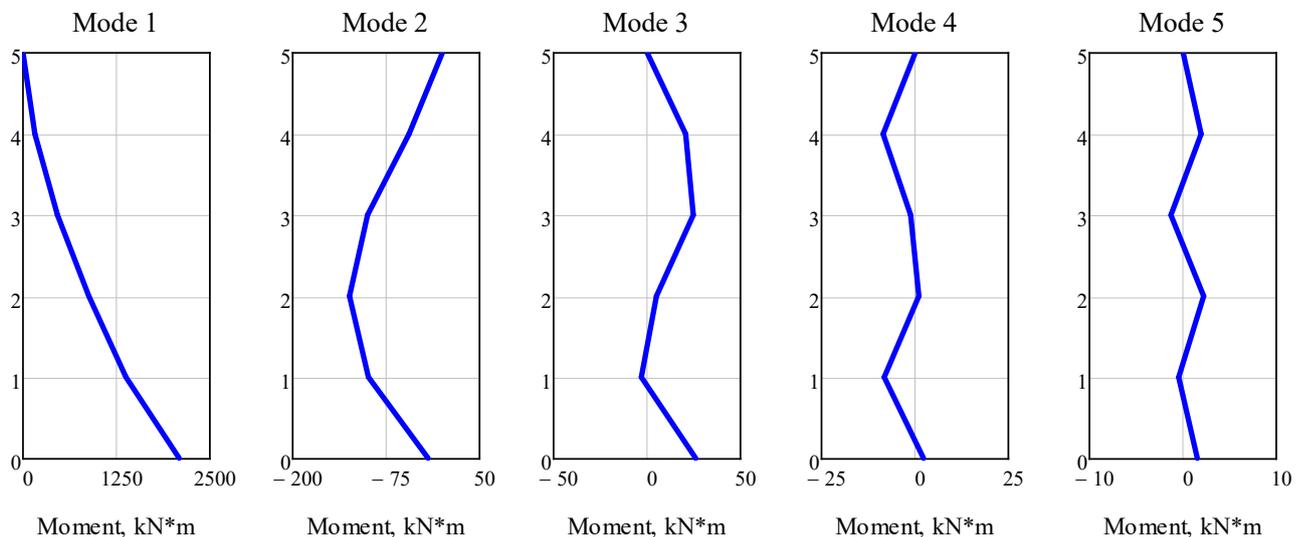
Этаж / Story	$M_{1,mod}$ , (kN·m)	$M_{2,mod}$ , (kN·m)	$M_{3,mod}$ , (kN·m)	$M_{4,mod}$ , (kN·m)	$M_{5,mod}$ , (kN·m)
5	0	0	0	0	0
4	165.00	-42.20	14.20	-6.50	1.50
3	480.00	-94.70	17.10	-0.90	-1.10
2	916.20	-117.60	3.40	0.80	1.80
1	1433.60	-93.60	-2.20	-6.20	-0.40



**Рис. 13 – Максимальные модальные силы по каждой форме колебаний (кН)**  
**Fig. 13 – Maximum modal forces for each mode (kN)**



**Рис. 14 – Максимальная поперечная сила по каждой форме колебаний (кН)**  
**Fig. 14 – Maximum story shear for each mode (kN)**



**Рис. 15 – Опрокидывающий момент по каждой форме колебаний (кН·м)**  
**Fig. 15 – Overturning moment for each mode (kN·m)**

В Таблице 8 приведены значения, полученные прямым динамическим методом и с помощью модального спектрального анализа для каждой из несвязанных степеней свободы.

Результаты, представленные в таблице 8 практически одинаковы для первой формы колебаний, а различия объясняются округлением точности в численных процедурах, поскольку алгоритм, используемый для получения динамического отклика, отличается от алгоритма, используемого для вычисления спектра перемещений.

Важно отметить, что максимальные значения для каждой несвязанной степени свободы с использованием динамического анализа были получены в разные моменты времени. Также следует отметить, что максимальное значение, полученное из спектра, в некоторых случаях соответствует максимальному значению, а в некоторых - минимальному, полученному в пошаговой процедуре, это связано с тем, что значение, которое несет спектр, является абсолютным значением.

Таблица 8. Сравнение результатов динамического анализа и модального спектрального анализа  
 Table 8. Comparison of values between base excitation and modal spectral analysis

Несвязанные степени свободы / Uncoupled Degrees of freedom		Динамический анализ / Dynamic analysis		Модальный спектральный анализ / Modal spectral analysis (m)
		$\eta_i$ (m)	t (s)	
$\eta_1$	Max	2.65	11.53	3.12
	Min	-3.33	11.01	
$\eta_2$	Max	0.33	6.39	0.11
	Min	-0.25	8.36	
$\eta_3$	Max	0.09	5.11	0.02
	Min	-0.09	6.01	
$\eta_4$	Max	5.12	5.12	0.01
	Min	6.02	6.02	
$\eta_5$	Max	0.04	5.12	0.002
	Min	-0.04	6.01	

Максимальное перемещение верха сооружения, полученное при динамическом анализе, составило 0.018 м, минимальное – 0.023 м. Алгебраическая сумма значений, полученных для *MDOF*-системы модальным спектральным анализом, равна 0.020 м, а сумма абсолютных значений – 0.022 м. Алгебраическая сумма модального отклика обычно занижает значение, полученное с помощью динамического анализа во времени [6,25], а сумма абсолютных значений модального отклика завышает его, что, вероятно, связано с тем, что спектр отклика перемещений очень чувствителен к малым периодам.

Максимальное значение силы в основании, полученное с динамического анализа во времени, составило 169 кН, минимальное – 198 кН. Сумма максимальных модальных сил в основании составила 212 кН. Это значение завышает значение динамического анализа в 1.07 раза. При динамическом анализе сила в основании контролируется первой формой колебаний, а остальные формы вносят очень незначительный вклад. Для опрокидывающего момента в основании прямым динамическим анализом было получено значение 1865 кН · м, минимальное – 2353 кН · м. Алгебраическая сумма максимальных модальных значений составляет 2177.8 кН · м. Для опрокидывающего момента вклад высших форм колебаний в обоих методах невелик.

### 3.4 Модальная комбинация отклика

Важно заметить, что параметры, рассчитанные с помощью спектрального анализа, возникают не одновременно. Необходимо использовать метод объединения вклада каждой из несвязанных форм колебаний. Наиболее широко известный метод объединения модальных спектров называется квадратным корнем из суммы квадратов (*square root of the sum of the squares*, *SRSS*), и его можно рассчитать для параметра отклика  $r_i$  по следующей формуле:

$$\bar{r} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2} \quad (25)$$

Определим максимальные отклики *MDOF*-системы, такие как: перемещения, перекосы этажа, силы в этаже, силы в основании, опрокидывающего момента.

Используя значения поперечной силы в этаже, также определяются эквивалентные статические силы:

$$F_{static} = V_i - V_{i-1} \quad (26)$$

Использование метода *SRSS* дает следующие результаты (см. таблица 9):

Таблица 9. Сравнение результатов динамического анализа и модального спектрального анализа  
 Table 9. Comparison of values between Base Excitation and Modal Spectral Analysis

Этаж / Story	Перемещение / Displacement, (m)	Перекося этажа / Drift, (%)	Поперечная сила в этаже / Story shear, (kN)	Опрокидывающий момент / Overturning moment, (kN)	Эквивалентные статические силы / Static equivalent forces, (kN)
-----------------	---------------------------------------	-----------------------------------	--	---	--



5	0.02097	0.00199	57.03	0	57.03
4	0.01905	0.00371	106.47	171.09	49.44
3	0.01539	0.00507	145.66	489.59	39.19
2	0.01035	0.00602	172.68	923.71	27.02
1	0.00434	0.00434	186.39	1436.65	13.71

Максимальная сила в основании сооружения – 186.4 кН.

Максимальный опрокидывающий момент в основании сооружения – 2175.1 кН · м.

Максимальный опрокидывающий момент в основании сооружения с учетом эквивалентных статических сил – 2191.0 кН · м. Опрокидывающий момент в этом случае немного больше, чем при использовании процедуры SRSS с модальными спектральными опрокидывающими моментами.

Сравнение результатов динамического анализа, модального спектрального анализа и анализа модальной комбинации представлено в таблице 10.

**Таблица 10. Сравнение результатов динамического анализа, модального спектрального анализа и анализа модальной комбинации**  
**Table 10. Comparison of values between base excitation, modal spectral analysis and modal combination (SRSS)**

Parameter	Динамический анализ / Dynamic analysis	Абсолютные значения модального спектрального отклика / Modal spectral absolute value	Комбинация SRSS модального спектрального отклика / Modal spectral SRSS
Перемещение верха сооружения / Roof lateral displacement, (m)	0.0228	0.21	0.21
Сила в основании / Base shear, (kN)	198.1	211.7	186.4
Опрокидывающий момент / Overturning moment, (kN · m)	2353.2	2177.8	2175.1

## 4 Conclusions

Основные результаты работы:

1. Представлена методика оценки динамического отклика упругой системы с многими степенями свободы, включая прямой динамический метод интегрирования уравнений движения во времени и упрощенный спектральный анализ с использованием спектрального перемещения.

2. Проведен динамический анализ системы с многими степенями свободы на запись Гектор-Майн, также были вычислены отдельные модальные спектральные отклики для спектра той же записи – что позволило вычислить абсолютный максимум спектрального отклика, к которому в последствии была применена процедура SRSS.

3. Результаты, представленные в таблице 10, показывают удовлетворительную сходимость результатов расчета. Имеющиеся различия объясняются, по-видимому, тем, что спектр отклика перемещений, как уже отмечалось, очень чувствителен к малым периодам. Тем не менее, можно сказать, что для данного случая соответствие между значениями пошагового анализа и значениями, полученными с помощью процедуры SRSS, является достаточно хорошим и может быть рекомендовано в качестве альтернативы прямому динамическому методу для сооружений простой конструктивной формы.

4. Результаты работы позволяют сделать вывод о возможности использования в российской практике сейсмостойкого строительства упрощенного спектрального анализа для оценки динамического отклика зданий с простым конструктивно-планировочным решением в качестве альтернативы линейно-спектральному и более трудоемкому и чувствительному прямому динамическому методу расчета зданий на сейсмостойкость.

## References

- Abaev, Z.; Valiev, A.; Kodzaev, M.; Gurbanov, R.  
 Dynamic response of a linear multiple degrees-of-freedom system;  
 2024; *Construction of Unique Buildings and Structures*; **111** Article No 11104. doi: 10.4123/CUBS.111.4



- 1 Ambrożkiewicz, B., Litak, G., Georgiadis, A., Meier, N. and Gassner, A. (2021) Analysis of Dynamic Response of a Two Degrees of Freedom (2-DOF) Ball Bearing Nonlinear Model. *Applied Sciences*, **11**, 787. <https://doi.org/10.3390/app11020787>.
- 2 Yonghao, J. and Xiulong, C. (2021) Dynamic Response Analysis for Multi-Degrees-of-Freedom Parallel Mechanisms with Various Types of Three-Dimensional Clearance Joints. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, **18**, 172988142110177. <https://doi.org/10.1177/17298814211017716>.
- 3 Marino, L. and Cicirello, A. (2021) Dynamic Response of Multi-Degree-of-Freedom Systems with a Coulomb Friction Contact under Harmonic Excitation. *Nonlinear Dynamics*, **106**, 1675–1709. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06966-3>.
- 4 Qi, S. and Kaiyin, Z. (2023) Study on Resonance of Multi-Degree-of-Freedom Structure Based on Modal Orthogonal Basis. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 14613484231219575. <https://doi.org/10.1177/14613484231219575>.
- 5 Shi, B., Yang, J. and Wang, J. (2023) Forced Vibration Analysis of Multi-Degree-of-Freedom Nonlinear Systems with the Extended Galerkin Method. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **30**, 794–802. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.2023922>.
- 6 Chopra, A.K. (2017) *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Fifth edition., Pearson, Hoboken, NJ. <https://www.pearson.com/en-us/subject-catalog/p/dynamics-of-structures-theory-and-applications-to-earthquake-engineering/P200000003487/9780134555126>.
- 7 Abaev, Z.K., Kodzaev, M.Yu. and Bigulaev, A.A. (2020) Earthquake Resistance Analysis of Structural Systems of Multi-Storey Civil Buildings. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, **16**, 76–82. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-1-76-82>.
- 8 Abaev, Z.K. and Sulthan, F. (2024) Seismic Performance Evaluation of Multi-Storey Residential Building with Friction Pendulum Bearings: Indonesia Case Study. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, **20**, 57–72. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2024-20-1-57-72>.
- 9 Amer, T.S., Bek, M.A., Hassan, S.S. and Elbendary, S. (2021) The Stability Analysis for the Motion of a Nonlinear Damped Vibrating Dynamical System with Three-Degrees-of-Freedom. *Results in Physics*, Elsevier, **28**, 104561. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.104561>.
- 10 Wang, J., Zhang, J., Yao, Z., Yang, X., Sun, R. and Zhao, Y. (2019) Nonlinear Characteristics of a Multi-Degree-of-Freedom Spur Gear System with Bending-Torsional Coupling Vibration. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, **121**, 810–827. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.12.002>.
- 11 Scutaru, M.L., Vlase, S., Marin, M. and Modrea, A. (2020) New Analytical Method Based on Dynamic Response of Planar Mechanical Elastic Systems. *Boundary Value Problems*, SpringerOpen, **2020**, 1–16. <https://doi.org/10.1186/s13661-020-01401-9>.
- 12 Sun, T., Kurama, Y.C., Zhang, P. and Ou, J. (2018) Linear-elastic Lateral Load Analysis and Seismic Design of Pin-supported Wall-frame Structures with Yielding Dampers. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Wiley Online Library, **47**, 988–1013. <https://doi.org/10.1002/eqe.3002>.
- 13 Abaev, Z., Valiev, A. and Kodzaev, M. (2023) Development of recommendations for the implementation of seismic risk mitigation policy in the Russian Federation based on world experience. *Earthquake Engineering. Construction Safety*. <https://doi.org/10.37153/2618-9283-2023-3-48-72>.
- 14 Baltzopoulos, G., Baraschino, R., Iervolino, I. and Vamvatsikos, D. (2018) Dynamic Analysis of Single-Degree-of-Freedom Systems (DYANAS): A Graphical User Interface for OpenSees. *Engineering Structures*, Elsevier, **177**, 395–408. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.09.078>.
- 15 Powell, G. (2006) Nonlinear Dynamic Analysis Capabilities and Limitations. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, **15**, 547–552. <https://doi.org/10.1002/tal.381>.
- 16 Cuadri, A.A., Gallego, R., Martín-Alfonso, M.J., Delgado-Sánchez, C., Cortés-Triviño, E., Tenorio-Alfonso, A., Borrero-López, A.M. and Ortega, F.J. (2022) A Mathcad-based Educational Experience to Address the Design of Nonisothermal Plug Flow Reactors. *Computer Applications in Engineering Education*, **30**, 1145–1160. <https://doi.org/10.1002/cae.22509>.
- 17 Charney, F.A. (2008) A Transformational Approach to Teaching Matrix Structural Analysis, and Visual Implementation Using *Mathcad*. Structures Congress 2008, American Society of Civil Engineers, Vancouver, British Columbia, Canada, 1–17. [https://doi.org/10.1061/41000\(315\)9](https://doi.org/10.1061/41000(315)9).



- 18 Cuadri, A.A., Martín-Alfonso, J.E. and Urbano, J. (2020) Using Mathcad to Facilitate the Design of Chemical Reactors Involving Multiple Reactions. *Computer Applications in Engineering Education*, **28**, 293–303. <https://doi.org/10.1002/cae.22192>.
- 19 Tarasov, V.A., Baranovskiy, M.Yu., Duvanova, I.A., Salmanov, I.D. and Pavluskina, Yu.Y. Single degree of freedom frame structure movements. *Construction of Unique Buildings and Structures*, **10**, 53–80. <https://doi.org/10.18720/CUBS.37.5>.
- 20 Romani, G.P. (2020) Multiple Degrees of Freedom Structural Dynamics with MATHCAD (Examples). 39. [https://community.ptc.com/sejnu66972/attachments/sejnu66972/PTCMathcad/198763/1/MDOF\\_Dynamics\\_Mathcad.pdf](https://community.ptc.com/sejnu66972/attachments/sejnu66972/PTCMathcad/198763/1/MDOF_Dynamics_Mathcad.pdf).
- 21 Caterino, N., Cosenza, E. and Azmoodeh, B.M. (2013) Approximate Methods to Evaluate Storey Stiffness and Interstory Drift of RC Buildings in Seismic Area. *Structural Engineering and Mechanics*, **46**, 245–267. <https://doi.org/10.12989/SEM.2013.46.2.245>.
- 22 Eroğlu, T. and Akkar, S. (2011) Lateral Stiffness Estimation in Frames and Its Implementation to Continuum Models for Linear and Nonlinear Static Analysis. *Bulletin of Earthquake Engineering*, **9**, 1097–1114. <https://doi.org/10.1007/s10518-010-9229-z>.
- 23 Schultz, A.E. (1992) Approximating Lateral Stiffness of Stories in Elastic Frames. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, **118**, 243–263. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1992\)118:1\(243\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1992)118:1(243)).
- 24 Lindfield, G. and Penny, J. (2019) Numerical Methods: Using MATLAB. Fourth edition., Elsevier, Academic Press, London San Diego, CA Cambridge, MA Oxford. <https://doi.org/10.1016/C2016-0-00395-9>.
- 25 Paz, M. and Kim, Y.H. (2019) Structural Dynamics: Theory and Computation. Springer International Publishing, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-94743-3>.